



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Rui de Andrade Lima**

**A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EM  
ABERTO NO ENSINO MÉDIO**

RECIFE  
2018





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Rui de Andrade Lima**

## **A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EM ABERTO NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

RECIFE

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

L732u      Lima, Rui de Andrade.  
              A utilização de problemas matemáticos em aberto no ensino médio /  
              Rui de Andrade Lima. – Recife, 2018.  
              182 f.: il.

              Orientador: Marcelo Pedro dos Santos.  
              Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
              Programa de Pós-Graduação em Profissional em Matemática em Rede  
              Nacional, Recife, BR-PE, 2018.  
              Inclui referências.

              1. Problemas em aberto 2. Teoria dos Números 3. Números primos  
              4. Combinatória 5. Geometria I. Santos, Marcelo Pedro dos, orient. II. Título

CDD 510

RUI DE ANDRADE LIMA

## **A Utilização de Problemas Matemáticos em Aberto no Ensino Médio**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos** (Orientador) – UFRPE

---

**Prof. Dr. Ernani Martins dos Santos** – UPE

---

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva** – PROFMAT/UFRPE



# AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais pela formação humana.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oportunidade de voltar a estudar.

Aos colégios que fui ou sou professor pela formação profissional.

A minha esposa Kellen pela compreensão, companheirismo e incentivo.

As minhas filhas Clarinha e Lulu por se privarem de momentos familiares para a conclusão deste trabalho. Às pessoas que fizeram a diferença em minha vida pessoal e são responsáveis por essa conquista de alguma forma e não poderia deixar de agradecê-las. Então, agradeço pelo apoio e incentivo nas dificuldades ao meu irmão Ivan, aos meus tios e padrinhos Jairo e Valdecira, a minha tia Aita, aos amigos irmãos João Lins e Dani Viana, ao amigo Paulo André Rabelo e ao companheiro Gildo Passos (*in memoriam*).

Aos professores de matemática André Costa, Celso Mendonça, Cláudio Thor, Eduardo Belo, Guilherme Neves, Raul Duarte, Tiago Guimarães e Valdemar Santos pela parceria profissional e ao amigo matemático Josué Macário por me confiar seus materiais e pelas discussões de questões a distância.

A todos os professores do mestrado Profmat da UFRPE, em especial ao professor e orientador Marcelo Pedro e a coordenadora professora Bárbara pela dedicação e disponibilidade.

A todos os colegas do Profmat, em especial ao amigo Gustavo Duarte parceiro de estudos.

A todos os alunos que tive, pois são a principal razão da produção desse trabalho.





*Dedico às minhas filhas, Clarinha e Lulu,  
por serem a razão do meu viver.*



*"Feliz aquele que transfere o que sabe  
e aprende o que ensina."  
Cora Coralina*



# DECLARAÇÃO

Eu, **Rui de Andrade Lima** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **A Utilização de Problemas Matemáticos em Aberto no Ensino Médio**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Marcelo Pedro dos Santos**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 14 de abril de 2018.

Assinatura: \_\_\_\_\_



# RESUMO

Em matemática um problema em aberto é uma questão não resolvida. Esse trabalho visa apontar a importância da utilização de problemas matemáticos em aberto no ensino médio, quebrando a concepção de estudantes deste nível escolar de que todos os problemas matemáticos têm solução. A utilização de problemas em aberto incentiva o uso de atividades investigativas fundamentais para a construção do conhecimento, mas está ausente no ambiente escolar, acarretando prejuízos na formação dos estudantes. Assim, realizamos uma pesquisa de problemas matemáticos em aberto acessíveis ao estudante do ensino médio com desenvolvimento de conteúdos necessários à compreensão dos problemas pesquisados, abrangendo a Teoria dos Números com o Princípio da Indução Matemática e vários resultados sobre números primos, a Análise Combinatória com tópicos sobre Superpermutações mínimas, quadrados mágicos, diagramas e jogos e a Geometria com problemas de encontrar pontos com distâncias racionais aos vértices de um polígono regular, o problema de Fagnano e problemas de empacotamento. O trabalho apresenta três sugestões de atividades que relacionam conteúdos matemáticos do ensino médio com problemas em aberto, para professores utilizarem em sala de aula. A primeira atividade propõe inserir o Princípio da Indução Matemática no ensino médio através da busca de uma expressão para o número de diagonais de um polígono convexo e de problemas relacionados à sequência de Fibonacci, a segunda atividade trabalha as propriedades das progressões aritméticas através de quadrados mágicos e a terceira atividade aplica conceitos de geometria a um problema de empacotamento. A pesquisa apresenta uma seleção de questões que citam problemas matemáticos em aberto que pode servir como fonte de consulta para professores ou como lista de exercícios para o aluno que quer se aprofundar em matemática.

**Palavras-chave:** Problemas em aberto. Teoria dos Números. Números primos. Combinatória. Geometria.





# ABSTRACT

In math an open problem is an unresolved question. This research aims to show out the importance of using open problems in teaching mathematics to high school students, breaking the conception of students of this school level that all mathematical problems have a solution. The use of open problems encourages the use of investigative activities that are fundamental for the construction of knowledge, but it is absent in the school environment, causing losses in the training of students. Thus, we performed a research of open mathematical problems accessible to the high school student with the development of contents necessary to understand the problems researched, including Number Theory with the Principle of Mathematical Induction and several results on prime numbers, Combinatorial Analysis with topics on minimal superpermutations, magic squares, diagrams and games, and Geometry with problems of finding points with rational distances to the vertices of a regular polygon, the Fagnano's problem and packaging problems. The present study presents three suggestions of activities that relate mathematic contents of high school with open problems for teachers to use in the classroom. The first activity proposes to insert the Principle of Mathematical Induction in high school through the search for an expression for the number of diagonals of a convex polygon and problems related to the Fibonacci sequence, the second activity works the properties of arithmetic progressions through magic squares and the third activity applies geometry concepts to a packaging problem. The research presents a selection of questions that cite open mathematical problems that can serve as a source of inquiry for teachers or as a list of exercises for the student who wants to delve into math.

**Keywords:** Open problems. Number Theory. Prime numbers. Combinatory. Geometry.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Órbita do número 3 na conjectura de Collatz . . . . .	22
Figura 2 – Espiral de Ulam . . . . .	47
Figura 3 – Números primos na espiral de Ulam . . . . .	47
Figura 4 – Espiral de Ulam 200x200 com primos na cor preta . . . . .	48
Figura 5 – Espiral de Ulam centrada no número 41 . . . . .	48
Figura 6 – Números de Fibonacci no triângulo de Pascal . . . . .	73
Figura 7 – Quadrado mágico de ordem 3 com $k = 36$ . . . . .	75
Figura 8 – Quadrado mágico de ordem 3 com $k = 15$ . . . . .	75
Figura 9 – Quadrado mágico de ordem 3 genérico . . . . .	76
Figura 10 – Cantos do quadrado mágico de ordem 3 . . . . .	76
Figura 11 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9 . . . . .	77
Figura 12 – Quadrado mágico de Euler de quadrados perfeitos de ordem 4 . . . . .	78
Figura 13 – Quadrado de quadrados perfeitos de Lee Sallows de ordem 3 . . . . .	78
Figura 14 – Quadrado mágico de Euler de ordem 3 . . . . .	78
Figura 15 – Quadrado mágico de números primos de Sayles . . . . .	79
Figura 16 – Quadrado mágico de ordem 3 de números em PA . . . . .	79
Figura 17 – Quadrado mágico de ordem 3 de números primos em PA . . . . .	79
Figura 18 – Diagrama de Venn para 3 conjuntos . . . . .	81
Figura 19 – Diagramas de Venn para 2 conjuntos . . . . .	81
Figura 20 – Falsa representação para 4 conjuntos . . . . .	82
Figura 21 – Região convexa . . . . .	82
Figura 22 – Diagramas de Venn para 4, 5 ou 6 conjuntos . . . . .	83
Figura 23 – Diagramas de Venn para 4 conjuntos com triângulos . . . . .	83
Figura 24 – Diagramas de Venn para 6 conjuntos com triângulos . . . . .	84
Figura 25 – Torre de Hanoi de 3 pinos . . . . .	85
Figura 26 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 1 . . . . .	85
Figura 27 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 2 . . . . .	85
Figura 28 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 3 . . . . .	85
Figura 29 – Torre de Hanoi de 4 pinos . . . . .	87
Figura 30 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 1 . . . . .	87
Figura 31 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 2 . . . . .	87
Figura 32 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 3 . . . . .	87
Figura 33 – Cubos de Langford com 3 pares . . . . .	88
Figura 34 – Cubos de Langford com 4 pares . . . . .	88

