Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Matemática - DM

Matemática-L2-2019.1 **Prof. Marcelo Pedro**

Lista 9 -Regra da Cadeia Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Questão 1 *A pressão P (em quilopascals), o volume V(em litros) e a temperatura T(em kelvins) de um mol de gás ideal estão relacionados por meio da formula $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é $300K$ e está aumentando com a taxa de $0,1K/s$ e o volume é $100L$ e está aumentando com a taxa de $0,2L/s$.*

Questão 2 *Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s\sin(t)$ determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$.*

Questão 3 *Utilize a Regra da Cadeia para detrminar $\frac{dz}{dt}$ ou $\frac{dw}{dt}$.*

a) $z = x^2y + xy^2$, $x = 2 + t^4$, $y = 1 - t^3$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$.

c) $z = \sin(x)\cos(y)$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$.

d) $w = xe^{\frac{y}{z}}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$.

e) $w = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, $x = \sin(t)$, $y = cos(t)$, $z = tg(t)$.

Questão 4 *Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial t}$ ou $\frac{\partial z}{\partial s}$.*

a) $z = x^2y^3$, $x = s\cos(t)$, $y = s\sin(t)$.

b) $z = \arcsin(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$.

c) $z = \sin(\theta)\cos(\phi)$, $\theta = st^2$, $\phi = s^2t$.

d) $z = e^{x+2y}$, $x = \frac{s}{t}$, $y = \frac{t}{s}$

Questão 5 *Determine a derivada direcional $\frac{d}{d\vec{u}}f(x,y)$ se $f = (x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\vec{u}$ é o vetor unitario dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Quanto será $\frac{d}{d\vec{u}}f(1,2)$*

Questão 6 *Calcule o vetor gradiente da função $f(x,y) = \sin(x) + e^{xy}$.*

Questão 7 *Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2,-1)$ na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.*

Questão 8 *Se $f(x,y,z) = x\sin(yz)$.*

a) Determine o gradiente de f.

b) Determine a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção de $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Questão 9 *Se $f(x, y) = xe^y$.*

a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P = (2, 0)$ na direção de P a $Q = (\frac{1}{2}, 2)$.

b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação.

Questão 10 *(Exercício Resolvido em sala)*

- *Se $f(x, y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P = (2, 0)$ na direção de P à $Q = (\frac{1}{2}, 2)$.*
- *Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a taxa de variação?*

Questão 11 *Determine a derivada direcional de f no ponto dado e a direção do vetor dado.*

1. *$f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$ no ponto $(3, 4)$ na direção do vetor $\vec{v} = (4, -3)$.*
2. *$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ no ponto $(2, 1)$ na direção do vetor $\vec{v} = (-1, 2)$.*
3. *$g(p, q) = p^4 - p^2q^3$ no ponto $(2, 1)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$.*
4. *$g(r, s) = arctg(rs)$ no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = 5\vec{i} + 10\vec{j}$.*
5. *$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$ no ponto $(0, 0, 0)$ na direção do vetor $\vec{v} = (5, 1, -2)$.*
6. *$f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ no ponto $(3, 2, 6)$ na direção do vetor $\vec{v} = (-1, -2, 2)$.*
7. *$g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{\frac{3}{2}}$ no ponto $(1, 1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$.*

Questão 12 *Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.*

1. *$f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ no ponto $(2, 4)$.*
2. *$f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$ no ponto $(0, 0)$.*
3. *$f(x, y) = \sin(xy)$ no ponto $(1, 0)$.*
4. *$f(x, y, z) = \frac{(x+y)}{z}$ no ponto $(1, 1, -1)$.*
5. *$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ no ponto $(3, 6, -2)$.*
6. *$f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z)$ no ponto $(-5, 1, 1)$*
7. *$f(P, V, T) = \frac{PV}{T}$ no ponto $(1, 1, 273)$*

``Tomando a matemática desde o inicio do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade. **Leibniz**([1],pág. 40.). ([1], pág. 12)

Referências

[1] BOYER, Carl B, revista por Uta C. Marzbach. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. Segunda Ediç ao. São Paulo: Edgard Blucher, 1996, 496p.

[2] STEWART, James. Cálculo. Volume 2. Tradução de Antonio Carlos Morretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Editora Cengage Learning, São Paulo, Setima edição 2013.