Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE
Departamento de Matemática - DM

Prof. Marcelo Pedro

Lista 04 - Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias-2018.1

Técnicas de substituição

Questão 1 Equação de Bernoulli

A equação

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \in \mathbb{R}$$

é conhecida como Equação de Bernoulli e é linear se $n = 0$ ou $n = 1$. Se $n \neq 0$ ou $n \neq 1$ a equação não é linear mas pode ser tranformada em uma equação linear fazendo a mudança de variável $v = y^{1-n}$. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696. Demonstre isto e resolva as equações:

1. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$
2. $y' = ry - ky^2, \quad r > 0, k > 0.$
3. $y' + t^2y = t^2y^4$
4. $y' - \frac{3}{t}y = t^4y^{\frac{1}{3}}$
5. $y' + \frac{2}{t}y = -t^9y^5, \qquad y(-1) = 2.$

Questão 2 Equação de Riccati *p 102. A equação*

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^3$$

é conhecida como equação de Riccati[1] *Suponha que é conhecida alguma solução particular y_1 desta equação. Uma solução mais geral contendo uma constante arbitrária pode ser obtida pela substituição*

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação linear de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

Note que $v(t)$ vai conter uma única constante arbitrária.

Questão 3 *Usando o método do exercício anterior e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Riccati a seguir:*

[1]Em homenagem a Jacopo Francesco Riccati(1676-1754). Riccati estudou estensivamente essas equações; no entanto, o resultado enunciado neste problema foi descoberto por Euler(em 1760).

1. $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2; \quad y_1(t) = t$
2. $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2; \quad y_1(t) = \frac{1}{t}$
3. $\frac{dy}{dt} = \frac{2\cos^2(t) - sen^2(t) + y^2}{2\cos(t)}; \quad y_1(t) = \sin(t).$

Questão 4 *A propagação de uma unica ação em uma população muito grande(por exemplo, motoristas ligando os faróis ao pôr do sol) muitas vezes depende parcialmente de circunstâncias externas(o escurecer) e parcialmente de uma tendência de imitar os outros que já executaram a ação em questão. Neste caso, a proporção $y(t)$ de pessoas que já executaram a ação pode ser descrita*[2] *pela equação*

$$\frac{dy}{dt} = (1-y)[x(t) + by], \tag{0.1}$$

onde $x(t)$ mede o estimulo externo e b é o coeficiente de imitação.

a) *Note que a equação 0.1 é uma equação de Riccati e que $y_1(t) = 1$ é uma solução. Use a transformação sugerida para equações de Riccati e encontre a equação linear satisfeita por $v(t)$.*

b) *Encontre $v(t)$ no caso em que $x(t) = at$, onde a é constante. Deixe sua resposta em forma integral.*

Questão 5 *Resolva as seguintes EDO's usando técnicas de substituição*

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y-3x}{2x-y}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y+3x}{2x+y}$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$
6. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3y^2}{2xy}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$
9. $\frac{dy}{dx} = (2x+3y)^2$
10. $\frac{dy}{dx} = (-x+y+15)^3$

Algumas equações de segunda ordem

Lembre que uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em geral pode ser escrita como:

$$y'' = f(t, y, y').$$

Vamos ver dois casos particulares onde um método de substituição permite resolver estas equações.

Questão 6 Equações sem a Variável Dependente *Para uma equação diferencial de segunda ordem da forma $y'' = f(t, y')$, a substituição $v = y'$ implica que $v' = y''$ e então a equação é transformada em $v' = f(t, v)$. Quando esta equação recai em um método conhecido resolvemos ela e então descobrimos y integrando v. Em cada um das equações abaixo, use este método para encontrar a solução:*

[2] Veja Anatol Rapoport, "Contribution of the Mathematical Theory of Mass Behavior:I. The Propagation of Single Acts" Bulletin Of Mathematical Biophysics 14(1952)159-169 e John Z. Hearon, "Note on the Theory Of Mass Behavior" Bulletin Of Mathematical Biophysics 17(1955)7-13

a) $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0, \quad t > 0$

b) $y'' + t(y')^2 = 0$

c) $y'' + y' = e^{-t}$

d) $ty'' + y' = 1, \quad , t > 0$

e) $2t^2y'' + (y')^3 = 2t'y', \quad t > 0$

f) $t^2y'' = (y')^2, \quad t > 0$

Questão 7 Equações sem a Variável Independente *Para uma equação diferencial de segunda ordem da forma $y'' = f(y, y')$ na qual não aparece a variável independente, a substituição $v = y'$ implica que $v' = y''$ e então a equação é transformada em $v' = f(y, v)$, ou mais explicitamente*

$$\frac{dv}{dt} = f(y, v).$$

Esta fórmula envolve três variavéis, para eliminar uma delas lembramos que a regra da cadeia implica que:

$$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v.$$

Transformando a equação em $\frac{dv}{dy}v = f(y, v)$. Então se está ultima equação for de um dos tipos que conhecemos a solução, resolvemos e obtemos v como uma função de y. Em seguida resolvemos $\frac{dy}{dt} = v(y)$ que é uma equação separável. Em cada um das equações abaixo, use este método para encontrar a solução:

a) $yy'' + (y')^2 = 0$

b) $y'' + y(y')^3 = 0$

c) $yy'' - (y')^3 = 0$

d) $y'' + y = 0$

e) $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

f) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Questão 8 *Em cada um dos problemas abaixo, resolva o problema de valor inicial dado usando os métodos dos dois exercicios anteriores.*

a) $yy'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

b) $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

c) $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$

d) $y'y'' - t = 0 \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1.$

Questão 9 Teoremas de Existência *sem resolver a EDO, usando os teoremas de existência diga um intervalo onde a solução da EDO certamente existe.*

1. $(t - 3)y' + (\ln(t))y = 2t, \qquad y(1) = 2.$
2. $t(t - 4)y' + y = 0, \qquad y(2) = 1.$
3. $y' + (tg(t))y = sen(t), \qquad y(\pi) = 0.$
4. $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2, \qquad y(1) = -3.$
5. $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2, \qquad y(-1) = 1.$
6. $(\ln(t))y' + y = cot(t), \qquad y(2) = 3.$

Questão 10 Dependência das condições iniciais
Em cada um dos problemas abaixo resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0.

1. $y' = \frac{-4t}{y}$ $\quad y(0) = y_0$.
2. $y' + y^3 = 0,$ $\quad y(0) = y_0$.
3. $y' = 2ty^2,$ $\quad y(0) = y_0$.
4. $y' = \frac{t^2}{y(1+t^3)}$ $\quad y(0) = y_0$.

``(...) nunca nos tornaremos Matemáticos, por exemplo, embora nossa memória possua todas as demonstrações feitas por outros, se o nosso espírito não for capaz de resolver toda espécie de problemas;(...)"RENÉ DESCARTES (Regras Para Orientação do Espírito. ''([1], pág. 12)

Referências

[1] DESCARTES, R. Regras para a Orientação do Espirito. Tradução de Maria Ermantina de Almeida Prado Galvão. Editora WMF Martins Fontes. Terceira edição, São Paulo. 2012. 151p.

[2] STEWART, James. Cálculo. Volume 2. Tradução de Antonio Carlos Morretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2009.

[3] BOYCE,William E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Nona edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.