Figura 35	– Soluções do problema das 8 rainhas . . . . .	91
Figura 36	– Classificação de um triângulo quanto aos ângulos . . . . .	98
Figura 37	– Ponto médio de um segmento . . . . .	99
Figura 38	– Retas perpendiculares . . . . .	100
Figura 39	– Cevianas do vértice C de um triângulo . . . . .	100
Figura 40	– Mediana de um triângulo . . . . .	101
Figura 41	– Altura de um triângulo . . . . .	101
Figura 42	– Bissetriz interna de um triângulo . . . . .	102
Figura 43	– Triângulo retângulo com lados $a, b$ e $c$ . . . . .	102
Figura 44	– Demonstração do teorema de Pitágoras . . . . .	102
Figura 45	– A fórmula de Herão . . . . .	106
Figura 46	– A lei dos cossenos . . . . .	109
Figura 47	– Relação de Stewart . . . . .	109
Figura 48	– Triângulo com lados divididos na mesma razão $k$ . . . . .	110
Figura 49	– Medida de uma mediana de um triângulo . . . . .	111
Figura 50	– O problema de Fagnano . . . . .	112
Figura 51	– Parte 1 da resolução da problema de Fagnano . . . . .	112
Figura 52	– Parte 2 da resolução da problema de Fagnano . . . . .	113
Figura 53	– Reflexão de uma partícula num bilhar triangular . . . . .	113
Figura 54	– Ponto no interior de um triângulo equilátero . . . . .	114
Figura 55	– Ponto no interior de um triângulo equilátero - Resolução . . . . .	115
Figura 56	– Ponto no interior do triângulo equilátero de lado 112 . . . . .	116
Figura 57	– Ponto no interior de um quadrado . . . . .	116
Figura 58	– Quadrado de lado $n$ num sistema cartesiano . . . . .	117
Figura 59	– Tijolo de Euler . . . . .	119
Figura 60	– Empacotamento com 3 círculos na forma linear . . . . .	120
Figura 61	– Empacotamento com 3 círculos na forma triangular . . . . .	121
Figura 62	– Empacotamento com 4 círculos na forma linear . . . . .	121
Figura 63	– Empacotamento com 4 círculos na forma quadrada . . . . .	122
Figura 64	– Empacotamento com 4 círculos na forma de losango . . . . .	122
Figura 65	– Empacotamento do plano com círculos . . . . .	123
Figura 66	– Triângulo equilátero empacotando de 1 a 15 círculos . . . . .	124
Figura 67	– Ladrilhamento do plano com polígonos regulares . . . . .	125
Figura 68	– Empacotamento do plano com heptágono regulares . . . . .	126
Figura 69	– Embalagem para 7 círculos na forma linear . . . . .	126
Figura 70	– Embalagem para 7 círculos na forma hexagonal . . . . .	127
Figura 71	– Embalagem de 7 esferas na forma linear . . . . .	127
Figura 72	– Embalagem de 7 esferas na forma hexagonal . . . . .	128
Figura 73	– Arranjo cúbico de face centrada . . . . .	129

Figura 74	–Parte de um arranjo cúbico de face centrada . . . . .	129
Figura 75	–Arranjo hexagonal compacto . . . . .	130
Figura 76	–Quatro esferas tangentes duas a duas . . . . .	130
Figura 77	–Poliedros regulares . . . . .	131
Figura 78	–Preenchimento espacial com cubos . . . . .	131
Figura 79	–Tetraedro regular . . . . .	132
Figura 80	–Combinação de 5 tetraedros regulares . . . . .	133
Figura 81	–Preenchimento espacial com tetraedros e octaedros regulares . . . . .	133
Figura 82	–Problema do número de formas de beijar . . . . .	134
Figura 83	–Quadratura de um quadrado de lado 112 . . . . .	135
Figura 84	–Polígonos com 3, 4, 5, 6 ou 7 lados . . . . .	138
Figura 85	–Polígonos com $k + 1$ lados . . . . .	139
Figura 86	–Torre de Hanoi com 1 disco . . . . .	140
Figura 87	–Torre de Hanoi com $k + 1$ discos . . . . .	140
Figura 88	–Torre de Hanoi restrita - movimento 1 . . . . .	140
Figura 89	–Torre de Hanoi restrita - movimento 2 . . . . .	141
Figura 90	–Torre de Hanoi restrita - movimento 3 . . . . .	141
Figura 91	–Torre de Hanoi restrita - movimento 4 . . . . .	141
Figura 92	–Torre de Hanoi restrita - movimento 5 . . . . .	141
Figura 93	–Diagonais de uma matriz quadrada . . . . .	149
Figura 94	–Quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9 . . . . .	149
Figura 95	–Quadrado mágico de ordem 3 numerado de $a+1$ a $a+9$ . . . . .	150
Figura 96	–Quadrado mágico de ordem 3 numerado de $r$ a $9r$ . . . . .	150
Figura 97	–Quadrado mágico de ordem 3 numerado de $a + r$ a $a + 9r$ . . . . .	151
Figura 98	–Quadrados mágicos pitagóricos . . . . .	152



# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Período de Pisano . . . . .	28
Tabela 2 – Sucessor do produto de números primos . . . . .	35
Tabela 3 – Conjectura de Goldbach . . . . .	49
Tabela 4 – Conjectura fraca de Goldbach . . . . .	49
Tabela 5 – Conjecturas forte e fraca de Goldbach . . . . .	50
Tabela 6 – Números perfeitos . . . . .	59
Tabela 7 – Conjectura de Lemoine . . . . .	62
Tabela 8 – Conjectura de Beal . . . . .	63
Tabela 9 – Comprimento das superpermutações mínimas . . . . .	69
Tabela 10 – Arranjos de Langford para 7 pares . . . . .	89
Tabela 11 – Triplas pitagóricas . . . . .	105
Tabela 12 – Número de diagonais de um polígono convexo . . . . .	138
Tabela 13 – Quadrado mágico de ordem 4 com números em $PA$ . . . . .	151





# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BBC	Emissora pública de rádio e televisão do Reino Unido
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
OBF	Olimpíada Brasileira de Física
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OPEMAT	Olimpíada Pernambucana de Matemática
OPM	Olimpíada Paulista de Matemática
Profmat	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PUCPR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UFTM	Universidade Federal do Triângulo Mineiro
UNB	Universidade de Brasília
UNESP	Universidade Estadual Paulista
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas
UPE	Universidade de Pernambuco



# LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\subset$	Está contido
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\approx$	Aproximadamente
$>$	Maior
$<$	Menor
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$\sqrt{x}$	Raiz quadrada de $x$
$\sqrt[n]{x}$	Raiz n-ésima de $x$
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não-nulos
$\forall$	Qualquer que seja
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$ x $	Módulo ou valor absoluto de $x$
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftarrow$	Recíproca
$(x, y)$	Ponto do plano cartesiano com coordenadas $x$ e $y$
$\sphericalangle ABC$	Ângulo $\widehat{ABC}$
$\text{sen}(x)$	Seno do ângulo $x$
$\text{cos}(x)$	Cosseno do ângulo $x$
■	Como queríamos demonstrar



