Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática - DM

Prof. Marcelo Pedro

Matemática L2-Turma LQ1
Lista 11 - Equações Diferenciais Ordinárias

Pratique bastante, só assim você conseguirá aprender!!

Questão 1. *Suponha que uma substância sofre desintegração radioativa, escreva a EDO que modela esse problema, explique qual método pode ser usado para resolver essa EDO, resolva e explique o que significam as constantes que aparecem na solução.*

Questão 2. *Um radioisótopo decai a uma velocidade tal que após 68 min. resta somente $\frac{1}{4}$ da quantidade original. Calcular a constante de decaimento(O k que aparece na EDO) e a meia-vida do radioisotopo.*[1]

Questão 3. *O bismuto-210 tem uma vida meia-vida de 5 dias.*

a) *Uma amostra tem originalmente uma massa de* 800*mg*. *Encontre uma fórmula para a massa remanescente depois de t dias.*
b) *Encontre a massa remanescente após 30 dias.*
c) *Quando a massa se reduzirá a* 1*mg*.
d) *Esboçe o gráfico da função massa.*

Questão 4. *Uma amostra de trítio-3 decai para* $94,5\%$ *de sua quantidade original depois de um ano.*

a) *Qual a meia vida do trítio-3?*
b) *Quanto tempo levaria para a amostra decair para* 20% *de sua quantidade original?*

Questão 5. *Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto*

$$A + B \to C$$

A **Lei da Ação das Massas** *afirma que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:*

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B].$$

Então, se as concentrações iniciais forem $[A] = a\frac{mols}{L}$ *e* $[B] = b\frac{mols}{L}$ *e escrevermos* $x = [C]$, *então teremos*

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

[1](Questão retirada de [2])

a) *Supondo que* $a \neq b$, *encontre* x *como uma função de* t. *Use o fato de que a concentração inicial de* C *é* 0.
b) *Encontre* $x(t)$ *assumindo que* $a = b$. *Como essa expressão para* $x(t)$ *é simplificada se soubermos que* $[C] = \frac{1}{2}a$ *depois de* 20 *segundos.*

Questão 6. *As experiências mostram que se a reação química*

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

ocorrer a 45°C, *a taxa de reação do pentóxido de dinitrogênio é proporcional á sua concentração da seguinte forma:*

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0,0005[N_2O_5]$$

a) *Encontre a expressão para a concentração* $[N_2O_5]$ *depois de* t *segundos se a concentração inicial for* C.
b) *Quanto tempo levará para que a reação reduza a concentração de* N_2O_5 *para* 90% *de seu valor original.*

Questão 7. *As experiências mostram que a reação*

$$H_2 + Br_2 \rightarrow 2Br$$

satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[Hbr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto para essa reação a equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^{\frac{1}{2}}$$

onde $x = [Hbr]$ *e* a *e* b *são as concentrações iniciais de hidrogênio e bromo.*

a) *Supondo que* $a = b = 40\frac{mols}{L}$. *E que no inicio da reação não existe acido bromidico. Encontre a concentração de acido bromidico em função do tempo.*
b) *Se* $a = 60\frac{mols}{L}$ *e* $b = 30\frac{mols}{L}$, *encontre* x *em função de* t.*Dica:ao fazer a integração, faça a substituição* $u = \sqrt{30-x}$.

Questão 8. *"Qualquer mudanca de fase ocorrendo a pressão e temperatura constante pode ser descrita pela equação de Clapeyron*

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T(V_f - V_i)}$$

onde ΔH *é a mudança de entalpia ocorrendo na mudança de fase, e* V_i *e* V_f *são os volumes molares inicial e final, respectivamente."(*[1], *pag. 72, tradução do professor). Assuma que* V_i *é desprezivel, isto é* $V_i \approx 0$ *e deduza a Equação de Clausius-Clapeyron*

$$\ln P = -\frac{\Delta H}{RT} + C$$

[2]

[2] Exercicio baseado no exemplo 2, da pagina 72 de [1]

Questão 9. *Um tanque contém* $20kg$ *de sal dissolvido em* $5000L$ *de água. Água salgada com* $0,03kg$ *de sal por litro entra no tanque a um a taxa de* $25\frac{L}{min}$. *A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Qual a quantidade de sal há no tanque, apos t minutos e 30 minutos?*

Questão 10. *Um tanque contem* $1000L$ *de água salgada com* $15kg$ *de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de* $10\frac{L}{min}$. *A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque(a) apos t minutos e (b) apos 20 minutos?*

Questão 11. *Um barril com* $2000L$ *de cerveja contém* 4% *de alcool(por volume). Cerveja com* 6% *de alcool é bombeada para fora do barril á uma taxa de* $20L/min$ *e a mistura é bombeada para fora a mesma taxa. Qual a procentagem de alcool depois de uma hora?*

Questão 12. *O ar em uma sala com volume* $180m^3$ *contém* $0,15\%$ *de dioxido de carbono inicialmente. Ar mais fresco com apenas* $0,05\%$ *de dióxido de caborno entra na sala a uma taxa de* $\frac{2m^3}{min}$ *e o ar misturado sai na mesma taxa. Encontre a porcentagem de dioxido de carbono na sala como uma função do tempo. O que acontece a longo prazo?*

