Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE

Departamento de Matemática - DM

Prof. Marcelo Pedro

Lista 02 - Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias-2018.1

Dica: É importante reler a aula, nem tudo que voce precisa estará na lista de exercícios.

Questão 1 *Um objeto de massa* **m** *esta caindo próximo a superficie da terra onde, onde a gravidade pode ser considerada constante. Para efeito de aproximação podemos considerar que a resistência do ar sob o objeto é proporcional a velocidade do objeto* **v**, *com constante de proporcionalidade* γ.

a) *Deduza que a equação do movimento é regida pela equação:*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}\mathbf{v}.$$

b) *Resolva a EDO acima considerando a condição inicial* $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

c) *Levando em consideração a forma da solução diga o que o ocorre com a solução quando* $t \to \infty$.

d) *Se não há resistência do ar, ou seja,* $\gamma = 0$ *então deduza como fica equação do movimento.*

Questão 2 *Nos Problemas abaixo encontre uma solução particular que satisfaça a equação:*

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
2. $\frac{dy}{dt} - 2y = t^2e^{2t}, \quad e \quad y(0) = 1.$
3. $y' + y = te^{-t} + 1$
4. $\dot{y} + \frac{1}{t}y = 3cos(2t), t > 0$
5. $y' - 2y = 3e^t$
6. $ty' + 2y = sen(t), t > 0$
7. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$
8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$
9. $2y' + y = 3t$
10. $ty' - y = t^2e^{-t}$
11. $y + y' = 5sen(2t)$
12. $2y' + y = 3t^2$
13. $y' - y = 2te^{2t}, y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad e \quad y(1) = 0.$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0.$
16. $y' + \left(\frac{2}{t}\right) y = \frac{(cos(t))}{t^2} \qquad y(\pi) = 0, \quad t > 0.$
17. $y' - 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = 2.$
18. $ty' + 2y = sen(t), \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1, \qquad t > 0.$
19. $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}, \qquad y(-1) = 0, \qquad t < 0.$
20. $ty' + (t+1)y = t, \qquad y(ln2) = 1, \qquad t > 0.$

Questão 3 *Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ tendem a um limite quando $t \to \infty$ e encontre o valor deste limite.*
Sugestão: Considere uma solução geral encontrada pelo metodo dos fatores integrantes, e depois use a Regra de L'Hôpital no termo de limite indeterminado.

Questão 4 **Variação De Parâmetros** *Exercicio resolvido em sala*
Considere o seguinte método de resolução de equação de primeira ordem geral:

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{0.1}$$

a) Se $g(t) = 0$ para todo t, mostre que a solução é

$$y = Aexp\left[-\int p(t)dt\right], \tag{0.2}$$

onde A é uma constante.

b) Se $g(t)$ não é identicamente nula suponha que a solução da equação 0.1 é da forma

$$y = A(t)exp\left[-\int p(t)dt\right], \tag{0.3}$$

Onde agora A é uma função de t. Substituindo y na equação diferencial por essa expressão, mostre que $A(t)$ tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t)exp\left[-\int p(t)dt\right]. \tag{0.4}$$

c) Encontre $A(t)$ da 0.4. Depois substitua na 0.3 por essa solução para determinar y. Verifique que a solução obtida desta maneira é igual a solução obtida pelo método dos Fatores Integrantes.

Questão 5 *Use o método de* **variação de parâmetros** *para resolver as seguintes EDO's:*

a) $y' - 2y = t^2e^{2t}$.

b) $y' + \left(\frac{1}{t}\right)y = 3cos(2t), t > 0$.

c) $ty' + 2y = sen(t), \quad t > 0$.

d) $2y' + y = 3t^2$.

Questão 6 *Considere a seguinte equação linear:*

$$y' + p(t)y = 0$$

a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da EDO então $Y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ também é solução da EDO, para quaisquer valores de C_1 e C_2. Conclua usando isto que o conjunto das soluções da EDO é um ESPACO VETORIAL real.

b) Resolva a EDO e conclua a dimensão do Espaço Vetorial das Soluções é 1.