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>PROBLEMAS EM ABERTO DE TEORIA DOS NÚMEROS</b>	<b>25</b>
2.1	A Caracterização dos Números Naturais	25
2.1.1	Princípio de Indução Matemática	26
2.2	Os Números Primos	29
2.2.1	O Teorema Fundamental da Aritmética	31
2.2.2	O crivo de Eratóstenes	33
2.2.3	A infinitude dos números primos	35
2.3	Números Primos em Progressão Aritmética	36
2.4	Números Primos Gêmeos	40
2.5	Fórmulas que Geram Números Primos	42
2.6	A Espiral de Ulam	47
2.7	A Conjectura de Goldbach	49
2.7.1	Outros resultados	50
2.8	Primos Palíndromos	51
2.9	Números Perfeitos	56
2.10	Os Números Primos de Sophie Germain	59
2.11	Outros Problemas em Aberto sobre Números Primos	60
<b>3</b>	<b>PROBLEMAS EM ABERTO DE COMBINATÓRIA</b>	<b>65</b>
3.1	O Problema da Superpermutação Mínima	65
3.2	Números Binomiais e o Triângulo de Pascal	69
3.3	Quadrados Mágicos	74
3.3.1	Quadrados mágicos de quadrados perfeitos	77
3.3.2	Quadrados mágicos de números primos	79
3.4	Operações entre Conjuntos	80
3.4.1	O Diagrama de Venn	81
3.5	A Torre de Hanoi	85
3.6	Os Cubos de Langford	88
3.7	O Problema das Rainhas	91
3.8	As Frações Egípcias	92
3.9	A Sequência de Kolakoski	94
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS EM ABERTO DE GEOMETRIA</b>	<b>97</b>
4.1	Triângulos	97

4.2	A Fórmula de Herão . . . . .	106
4.3	Pontos com Distâncias Racionais aos Vértices de um Polígono . . . . .	114
4.4	O Tijolo de Euler . . . . .	119
4.5	Problemas de Empacotamento . . . . .	120
4.5.1	O empacotamento de círculos . . . . .	120
4.5.2	A Conjectura da Salsicha . . . . .	126
4.5.3	O empacotamento de esferas . . . . .	128
4.5.4	Poliedros . . . . .	131
4.6	Divisão do Quadrado . . . . .	135
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES EM SALA DE AULA . . . . .</b>	<b>137</b>
5.1	Princípio da Indução Matemática . . . . .	137
5.2	Quadrados Mágicos e Progressões Aritméticas . . . . .	147
5.3	Empacotamento de Latas . . . . .	156
5.4	Questões que Citam Problemas em Aberto . . . . .	162
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>177</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apontar a importância da utilização de problemas matemáticos em aberto no ensino médio, quebrando a concepção de alunos dos ensinos básico e médio de que todos os problemas matemáticos têm solução, desenvolvendo no aluno o poder de duvidar, fundamental na formação do pensamento crítico, promovendo a investigação matemática e aproximando a matemática ensinada nas escolas de ensino médio das pesquisas feitas nos centros universitários. Sobre a importância da pesquisa matemática D'Ambrosio destaca que:

Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; conseqüentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância. (D'AMBROSIO, 1993, p. 36).

**Definição 1:** *Um problema matemático em aberto é uma questão não resolvida, ou seja, uma questão em que a solução não foi encontrada ou não se provou que a questão não tem solução.*

Os problemas em aberto podem despertar o interesse do aluno pela investigação matemática, pois existem problemas que são fáceis de enunciar, mas cujas soluções ainda não foram encontradas e que despertam um fascínio especial. Um problema desse tipo é a conjectura de Collatz (1910-1990) ou Problema  $3n + 1$  cujo enunciado é:

**Problema em Aberto 1 (Conjectura de Collatz):** *Dado um número natural,  $n$ , e a sequência que segue a seguinte lei de formação:*

$$\begin{cases} i) \text{ se } n \text{ for par, o próximo termo na sequência será } \frac{n}{2}; \\ ii) \text{ se } n \text{ for ímpar, o próximo termo será igual a } 3n + 1. \end{cases}$$

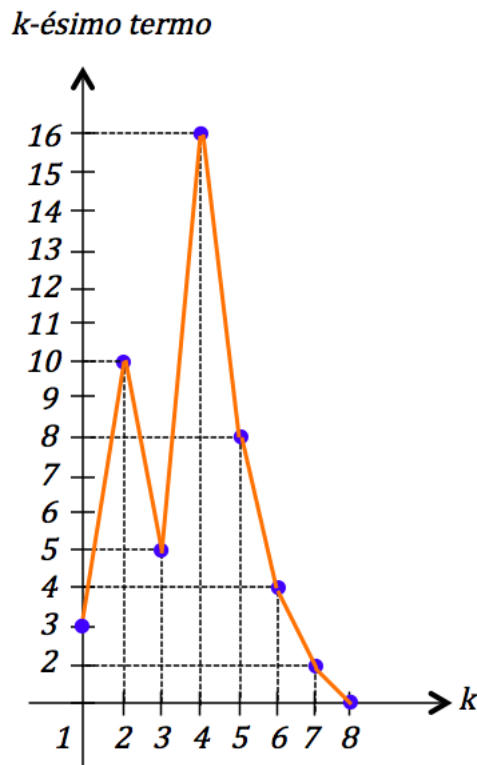
*Esta sequência termina sempre em 1?*

Por exemplo, começando com o número 3, obtém-se:

$$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

**Definição 2:** Chama-se de **órbita** do número  $n$  a sequência de números gerada através deste processo até chegar a 1.

Figura 1 – Órbita do número 3 na conjectura de Collatz



Fonte: Elaborada pelo autor

A conjectura de Collatz é um problema matemático em aberto com enunciado acessível ao estudante da educação básica e já testado para milhares de números com uso de supercomputadores sempre terminando em 1, mas matematicamente ainda não foi provado.

Acredita-se que a solução da conjectura de Collatz abrirá novos caminhos para a matemática e o seu poder em motivar alunos à pesquisa matemática pode ser constatado nas palavras do matemático Derek Jennings

outra razão é que, por ser fácil de apresentar e entender, tem potencial de atrair jovens para a matemática. Eu mesmo soube de sua existência no ensino médio e não resisti ao seu encanto (BBC BRASIL, 2016).

Para uma abordagem mais completa da Conjectura de Collatz o leitor pode consultar o trabalho *The  $3n+1$  conjecture* de Laarhoven (2009).



---

O uso de problemas em aberto no ensino da matemática é fundamental para criar um ambiente interativo entre o aluno e o professor e proporcionar o aprendizado através da investigação, permitindo a construção de um conhecimento mais sólido. Assim, é contraditório o professor de matemática não apresentar problemas em aberto aos seus alunos, como destaca Sacristán

Penso que o mais importante é a dicotomia entre as atividades de ensinar e aprender, introduzida artificialmente por uma prática escolar inadequada. O pesquisador /professor aprende principalmente investigando, mas, no momento em que entra na sala de aula, esquece que o estudante, para aprender, precisa investigar. Assim separa as duas atividades, pois não percebeu que são interligadas, ou por que não se interessa em aprender a utilizar métodos adequados para conectá-las. Outros motivos também se fazem presentes, como a ideia de que a investigação é reservada a um grupo especial de pessoas, assim como a ideia de que a descoberta só é importante quando alguém a faz pela primeira vez conforme os registros acadêmicos. Ocorre também, por parte dos professores, o receio de se depararem, durante a aula, com problemas cuja resposta não conhecem de imediato. Com essa concepção se perde a motivação pedagógica da descoberta e se reduz o ensino à transmissão do produto histórico da investigação, perdendo-se o valor da compreensão do processo de produção desse conhecimento (SACRISTÁN, 1998, p. 60).

A matemática não pode ser entendida ou apresentada ao aluno como uma disciplina que já está pronta e deve ser aprendida e estudada, desqualificando-a como ciência e sim mostrar o seu caráter investigativo para solidificar o conhecimento. Neste sentido, Siegel e Borasi (1994, p. 205) indicam algumas consequências do conhecimento através da investigação:

o conhecimento matemático é falível; o conhecimento matemático é criado através de um processo não-linear no qual a geração de hipóteses tem um papel chave; a produção do conhecimento matemático é um processo social que ocorre com a comunidade de prática; e o valor verdadeiro do conhecimento matemático é construído através de práticas retóricas.

Percebemos, então, que o uso de problemas em aberto valoriza a construção do conhecimento promovendo a investigação que possibilita ao aluno aprender matemática numa dinâmica que permita reflexões e descobertas.

Apesar do uso de atividades investigativas se mostrar fundamental para o aprendizado em matemática, está ausente no cotidiano escolar da educação básica, o que não acontece no ensino superior com os projetos de iniciação científica que incentivam os estudantes de graduação à pesquisa. Assim, o propósito deste trabalho se concentra na investigação de problemas matemáticos em aberto e na formulação de estratégias para apresentá-los aos alunos do ensino médio.