Questão 13. *Resolva a equação diferencial*

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{e^y}$
(3) $xy^2y' = x + 1$
(4) $(y^2 + xy^2)y' = 1$
(5) $(y + sen(y))y' = x + x^3$
(6) $\frac{dv}{ds} = \frac{s+1}{sv+s}$
(7) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}}$
(8) $\frac{dy}{d\theta} = \frac{e^y sen^2(\theta)}{y sec(\theta)}$
(9) $\frac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$
(10) $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

Questão 14. *Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.*

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = -3$
(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{ln(x)}{xy}, \quad y(1) = 2$
(3) $y' = \frac{xysen(x)}{y+1}, y(0) = 1$
(4) $xln(x) = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y', \quad y(1) = 1$
(5) $\frac{dp}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$
(6) $y'tg(x) = a + y, \quad y(\frac{\pi}{3} = a) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Questão 15. *Mostre que* $y(x) = x - x^{-1}$ *é uma solução da equação diferencial* $xy' + y = 2x$.

Questão 16. *Verifique se* $y = sen(x)cos(x) - cos(x)$ *é uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' + (tg(x))y = cos^2(x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Questão 17. *Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial* $y'' + y = sen(x)$?

a) $y = sen(x)$ b) $y = cos(x)$ c) $y = \frac{1}{2}xsen(x)$ d) $y = -\frac{1}{2}xcos(x)$

Questão 18. *" Em eletroquimica a* **Equação de Cottrell**

$$I = nFAc\sqrt{\frac{D}{\pi}}t^{-\frac{1}{2}}$$

descreve a corrente I *no tempo* t *depois que um eletrodo é imerso na solução. A corrente é definida como a razão de mudanca da carga* Q *então:* $I = \dfrac{dQ}{dt}$. *Usando isto encontre uma expressão para a carga."(Questão retirada de* [4], *pag. 97)*

Questão 19. *Resolva a equação diferencial:*

(1) $y' + 2y = 2e^x$
(2) $y' = x + 5y$
(3) $xy' - 2y = x^2$
(4) $x^2y' + 2xy = \cos^2(x)$
(5) $xy' + y = \sqrt{x}$
(6) $y' + y\sin(e^x)$
(7) $\sin(x)\frac{dy}{dx} + (\cos(x))y = \sin(x^2)$
(8) $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$
(9) $(1+t)\frac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$
(10) $t\ln(t)\frac{dr}{dt} + r = te^t$

Questão 20. *Resolva o problema de valor inicial:*

(1) $y' + y = x + e^x \quad y(0) = 0.$
(2) $t\frac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0.$
(3) $\frac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2e^{t^2} \quad v(0) = 5.$
(4) $2xy' + y = 6x, \quad x > 0 \quad y(4) = 20.$
(5) $xy' = y + x^2\sin(x), \quad y(\pi) = 0.$
(6) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3x(y-1) = 0, \quad y(0) = 2$

Questão 21. *Um tanque contém $100L$ uma solução com concentração salina de $0,4kg/L$ é adicionada a taxa de $5L/min$.A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de $3L/min$. Se $y(t)$ é a quantidade de sal (quilogramas) apos t minutos, mostre(explique) que y satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}.$$

Resolva essa equação e calcule a concetração depois de 20 minutos.

Questão 22. *Um tanque com capacidade de $400L$ está cheio com uma mistura de agua e cloro com concentração de $0,05g$ de cloro por litro. Para poder reduzir a concentração de cloro, agua doce é bombeada para o tanque na taxa de $4L/s$. A mistura é agitada e bombeada para fora em uma taxa de $10L/s$. Encontre a quantidade de cloro no tanque como uma função do tempo.*

Questão 23. Equação de Bernoulli

A equação

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \in \mathbb{R}$$

é conhecida como Equação de Bernoulli e é linear se $n = 0$ ou $n = 1$. Se $n \neq 0$ ou $n \neq 1$ a equação não é linear mas pode ser transformada em uma equação linear fazendo a mudança de variável $v = y^{1-n}$. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696. Demonstre isto e resolva as equações:

(1) $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$
(2) $y' = ry - ky^2, \quad r > 0, k > 0.$
(3) $y' + t^2y = t^2y^4$
(4) $y' - \frac{3}{t}y = t^4y^{\frac{1}{3}}$
(5) $y' + \frac{2}{t}y = -t^9y^5, \qquad y(-1) = 2.$

``The best way to have a good idea is to have lots of ideas. '' Linus Pauling

Referências

1. BARRANTE, James R. Appplied Mathematics for Physical Chesmistry. Segunda Edição. Prentice Hall. 1998.
2. MAHAN, Bruce H. Química um curso Universitario. Segunda edição. Decima Reimpressão. Editora Edgard Blucher LTDA.São Paulo, 1972,654p.
3. STEWART, James. Cálculo. Volume 2. Tradução de Antonio Carlos Morretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2009.
4. CUNNINGAM, Allan; WHELAN Rory. Maths for Chemists. University of Birmingham- University of Leeds. Disponível Online em `http://www.birmingham.ac.uk/Documents/college-eps/college/stem/Student-Summer-Education-Internships/Maths-for-Chemists-Booklet.pdf`. Acesso em 19 de Setembro de 2016.