Questão 7 *Exercicio resolvido em sala*

Considere a EDO linear

$$y' + p(t)y = g(t).$$

Sabemos que a solução desta EDO é dada por $y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right]$ *onde* $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$.

a) *Mostre que* $\frac{1}{\mu(t)}.c$ *é solução de* $y' + p(t)y = 0$

b) *Mostre que*

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds\right]$$

é solução de

$$y' + p(t)y = g(t).$$

c) *Conclua usando os itens a) e b) dizemos que a solução de uma EDO linear de primeira ordem é a solução do sistema homogêneo somada com uma solução particular do problema.*

Questão 8 Método da variação das Constantes. *Exercício resolvido em sala.*

Considere a EDO linear

$$y' + p(t)y = g(t).$$

Sabemos que a solução desta EDO é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right]$$

onde $\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$. *Supondo que a solução y da EDO é da forma* $y = u.v$ *e substituindo isto na equação obtemos:*

$$y' = u'v + uv'.$$

$$y' + p(t)y = g(t) \Leftrightarrow (u'v + uv') + p(t)(uv) = g(t) \Leftrightarrow u(v' + vp(t)) + (vu' - g(t)) = 0.$$

Esta última equação é satisfeita se

$$\begin{cases} v' + vp(t) = 0 \\ vu' - g(t) = 0 \end{cases} \tag{0.5}$$

Resolva a primeira equação do sistema acima e depois substitua a solução v na segunda e resolva encontrando u. Conclua que a solução da EDO linear inicial $y = uv$ *é dada pela mesma fórmula apontada acima, e conclua que a função v é* $v = \frac{1}{\mu}$.

Questão 9 *Use o metodo de* **variação das constantes** *para resolver as seguintes EDO's:*

a) $\dot{y} + 2ty = t$

b) $\dot{y} + \frac{2}{t}y = t^3, y(1) = 2$

c) $t\frac{dy}{dt} + y = t, \quad y(10) = 20.$

d) $\dot{y} + y = \frac{1}{1+t^2}, y(1) = 3$

e) $(1 + t^2)y' + 4ty = t, \quad y(1) = \frac{1}{4}$

Questão 10 *Um tanque contém* $100L$ *uma solução com concentração salina de* $0,4kg/L$ *é adicionada a taxa de* $5L/min$. *A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de* $3L/min$. *Se* $y(t)$ *é a quantidade de sal (quilogramas) apos* t *minutos, mostre(explique) que* y *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}.$$

Resolva essa equação e calcule a concetração depois de 20 *minutos.*

Questão 11 *Um tanque com capacidade de* $400L$ *está cheio com uma mistura de agua e cloro com concentração de* $0,05g$ *de cloro por litro. Para poder reduzir a concentração de cloro, agua doce é bombeada para o tanque na taxa de* $4L/s$. *A mistura é agitada e bombeada para fora em uma taxa de* $10L/s$. *Encontre a quantidade de cloro no tanque como uma função do tempo.*

Questão 12 *As experiências mostram que a reação*

$$H_2 + Br_2 \to 2HB_r$$

satisfaz a lei de troca

$$\frac{d[HB_r]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}$$

e portanto, para essa equação diferencial torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(x - a)(x - b)^{\frac{1}{2}}$$

onde $x = [HBr]$ *e* a *e* b *são concentrações iniciais de hidrogenio e bromo.*

a) *Resolva a EDO e escreva* x *como função de* t *no caso que* $a = b$. *Use o fato de que* $x(0) = 0$.

b) *Se* $a > b$, *encontre* t *como uma função de* x.*(Dica: Ao fazer a integração, faça a substituição* $u = \sqrt{b - x}$.*)*

Questão 13 *Mostre que se* a *e* λ *são constantes positivas e se* b *é um número real arbitrário, então toda solução da equação*

$$y' + ay = be^{-\lambda}t$$

tem a propriedade de que $y \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

"O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário!" **Albert Einstein**.

Referências

[1] STEWART, James. Cálculo. Volume 2. Tradução de Antonio Carlos Morretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2009.

[2] BOYCE,William E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Nona edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.