## 2 PROBLEMAS EM ABERTO DE TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo, discutiremos sobre a Teoria dos Números e, especificamente, sobre os números primos, apresentando problemas em aberto com enunciados de fácil compreensão para um estudante do ensino médio. Alguns termos básicos foram suprimidos por serem usuais aos estudantes deste nível, e para uma abordagem completa o leitor pode consultar o livro *Aritmética* de Hefez (2016).

Os números primos guardam muitos segredos e mistérios que podem estimular o estudante da educação básica a refletir sobre a Teoria dos Números e suas aplicações, estimulando o pensamento crítico e a construção de ideias que fomentem a pesquisa e, conseqüentemente, estimule o aluno a aprender matemática, como destaca Abramo Hefez

Esses números desempenham papel fundamental e a eles estão associados muitos problemas famosos cujas soluções têm resistido aos esforços de várias gerações de matemáticos (HEFEZ, 2016, p.122)

Existem problemas aparentemente simples e fundamentais sobre os números primos que têm permanecido sem resposta como as conjecturas de Goldbach e a dos Primos Gêmeos. Por isso, os alunos e professores de matemática da educação básica não podem deixar de lado o conhecimento sobre estes problemas.

### 2.1 A Caracterização dos Números Naturais

Nesta seção, tendo como referência a abordagem de Lima et al. (1997, p. 29-31), iremos mostrar a construção dos números naturais  $\mathbb{N}$ , de forma axiomática, ou seja, a partir de uma lista de fatos descritos como axiomas podem ser deduzidos teoremas.

A origem e o conceito de número ocorreram simultaneamente com o nascimento e desenvolvimento da matemática e foram as exigências matemáticas e as necessidades do ser humano que alavancaram o desenvolvimento deste conceito.

No desenvolvimento deste trabalho iremos considerar  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  o conjunto dos números naturais e  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  o conjunto dos números inteiros formado pelos naturais, seus opostos negativos e o zero.

Os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... surgiram como uma escala padrão que nos permite a operação de contagem e a sua totalidade o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

foi formalizada por Giuseppe Peano (1858-1932) a partir dos seguintes axiomas:

- i. Todo número natural tem um único sucessor;
- ii. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- iii. Existe um único natural chamado de um e denotado por 1, que não é sucessor de nenhum número natural;
- iv. Seja  $X$  é um conjunto de números naturais. Se 1 é elemento de  $X$  e o sucessor de todo elemento de  $X$  é elemento de  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Os fatos acima são conhecidos como Axiomas de Peano. O axioma iv), chamado de axioma da indução, serve como método de demonstração para proposições referentes aos números naturais como veremos a seguir:

### 2.1.1 Princípio de Indução Matemática

A abordagem desta subseção pode ser encontrada em notas de *Indução matemática* de Hefez (2009).

**Definição 3:** *Uma sentença matemática  $P(n)$  que dependa de uma variável natural  $n$  é dita **aberta sobre o conjunto dos naturais** se possui valor lógico verdadeiro ou falso quando substituirmos  $n$  por um número natural dado qualquer.*

Por exemplo, considere

$$P(n): n \text{ é par,}$$

temos  $P(1)$  é falsa, pois 1 é ímpar e  $P(2)$  é verdadeira, visto que 2 é par.

O axioma de indução pode ser enunciado usando uma sentença matemática aberta da seguinte maneira:

**Princípio de Indução Matemática:** Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre  $\mathbb{N}$ . Suponha que

- i.  $P(a)$  é verdadeira para algum  $a$  natural; e
- ii. qualquer que seja  $k$  natural,  $k \geq a$ , sempre que  $P(k)$  é verdadeira, segue que  $P(k + 1)$  é verdadeira.

Então,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n$  natural maior ou igual a  $a$ .

Como ilustração, observemos o seguinte exemplo:

**Exemplo 1:** *Vamos mostrar que a soma  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  dos  $n$  primeiros números naturais é dada por*

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Considerando a sentença  $P(n): 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  sobre os números naturais, note que  $P(1)$  é verdadeira, pois  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ . Supondo que, para algum  $k$  natural,  $P(k)$  é verdadeira, ou seja,

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ "somando } k+1 \text{ a ambos os membros"}$$

$$1 + 2 + \dots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$1 + 2 + \dots + k + k + 1 = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$1 + 2 + \dots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

A última igualdade mostra que  $P(k+1)$  é verdadeira. Assim,  $P(n)$  é verdadeira para todo natural  $n$ .

Em determinadas situações, ao fazer uma demonstração por indução, na passagem de  $k$  para  $k+1$ , sente-se a necessidade de admitir que a proposição é válida não apenas para  $k$  mas para todos os números naturais menores ou iguais a  $k$ . A justificativa de um raciocínio deste tipo se encontra no Segundo Princípio da Indução Matemática, conforme é apresentado a seguir:

**Segundo Princípio de Indução Matemática:** Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre  $\mathbb{N}$ . Suponha que

- i.  $P(a)$  é verdadeira para algum  $a$  natural; e
- ii. qualquer que seja  $k$  natural,  $k \geq a$ ,  $P(a)$  e  $P(a+1)$  e  $\dots$  e  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$  é verdadeira.

Então,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n$  natural maior ou igual a  $a$ .

Uma aplicação do segundo Princípio da Indução Matemática é provar que na sequência  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ , conhecida como a sequência de Fibonacci (1170-1250), qualquer termo na posição  $n$  é menor que  $\left(\frac{7}{4}\right)^n$ , para qualquer  $n$  natural.

Na sequência de Fibonacci os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo, a partir do terceiro, é soma dos dois imediatamente anteriores. Assim, podemos defini-la, recursivamente, da seguinte maneira:

Seja  $F_n$  uma sequência de números naturais tal que

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ se } n \text{ natural e } n > 2 \end{cases}$$

Considerando a proposição  $P(n) : F_n < (\frac{7}{4})^n$  sobre os números naturais  $n$ , observe que  $P(1)$  e  $P(2)$  são verdadeiras, pois  $F_1 = 1 < \frac{7}{4}$  e  $F_2 = 1 < (\frac{7}{4})^2$ . Seja  $n > 2$ , vamos supor que  $P(i) : F_i < (\frac{7}{4})^i$  é verdadeira para todo natural  $i$  tal que  $1 \leq i \leq k$ . Assim,

$$F_{k+1} = F_{k-1} + F_k < (\frac{7}{4})^{(k-1)} + (\frac{7}{4})^k = (\frac{7}{4})^k \cdot (\frac{7}{4})^{-1} + (\frac{7}{4})^k = (\frac{7}{4})^k \cdot (\frac{4}{7} + 1) < (\frac{7}{4})^k \cdot \frac{7}{4} = (\frac{7}{4})^{k+1}.$$

Em outras palavras, mostramos que se a proposição  $P(i)$  é válida para todos os valores naturais menores ou iguais a  $k$ , então  $P(k+1)$  é válida. Logo, pelo Segundo Princípio da Indução Matemática, a proposição  $P(n)$  é válida para todo natural  $n$ .

Considerando a sequência de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

e encontrando os restos da divisão dos termos desta sequência por 2, obtemos uma sequência que se repete a cada três termos, ou seja, periódica de período 3

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, ...

O período desta sequência é chamado de período de Pisano.

Se encontrarmos os restos da divisão dos termos da sequência de Fibonacci por 3, encontramos a sequência

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, ...

que tem período de Pisano 8.

Em geral, o período de Pisano é o período que a sequência dos restos das divisões dos termos da sequência de Fibonacci por um natural  $n$  com o qual se repete.

Tabela 1 – Período de Pisano

$n$	parte periódica	período de Pisano
1	0	1
2	011	3
3	01120221	8
4	011231	6
5	01123033140443202241	20
6	011235213415055431453251	24

Fonte: elaborada pelo autor

Apesar de trabalhoso, não é difícil encontrar a sequência dos restos das divisões dos termos da sequência de Fibonacci por  $n$ , mas, sobre o Período de Pisano, a seguinte questão encontra-se não resolvida:

**Problema em Aberto 2:** *Encontrar uma fórmula geral para o período de Pisano em termos de  $n$ .*

Resultados parciais deste problema podem ser encontrados no trabalho *The Fibonacci Sequence Under Various Moduli* de Renault (1996, p. 17-34).

