Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE
Departamento de Matemática - DM

Prof. Marcelo Pedro

Lista 01 - Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias-2018.1

Pratique bastante, só assim voce conseguirá aprender!!
Dica: voce pode usar o site: www.wolframalpha.com para verificar seus resultados. Digitando as equações abaixo voce irá obter a classificação, formas alternativas de escrever a EDO, e a solução quando é possivel resolver. Abaixo algumas dicas na hora de digitar:

Equação	Digitação
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\frac{3}{4}$	3/4
$\frac{dy}{dx}$	dy/dx
$\frac{dy}{dx}$	dy/dx
$\int x dx$	int x dx
x^{4000}	x^(4000)

Questão 1 *Nos problemas abaixo determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear.*

1. $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = sen(t)$
2. $(1+y^2)\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$
4. $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\frac{d^2y}{dt^2} + sen(t+y) = sen(t)$
6. $\frac{d^3y}{dt^3} + t\frac{dy}{dt} + (cos^2 t)y = t^3$

Questão 2 *Mostre que $y(x) = x - x^{-1}$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 2x$.*

Questão 3 *Verifique se $y = sen(x)cos(x) - cos(x)$ é uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' + (tg(x))y = cos^2(x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Questão 4 *Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + y = sen(x)$?*

a) $y = sen(x)$ *b)* $y = cos(x)$ *c)* $y = \frac{1}{2}xsen(x)$ *d)* $y = -\frac{1}{2}xcos(x)$

Questão 5 *Mostre que cada membro da familia de funcoes* $y = \frac{(ln(x)+C)}{x}$ *é uma solução da equação diferencial* $x^2y' + xy = 1$.

Questão 6 *Em cada item abaixo verifique se cada função dada é uma solução da equação diferencial:*

1. $y'' - y = 0; \qquad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = cosh(t)$
2. $y'' + 2y' - 3y = 0; \qquad y_1(t) = e^{-3t}, \quad y_2(t) = e^t$
3. $ty' - y = t^2; \qquad y(t) = 3t + t^2$
4. $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t; \qquad y_1(t) = \frac{t}{3}, \quad y_2(t) = e^{-t} + \frac{t}{3}$
5. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0; \qquad t > 0 \quad y_1(t) = t^{\frac{1}{2}} \quad y_2(t) = t^{-1}$
6. $y'' + y = sec(t), \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}; \qquad y(t) = (cos(t))ln(cos(t)) + tsen(t)$
7. $y' - 2ty = 1; \qquad y(t) = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}$

Questão 7 *Nos seguintes problemas resolva a equação diferencial dada, se possivel determine explicitamente a solução e diga qual o intervalo de validade da solução:*

1. $y' = \frac{x^2}{y}$
2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
3. $y' + y^2\sin(x) = 0$
4. $y' = \frac{(3x^2-1)}{(3+2y)}$
5. $y' = (\cos^2(x))(cos^2(2y))$
6. $xy' = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$
9. $y' = (1-2x)y^2, \qquad y(0) = -\frac{1}{6}$
10. $y' = \frac{(1-2x)}{y}, \quad y(1) = -2.$
11. $xdx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1.$
12. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}, r(1) = 2.$
13. $y' = \frac{2x}{(y+x^2y)}, \quad y(0) = -2.$

Questão 8 *Nos seguintes problemas resolva a equação diferencial determinando explicitamente a solução e diga qual o intervalo de validade da solução:*

1. $y' = (1-2x)y^2; \quad y(0) = -\frac{1}{6}$
2. $y' = \frac{(1-2x)}{y} \qquad y(1) = -2.$
3. $xdx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1.$
4. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}, \quad r(1) = 2.$
5. $y' = \frac{2x}{(y+x^2y)} \qquad y(0) = -2.$
6. $y' = \frac{xy^3}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad y(0) = 1.$
7. $y' = \frac{2x}{(1+2y)}, \quad y(2) = 0.$

Questão 9 *Resolva a equação diferencial*

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{e^y}$
3. $xy^2y' = x + 1$
4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$
5. $(y + sen(y))y' = x + x^3$
6. $\frac{dv}{ds} = \frac{s+1}{sv+s}$
7. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}}$
8. $\frac{dy}{d\theta} = \frac{e^y sen^2(\theta)}{ysec(\theta)}$
9. $\frac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$
10. $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

Questão 10 *Encontre a solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada.*

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y(0) = -3$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{ln(x)}{xy}, \quad y(1) = 2$
3. $y' = \frac{xysen(x)}{y+1}, y(0) = 1$
4. $xln(x) = y(1 + \sqrt{3 + y^2})y', \quad y(1) = 1$
5. $\frac{dp}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$
6. $y'tg(x) = a + y, \quad y(\frac{\pi}{3} = a) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$
7. $\frac{dp}{dt} = kL^2ln(t), \quad L(1) = 1.$