## 2.2 Os Números Primos

Nesta seção, trabalharemos com os números primos, conceituando-os e provando a sua infinitude. Algumas definições, teoremas e demonstrações foram extraídos do livro *Elementos de Aritmética* de Hefez (2006).

Entre os números naturais existem números que funcionam como blocos básicos que permitem a construção de todos os números naturais maiores que 1 pela multiplicação, ou seja, existem números primitivos que não podem ser gerados pela multiplicação de outros números, como 2, 3 e 5 e outros números secundários gerados a partir da multiplicação de números primitivos, como o  $6 = 2 \cdot 3$  e o  $10 = 2 \cdot 5$ .

Os números primos são conhecidos pela humanidade há muito tempo e sobre os primeiros trabalhos com estes números Jucimar Peruzzo menciona

Há indícios de que também no antigo Egito já se tinha algum conhecimento sobre este tipo de números. No entanto, os registros mais antigos de um estudo sobre números primos deve-se aos gregos (PERUZZO, 2008, p. 19).

**Definição 4:** *Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , diremos que  $b$  **divide**  $a$ , denotado por  $b \mid a$ , se existir  $k$  natural tal que  $a = kb$ . Nesse caso, diremos também que  $a$  é **múltiplo** de  $b$  ou  $b$  é **divisor** de  $a$ .*

Por exemplo, 4 é divisor de 20, pois  $20 = 5 \cdot 4$ .

**Teorema 1 (Divisão Euclidiana):** *Sejam  $a$  e  $b$  inteiros com  $b \neq 0$ . Existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que  $a = bq + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro *Elementos de Aritmética* de Hefez (2006, p. 35-36).

Por exemplo, o quociente e o resto da divisão de 17 por 3 são, respectivamente, 5 e 2, pois  $17 = 3 \cdot 5 + 2$  e a divisão de -19 por 5 tem quociente -4 e resto 1, pois  $-19 = 5 \cdot (-4) + 1$ .

Quando dividimos um número inteiro  $a$  por 2, temos  $a = 2k + r$  com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $r = 0$  ou 1.

- Se  $r = 0$ , então  $a = 2k$  e  $a$  é **par**;
- Se  $r = 1$ , então  $a = 2k + 1$  e  $a$  é **ímpar**.

Classificar um número inteiro em par ou ímpar é classificá-lo quanto à paridade.

**Definição 5:** Um número natural  $d$  é dito **divisor comum** de  $a$  e  $b$  se  $d|a$  e  $d|b$ .

Por exemplo, 4 é divisor comum de 12 e 32.

**Definição 6:** O número natural  $d$  é o **maior divisor comum** ( $mdc$ ) de  $a$  e  $b$  naturais, se possui as seguintes propriedades:

- i.  $d$  é divisor comum de  $a$  e  $b$ ; e
- ii. se  $c$  é divisor comum de  $a$  e  $b$ , então  $c|d$ .

Por exemplo, o  $mdc(12, 18) = 6$ . Para provar a existência do maior divisor comum entre dois números inteiros não-negativos, Euclides (330 a.C - 285 a.C.) utilizou o seguinte resultado:

**Lema 1 (Lema de Euclides para o mdc):** Sejam  $a, b$  e  $n$  números inteiros. Se existe  $mdc(a, b - an)$ , então

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - an).$$

**Demonstração:** Sendo  $d = mdc(a, b - an)$ , então  $d|a$  e  $d|(b - an)$ , mas  $b = b - an + an$ , segue que  $d|b$ . Logo,  $d$  é divisor comum de  $a$  e  $b$ . Se existe  $c$  divisor comum de  $a$  e  $b$ , então  $c|a$  e  $c|(b - an)$ . Assim,  $c|d$  e  $d = mdc(a, b)$ . ■

**Exemplo 2:** Vamos calcular o  $mdc(162, 372)$ .

Pela divisão Euclidiana,  $372 = 162 \cdot 2 + 48$  e pelo Lema de Euclides

$$mdc(162, 372) = mdc(162, 372 - 162 \cdot 2) = mdc(162, 48).$$

Repetindo o mesmo procedimento,  $162 = 48 \cdot 3 + 18$  e

$$mdc(162, 48) = mdc(162 - 48 \cdot 3, 48) = mdc(18, 48),$$

mais uma vez,  $48 = 18 \cdot 2 + 12$  e

$$mdc(18, 48) = mdc(18, 48 - 18 \cdot 2) = mdc(18, 12) = 6.$$

O procedimento acima é conhecido como *Algoritmo de Euclides*, podendo ser sistematizado e repetido até encontrarmos uma divisão que deixe resto zero.

**Definição 7:** Um número natural  $p$  maior que 1 é **primo** se possui como divisores apenas 1 e ele próprio, ou seja, 1 e  $p$ .

Por exemplo, 5 é primo.



**Definição 8:** Um número natural  $n$  maior que 1 que não é primo é dito **composto** e pode ser expresso como produto de dois naturais  $n_1$  e  $n_2$  tais que  $1 < n_1, n_2 < n$ , ou seja,  $n = n_1 n_2$ .

Por exemplo, 12 é composto, pois  $12 = 4 \cdot 3$ .

**Definição 9:** Dois números naturais  $a$  e  $b$  são ditos **primos entre si** ou **co-primos** se possuem apenas o número 1 como divisor comum. Por exemplo, 9 e 14.

Note que segue da definição de máximo divisor comum que se os números naturais  $a$  e  $b$  são primos entre si, então  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

### 2.2.1 O Teorema Fundamental da Aritmética

Nesta subseção, abordaremos um dos principais teoremas da Teoria dos Números que garante que um número natural maior que 1 pode ser escrito como produto de números primos. Por exemplo, 2100 é escrito de maneira única, a menos pela ordem dos fatores, como  $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ .

**Lema 2 (Lema de Euclides):** Sejam  $a, b, p$  números inteiros com  $p$  primo. Se  $p|ab$ , então  $p|a$  ou  $p|b$ .

**Corolário 1:** Se  $p, p_1, p_2, \dots, p_n$  são primos e, se  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ , então  $p = p_i$  para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Demonstração:** Usando indução, a proposição é verdadeira para  $n = 1$ , pois se  $p_1|p$  então  $p_1 = p$ . Supondo que  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , então  $p = p_i$  para algum  $i = 1, 2, \dots, k$ , mas se  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \cdot p_{k+1}$ , então, pelo **Lema de Euclides**,  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$  ou  $p|p_{k+1}$ . Observe que se  $p|p_{k+1}$ , então  $p = p_{k+1}$ , e se  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , a hipótese de indução garante que  $p = p_i$  para algum  $i = 1, 2, \dots, k$ . ■

**Teorema 2 (Teorema Fundamental da Aritmética):** Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como produto de números primos.

**Demonstração:** Se  $n$  é primo não há o que provar, mas se  $n$  é composto vamos utilizar o Segundo Princípio de Indução Matemática. Considere  $P(n)$  a seguinte sentença aberta sobre os números naturais:

$P(n)$ :  $n$  se escreve de modo único como produto de números primos

Observe que  $P(2)$  é verdadeira, pois 2 é primo. Supondo que  $P(k)$  é verdadeira para todo natural  $2 \leq k < n$ . Pelo fato de  $n$  ser composto,  $n = n_1 \cdot n_2$  com  $2 \leq n_1, n_2 < n$ . Dessa forma, por hipótese de indução, temos que  $n_1$  e  $n_2$  podem ser escritos como produto de primos e, conseqüentemente,  $n$  também vai ser escrito como produto de primos.

Para provar unicidade suponha, por absurdo, que  $n$  possa ser escrito de duas maneiras diferentes a menos da ordem de seus fatores, ou seja,

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \text{ e } n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_t,$$

com  $p_i$  e  $q_j$  números sendo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ .

Observe que  $p_1$  é divisor de  $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_t$ , pois  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , e dessa forma  $n = p_1 \cdot a$  com  $a$  natural. Assim,  $n = p_1 \cdot a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_t$  e  $p_1$  divide  $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_t$ .

Como  $p_1$  é primo e todos os fatores  $q_j$  também são primos, conclui-se que  $p_1 = q_j$  para algum  $j$  e podemos reordenar os  $q_j$  de forma que  $p_1 = q_1$  sem perda de generalidade. Segue que  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = p_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_t$  e como  $p_1$  é não-nulo podemos simplificar a igualdade acima e obter  $p_2 \cdot \dots \cdot p_k = q_2 \cdot \dots \cdot q_t$ .

Repetindo este procedimento, chegaremos a conclusão que  $k = t$  e após um rearranjo dos índices de  $q_j$ , encontramos  $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_k = q_k$ , provando a unicidade. ■

O Teorema Fundamental da Aritmética não recebe este nome por acaso, pois justifica a construção de todos os números naturais através dos números primos.

Em 1801, Gauss escreveu um livro-texto avançado sobre teoria dos números, o *Disquisitiones Arithmeticae*. Entre tópicos de alto nível, ele ressaltou que não devemos perder de vista duas questões muito básicas: "O problema de distinguir os números primos dos números compostos e o de resolver os últimos em seus fatores primos é conhecido como um dos mais importantes e mais úteis em aritmética." (STEWART, 2014, p. 27).

Assim, dizemos que os números primos são aqueles que geram os demais a partir da operação de multiplicação e a representação única para todo e qualquer número natural abre diversas possibilidades de aplicação, como em criptografia que estuda métodos de se codificar e decodificar uma mensagem.

A criptografia com números primos é bastante utilizada e se baseia na escolha de dois números primos grandes que são multiplicados gerando um produto que será um grande número composto. A mensagem, então, é convertida numa sequência de números por algum método convencional e a seguir é codificada por uma operação baseada nesse grande número, produto dos dois números primos.

A mensagem só poderá ser decodificada por uma segunda operação matemática baseada no conhecimento dos dois números primos originais. Logo, se alguém conseguir fatorar o grande número gerado, terá a chave para decifrar a mensagem.

A teoria da criptografia mostra que um sistema criptografado que utiliza números primos é tão mais seguro quanto maiores forem os números primos utilizados na sua estrutura, despertando uma busca por números primos grandes, inclusive há prêmios em dinheiro para quem descobrir primos muito grandes (LEMOS, 2010).

Até hoje não se conhece uma maneira simples de encontrar números primos grandes. Essa questão tem motivado matemáticos e Eratóstenes (276 a.C a 196 a.C) criou um método para encontrar números primos que discutiremos na próxima subseção.

### 2.2.2 O crivo de Eratóstenes

É um algoritmo simples que permite encontrar todos os primos possíveis até um determinado número natural que funciona da seguinte forma:

1. Verifica-se o maior valor a ser testado. Este valor corresponde a raiz quadrada de  $n$ , arredondado pra baixo;
2. Cria-se uma lista com os valores inteiros de 2 até  $n$ ;
3. Encontra-se o primeiro elemento da lista, o número primo 2;
4. Removem-se da lista todos os múltiplos de 2 encontrados;
5. O próximo número da lista é primo;
6. Todos os números múltiplos desse número devem ser removidos da lista;
7. Os passos 5 e 6 são repetidos até que o próximo item da lista seja o maior valor a ser testado  $\sqrt{n}$ . Se o número  $n$  ainda estiver na lista ele é primo, caso contrário composto.

Este algoritmo é eficiente mas muito lento, já que requer uma grande quantidade de passos para que o problema seja resolvido, e só convém aplicá-lo para valores pequenos de  $n$ . A ideia principal é dividir o número natural  $n$ , sucessivamente, pelos números primos que não excedam a  $\sqrt{n}$  e a razão de o maior valor a ser testado para um número natural  $n$  não poder exceder  $\sqrt{n}$  se deve ao fato de que  $n$  sendo composto, então  $n = bc$  com  $b$  e  $c$  naturais tais que  $1 < b, c < n$ . Supondo que  $b \leq c$ , temos que  $b^2 \leq bc$ , ou seja,  $b^2 \leq n$  o que implica em  $b < \sqrt{n}$ .

**Exemplo 3:** *Vamos aplicar aplicar o crivo de Erastótenes para encontrar os números primos menores que 50:*

*1º passo: O maior valor a ser testado é 7, pois  $8 > \sqrt{50}$ ;*

*2º passo: Criando uma lista de valores de 2 a 50;*

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,  
 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,  
 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,  
 41,42,43,44,45,46,47,48,49,50

3º e 4º passos: *Encontra-se o primeiro elemento da lista e remove-se os múltiplos de 2;*

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,  
 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,  
 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,  
 41,42,43,44,45,46,47,48,49,50

5º passo: *3 é primo e remove-se os múltiplos de 3;*

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,  
 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,  
 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,  
 41,42,43,44,45,46,47,48,49,50

6º passo: *5 é primo e remove-se os múltiplos de 5;*

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,  
 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,  
 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,  
 41,42,43,44,45,46,47,48,49,50

7º passo: *7 é primo e remove-se os múltiplos de 7;*

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,  
 21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,  
 31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,  
 41,42,43,44,45,46,47,48,49,50

8º passo: *Os números primos de 1 até 50 são*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.

### 2.2.3 A infinitude dos números primos

Ao se estudar os números primos um dos primeiros questionamentos que surge é sobre quantos números primos existem. Euclides provou, em sua obra *Os Elementos*, a existência de infinitos números primos, conforme apresentado no próximo teorema:

**Teorema 3 (Euclides):** *O conjunto formado pelos números primos é infinito.*

**Demonstração:** Para qualquer conjunto finito  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  de números primos, considere o número  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$ . Este número  $n$  não é divisível por nenhum número primo  $p_i$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), logo  $n$  é primo ou divisível por um primo diferente de  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . Assim, o conjunto  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  não pode ser a coleção de todos os números primos. ■

Sobre a prova de infinitos primos proposta por *Euclides* surge uma questão interessante:

**Problema 1:** *O sucessor do produto dos  $r$  primeiros primos consecutivos é primo para qualquer valor natural de  $r$ ?*

**Resolução:** Estamos interessados em saber se o conjunto  $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  de números primos usado na demonstração anterior fosse formado pelos  $r$  primeiros números primos, então o número  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$  é primo? A resposta é que para alguns valores de  $r$  o número  $n$  é primo e podemos verificar isto por inspeção.

Tabela 2 – Sucessor do produto de números primos

$r$	números primos	$n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_r + 1$	Fatoração
1	2	$2 + 1 = 3$	3
2	2 e 3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	7
3	2,3 e 5	$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$	31
4	2, 3, 5 e 7	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$	211
5	2,3,5,7 e 11	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$	2311
6	2,3,5,7,11 e 13	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$	$59 \cdot 509$

Fonte: elaborada pelo autor

Verificamos que sucessor do produto dos seis primeiros números primos é o número  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$  que não é primo.

**Definição 10:** *O primordial de um número natural  $n$  é o produto de todos os números primos menores ou iguais a  $n$ , sendo denotado por  $n\#$ .*

Por exemplo,  $10\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ . Observe a seguinte questão não resolvida sobre o número primordial:

**Problema em Aberto 3:** *Existem infinitos primos da forma  $n\# + 1$  ou  $n\# - 1$ ?*

Uma abordagem mais completa deste problema pode ser consultada no artigo *On the Primality of  $n! \pm 1$  and  $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p \pm 1$*  de Caldwell e Gallot (2001).

**Problema 2:** *Mostrar que existem infinitos números primos da forma  $6n + 5$  com  $n$  natural.*

**Resolução:** Ao dividirmos um número natural por 6 o resto da divisão pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, ou seja, todo número natural pode ser escrito como  $6n$ ,  $6n + 1$ ,  $6n + 2$ ,  $6n + 3$ ,  $6n + 4$  ou  $6n + 5$  e desses os únicos que podem ser primos são  $6n + 1$  e  $6n + 5$ , pois  $6n$ ,  $6n + 2$  e  $6n + 4$  são pares e  $6n + 3$  é múltiplo de 3.