Questão 11 *Suponha que uma substância sofre desintegração radioativa, sabe-se que a taxa de decaimento é proporcional a quantidade de substância em cada instante, se $y(t)$ representa a quantidade da substância no instante t, podemos expressar esta relação pela EDO $\frac{dy}{dt} = ky$, onde k é uma constante.*

a) *Resolva a EDO.*

b) *Deduza se a constante k é positiva ou negativa. E de uma interpretação para seu significado quimico no problema.*

c) *O* **tempo de meia vida** *denotado em quimica por $t_{\frac{1}{2}}$, é o tempo necessário para que uma a quantidade de uma substância diminua pela metade. Encontre $t_{\frac{1}{2}}$ em função de k.*

Questão 12 *Em uma reação química elementar, as moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto*

$$C : A + B \to C$$

A **Lei da Ação das Massas** *afirma que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações A e B:*

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]. \tag{0.1}$$

Então, se as concentrações iniciais forem $[A] = a\frac{mols}{L}$ e $[B] = b\frac{mols}{L}$ e escrevermos $x = [C]$, então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x). \tag{0.2}$$

a) *Supondo que $a \neq b$, encontre x como uma função de t. Use o fato de que a concentração inicial de C é 0.*

b) Encontre $x(t)$ assumindo que $a = b$. Como essa expressão para $x(t)$ é simplificada se soubermos que $[C] = \frac{1}{2}a$ depois de 20 segundos.

Questão 13 *Um tanque contem $1000L$ de agua salgada com $15kg$ de sal dissolvido. Àgua pura entra no tanque a uma taxa de $10\frac{L}{min}$. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque(a) apos t minutos e (b) apos 20 minutos?*

Questão 14 *Um barril com $2000L$ de cerveja contém 4% de alcool(por volume). Cerveja com 6% de alcool é bombeada para fora do barril á uma taxa de $20L/min$ e a mistura é bombeada para fora a mesma taxa. Qual a procentagem de alcool depois de uma hora?*

Questão 15 *O ar em uma sala com volume $180m^3$ contém $0,15\%$ de dioxido de carbono inicialmente. Ar mais fresco com apenas $0,05\%$ de dióxido de caborno entra na sala a uma taxa de $\frac{2m^3}{min}$ e o ar misturado sai na mesma taxa. Encontre a porcentagem de dioxido de carbono na sala como uma função do tempo. O que acontece a longo prazo?*

Questão 16 Problema dos N Corpos

Considere N corpos pontuais interagindo devido a força atração gravitacional. Suponha que os corpos possuem posições $S_j \in \mathbb{R}^3$ e respectivas massas m_j reais e positivas, $j = 1, \ldots, N$. Pela Lei da Gravitação de Newton a força de interação gravitacional entre dois corpos é diretamente proporcional as massas dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. A força agindo no i-ésimo corpo devido a presença do j-ésimo tem mesma direção e sentido que o vetor unitário

$$\frac{S_j - S_i}{\|S_j - S_i\|}. \tag{0.3}$$

Assim a força resultante no i-ésimo corpo devido a presença do demais é dada pela expressão

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} G.\frac{m_i m_j}{\|S_j - S_i\|^2}\frac{S_j - S_i}{\|S_j - S_i\|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} G.\frac{m_i m_j\,(S_j - S_i)}{\|S_j - S_i\|^3}, \tag{0.4}$$

Onde G é a constante de gravitacão universal.

Usando a Segunda Lei de Newton, escreva uma equação diferencial que modele o problema. A equação diferencial que rege esse sistema é conhecida como **Problema de N Corpos** *e foi resolvida por Newton para $N = 2$. No entanto para três ou mais corpos é muito difícil de resolver, e depois de mais de 300 anos do próprio Newton estabelecer este problema, ele permanece não resolvido. O próprio Newton tentando modelar o movimento da lua, usou um modelo com três corpos: Sol, Terra e Lua. E numa correspondência a um colega escreveu que "sua cabeça nunca doeu, só com com os estudos sobre a Lua."([4], página 27)*

"Estudos sobre atletas olímpicos, músicos de fama mundial e grandes mestres de xadrez constatam que o que eles têm em comum é a capacidade de motivarem-se para seguirem implacáveis rotinas de treino." ([1], pág. 102.)

Referências

[1] GOLEMAN, Daniel. Inteligência emocional: a teoria revolucionária que define o que é ser inteligente. Tradução de Marcos Santarrita. Editora Objetiva, Rio de Janeiro, 2012.

[2] STEWART, James. Cálculo. Volume 2. Tradução de Antonio Carlos Morretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2009.

[3] BOYCE,William E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Nona edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[4] MEYER, Keneth R.; HALL, Glen R.; OFFIN, Dan. *Introduction To Hamiltonian Dynamical Systems and The N-Body Problem.* Springer. Segunda Edição. Applied Mathematical Sciences Vol. 90. New York. 2009