O produto de números da forma  $6n + 1$  é também da forma  $6n + 1$ , visto que

$$(6n_1 + 1) \cdot (6n_2 + 1) = 6 \cdot (6n_1 \cdot n_2 + n_1 + n_2) + 1.$$

Agora vamos usar um argumento semelhante ao usado por Euclides para mostrar que existem infinitos números primos. Supondo, por absurdo, que existe uma lista finita de primos da forma  $6n + 5$ , ou seja,  $6n_1 + 5, 6n_2 + 5, \dots, 6n_r + 5$ , o número

$$N = 6 \cdot (6n_1 + 5) \cdot (6n_2 + 5) \cdot \dots \cdot (6n_r + 5) + 5,$$

não é divisível por nenhum dos primos da lista  $6n_1 + 5, 6n_2 + 5, \dots, 6n_r + 5$  e, consequentemente, deve ser divisível por números primos da forma  $6n + 1$ . Logo,  $N$  é um produto de números da forma  $6n + 1$  sendo também da forma  $6n + 1$ , o que é um absurdo, pois  $N$  é da forma  $6n + 5$ . Então, existem infinitos números primos da forma  $6n + 5$ .

## 2.3 Números Primos em Progressão Aritmética

Nesta seção, abordaremos a distribuição dos números primos e, especificamente, resultados sobre sequência de números primos em progressão aritmética. Para uma análise mais detalhada desse tema, o leitor pode consultar o artigo "Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de van der Waerden e de Green-Tao", publicado na revista *Matemática Universitária*, n. 48, 2010, p. 39-51, indicado nas referências.

**Definição 11:** *Uma progressão aritmética, denotada por  $PA$ , é toda sequência numérica em cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior mais uma constante  $r$  chamada razão da  $PA$ . Por exemplo, a sequência  $(2, 5, 8, 11, \dots)$  é uma  $PA$  com primeiro termo  $a_1 = 2$  e razão  $r = 3$ .*

Um termo qualquer de uma **PA**, com primeiro termo  $a_1$  e razão  $r$ , é dado por  $a_1 + (n - 1) \cdot r$ , para todo  $n$  natural. Assim, a sequência formada pelos números da forma  $6n + 5 = 11 + (n - 1) \cdot 6$  é uma progressão aritmética e constata que é possível encontrar infinitos primos em progressões aritméticas. Um resultado importante sobre este tema foi encontrado por Dirichlet (1805 - 1859).

**Teorema 4 (Dirichlet):** *Se  $a$  e  $b$  são números naturais primos entre si, então a progressão aritmética*

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$$

*possui infinitos números primos.*

Ao encontrar progressões aritméticas com infinitos termos primos, por exemplo  $6n + 5$ , com  $n$  natural, cujos termos são 11, 17, 23, 29, 35, 41,  $\dots$ , observe que, apesar de ter infinitos números primos, não são todos os termos primos, visto que  $35 = 6 \cdot 5 + 5$  não é primo. Existe uma busca por progressões aritméticas formadas somente por números primos, por exemplo, a sequência 3, 5 e 7 é uma progressão aritmética formada só por três números primos e as maiores já encontradas contém 26 primos (ANDERSEN, 2017). Em 2016, Takeshi Nakamura encontrou uma destas progressões aritméticas dada por

$$149836681069944461 + 7725290 \cdot 23\# \cdot n$$

sendo  $\#23 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 23 = 223092870$  e  $n$  inteiro tal que  $0 \leq n \leq 25$ .

Sobre progressões aritméticas formadas apenas por números primos observe os seguintes resultados:

**Teorema 5:** *Não existe progressão aritmética formada por três ou mais números primos distintos cujo primeiro termo é 2 ou cuja razão é um número ímpar.*

**Demonstração:** O primeiro termo  $a_1$  da **PA** não pode ser 2, senão a **PA**( $2, 2 + r, 2 + 2r, \dots$ ) teria pelo menos dois dos três primeiros termos números primos pares, o que é um absurdo, pois 2 é o único primo par. Então,  $a_1$  é primo ímpar e razão  $r$  da **PA**( $a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots$ ) não pode ser ímpar, senão teria o segundo termo  $a_1 + r$  primo par, outro absurdo. ■

**Teorema 6 (Teorema de Corput):** *Existe uma infinidade de progressões aritméticas formadas por três números primos.*

Por exemplo, (3, 11, 19), (5, 11, 17), (7, 19, 31) e (11, 29, 47).

**Teorema 7 (Teorema de Green e Tao):** *Dado um número natural  $n$  qualquer, existem primos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tais que*

$$p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}$$

para todo  $i$  natural tal que  $2 \leq i \leq n - 1$ .

Em outras palavras, Green e Tao (2008) provaram a existência de progressões aritméticas só formadas por números primos de tamanhos arbitrários. Sobre progressões aritméticas infinitas, o resultado a seguir mostra que não é possível só possuir números primos.

**Teorema 8:** *Não existe uma progressão aritmética com infinitos termos formada apenas por números primos.*

**Demonstração:** Seja a progressão

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots,$$

suponha, por absurdo, que  $a + nb = p$  onde  $p$  é primo para todo  $n$  natural. Se colocarmos  $N = n + kp$ ,  $k$  natural, temos:

$$a + Nb = a + (n + kp)b = a + nb + kpb = p + kpb = p(1 + kb)$$

então,  $a + Nb$  é divisível por  $p$  e, conseqüentemente, não é primo, o que é um absurdo. ■

Sobre progressões aritméticas formadas por números primos existem as seguintes questões não resolvidas:

**Problema em Aberto 4:** *Existem infinitas progressões aritméticas formada por três números primos distintos cujo primeiro termo é 3?*

Em 1939, Van der Corput (1890-1975) provou o **Teorema 6** sobre a existência de infinitas progressões aritméticas de 3 primos, mas não necessariamente iniciadas pelo número 3. Várias progressões aritméticas iniciadas por 3 são conhecidas, mas não se sabe se há uma infinidade delas. Por exemplo, (3, 5, 7), (3, 11, 19), (3, 13, 23), (3, 17, 31), (3, 23, 43), (3, 31, 49), (3, 37, 71).

**Problema em Aberto 5:** *Existem seqüências arbitrariamente longas de números primos consecutivos em progressão aritmética?*

Em 1967, Lander e Parkin encontraram a primeira seqüência de 6 primos consecutivos em **PA**, com primeiro termo 121174811 e razão 30. A maior seqüência já encontrada possui 10 números primos consecutivos em uma **PA** cujo primeiro termo é um número de 93 algarismos e razão 210 (DUBNER et al., 2001).



Olhando para a sequência dos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ... é difícil perceber uma regularidade na frequência com que aparecem na sequência dos números naturais, pois as vezes estão separados por três números compostos consecutivos como 13 e 17 e as vezes por cinco como 23 e 29.

**Problema 3:** *Mostre que existem 1000 números compostos consecutivos.*

**Resolução:** Para responder esta pergunta precisamos do conceito de fatorial.

**Definição 12:** *O fatorial de um número natural  $n$ , denotado por  $n!$ , é dado por*

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n(n-1)!, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Como consequência, temos  $0! = 1! = 1$  e o fatorial de um número  $n$  natural maior que 1 é o produto dos  $n$  primeiros números naturais. Por exemplo,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

Voltando para a pergunta de encontrar 1000 números compostos consecutivos, considere a seguinte sequência de números naturais

$$1001! + 2; 1001! + 3; 1001! + 4; \dots; 1001! + 1000; 1001! + 1001$$

e note que temos 1000 números consecutivos compostos, pois o número  $1001! + k$  é divisível por  $k$  para todo  $k$  natural tal que  $2 \leq k \leq 1001$ .

Assim, existem 1000 números compostos consecutivos e percebe-se que não existe uma regularidade entre a quantidade de números compostos entre dois números primos consecutivos e de fato a sequência

$$(n+1)! + 2; (n+1)! + 3; (n+1)! + 4; \dots; (n+1)! + n; (n+1)! + (n+1)$$

para cada  $n$  natural, é formada por  $n$  números naturais compostos consecutivos.

O resultado acima prova a existência de intervalos arbitrariamente longos de números naturais nos quais todos os números são compostos, nenhum é primo.

Sobre a distribuição de números primos existe um importante resultado que garante a existência de primo em um intervalo do tipo  $]n, 2n[$  postulado por Joseph Bertrand (1822-1900) em 1845 e demonstrado por Chebyshev (1821-1894) em 1852 (AIGNER; ZIEGLER, 2002).

**Teorema 9 (O Postulado de Bertrand):** *Para cada número natural  $n$ , existe algum número primo  $p$  tal que  $n < p < 2n$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em *As provas estão n'ó Livro de Aigner (2002, p. 9-12)*.

Uma outra questão mais geral que o **Postulado de Bertrand** permanece não resolvida:

**Problema em Aberto 6:** *Se  $k$  é um número natural, existe sempre número primo entre  $kn$  e  $(k + 1)n$ ?*

Note que se  $k = 1$  é verdadeira, pois é o **Postulado de Bertrand**. Para  $k = 2$  é verdadeira e foi resolvida por Bachraoui (2006) e Loo (2011) provou ser verdadeira o caso  $k = 3$ .

## 2.4 Números Primos Gêmeos

A abordagem desta seção se baseia no artigo *Primos gêmeos e outras conjecturas* de Pantoja (2012).

Os números naturais primos cuja diferença é 2 são chamados primos gêmeos, ou seja, pares de números primos da forma  $(p, p + 2)$ . Por exemplo, (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), e assim sucessivamente.

Sobre a quantidade de números primos gêmeos existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 7 (Conjectura dos Primos Gêmeos):** *Existem infinitos pares de números primos gêmeos?*

Acredita-se na existência de infinitos pares de números primos gêmeos e Zhang (2013) descobriu que há infinitos pares de primos que estão a menos de 70 milhões de unidades uns dos outros. Apesar de 70 milhões parecer um número muito grande, a existência de qualquer fronteira finita, não importando seu tamanho, significa que os intervalos entre números primos consecutivos não continuam crescendo para sempre.

Os primeiros pares de primos gêmeos menores do que 250 são (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241). Curiosamente, com exceção de (3, 5), todos esses pares de primos podem ser escritos como  $(6k - 1, 6k + 1)$  e a justificativa é que todo número natural pode ser escrito como  $6k - 2$ ,  $6k - 1$ ,  $6k$ ,  $6k + 1$ ,  $6k + 2$  ou  $6k + 3$  e desses os únicos que podem ser primos são  $6k - 1$  e  $6k + 1$ , pois os outros são múltiplos de 2 ou de 3. O teorema de Dirichlet prova a existência de infinitos primos da forma  $6k - 1$  e  $6s + 1$ ,  $k$  e  $s$  naturais, mas não é possível concluir a partir deste fato que existem infinitos pares de números primos gêmeos, visto que  $(6k - 1, 6s + 1)$  é um par de primos gêmeos se  $6k - 1$  e  $6s + 1$  são primos e  $k$  e  $s$  são iguais.

**Definição 13 (A Função Phi de Euler):** É uma função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, para um número natural  $n$ ,  $\phi(n)$  é a quantidade de números menores que  $n$  co-primos com  $n$ .

Por exemplo,  $\phi(8) = 4$ , pois 1, 3, 5 e 7 são co-primos com 8.

**Observação 1:**  $\phi(n) \leq n - 1$  para todo  $n$  natural e se  $n$  é primo, então  $\phi(n) = n - 1$ .

Por exemplo,  $\phi(7) = 6$ , pois 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são co-primos com 7.

**Teorema 10:** Seja  $p$  um número primo. Então,

1.  $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$  para todo  $n$  natural;
2.  $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$  para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais;
3. Se  $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$  em que  $p_i$  são números primos distintos e  $x_i$  naturais, então

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Observe a seguinte equivalência entre pares de números primos gêmeos e a função  $\phi$  de Euler:

**Teorema 11:** Os números  $p$  e  $p + 2$  são primos gêmeos se, e somente se,

$$\phi(p) + \phi(p + 2) = 2p.$$

**Demonstração:** Se  $p$  e  $p + 2$  são primos, então  $\phi(p) = p - 1$  e  $\phi(p + 2) = p + 1$  donde

$$\phi(p) + \phi(p + 2) = p - 1 + p + 1 = 2p.$$

Reciprocamente, supondo, por absurdo, que  $p$  é composto, ou seja,  $p = c \cdot d$  com  $c$  e  $d$  números primos tais que  $2 \leq c, d < p$ , usando a **Observação 1**, em que  $\phi(n) \leq n - 1$ , temos

$$\phi(p) = \phi(c \cdot d) = \phi(c) \cdot \phi(d) \leq (c - 1)(d - 1) = cd - c - d + 1 \leq p - 2 - 2 + 1 = p - 3$$

mas, por hipótese,  $\phi(p) + \phi(p + 2) = p - 1 + p + 1 = 2p$ , donde segue que:

$$2p = \phi(p) + \phi(p + 2) \leq p - 3 + \phi(p + 2)$$

$$2p \leq p - 3 + \phi(p + 2)$$

$$\phi(p + 2) \geq p + 3$$

um absurdo, pois  $\phi(p + 2) \leq p + 1$ , portanto  $p$  é primo. Note que se  $p = c \cdot d$  com  $c$  ou  $d$  composto usamos o teorema fundamental da Aritmética escrevendo os números compostos como produto de primos. O caso em que  $p + 2$  é composto é análogo. ■

Em 1849, Alphonse de Polignac (1826 – 1863) apresentou a seguinte versão mais geral deste problema (LIN; ZHIPENG, 2004):

**Problema em Aberto 8 (Conjectura de Polignac):** *Para qualquer número  $n$  natural par existem infinitas duplas de números primos com diferença  $n$ , ou seja, duplas de números primos da forma  $(p, p + n)$ .*

Observe que para  $n = 2$  é a conjectura dos primos gêmeos.

Analogamente, um terno de números naturais primos da forma  $(n, n + 2, n + 4)$  é chamado de terno de primos trigêmeos. Vamos mostrar que  $(3, 5, 7)$  é o único terno de primos trigêmeos que existe. Todo número natural é da forma  $3k, 3k + 1$  ou  $3k + 2$  com  $k$  natural. Assim, temos 3 possibilidades:

- se  $n = 3k$ ,  $n + 2 = 3k + 2$  e  $n + 4 = 3k + 4$ , então  $n$  é múltiplo de 3 e o único múltiplo de 3 primo é 3, portanto o terno é  $(n, n + 2, n + 4) = (3, 5, 7)$ ;
- se  $n = 3k + 1$ ,  $n + 2 = 3k + 3$  e  $n + 4 = 3k + 5$ , então  $n + 2$  é múltiplo de 3 e o único múltiplo de 3 primo é 3, portanto o terno é  $(n, n + 2, n + 4) = (1, 3, 5)$  que não é um terno de primos gêmeos;
- se  $n = 3k + 2$ ,  $n + 2 = 3k + 4$  e  $n + 4 = 3k + 6$ , então  $n + 4$  é múltiplo de 3 e o único múltiplo de 3 primo é 3, portanto o terno é  $(n, n + 2, n + 4) = (-1, 1, 3)$  que não é um terno de primos gêmeos.

## 2.5 Fórmulas que Geram Números Primos

Nesta seção, abordaremos o artigo *Existem funções que geram os números primos?* de Ribenboim (1993).

Em outras palavras, estamos interessados em encontrar uma função  $f$ , tal que dado um número natural não nulo  $n$ ,  $f(n)$  seja um número primo.

Encontrar números primos de uma forma simples é um dos maiores desafios da matemática, visto que até hoje não se encontrou uma fórmula que fornecesse todos os números primos em sequência. Existem tentativas mais modestas de se encontrar fórmulas que forneçam apenas números primos, embora não todos eles. Uma delas resultou em um polinômio descoberto pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783):

$$f(n) = n^2 - n + 41.$$

Encontrando alguns valores de  $f(n)$ , temos

- $f(0) = 41$ , que é número primo;
- $f(1) = 41$ , que é número primo;
- $f(2) = 43$ , que é número primo;
- $f(3) = 47$ , que é número primo;
- $f(4) = 53$ , que é número primo;
- $f(5) = 61$ , que é número primo;
- $f(6) = 71$ , que é número primo;
- $f(7) = 83$ , que é número primo;
- $f(40) = 1601$ , que é número primo.

Parece que sempre obteremos números primos mas é possível verificar que para  $n$  entre 0 e 40 todos os valores de  $f(n)$  são números primos e se  $n$  múltiplo de 41, ou seja,  $n = 41k$ ,  $k$  natural,  $f(n)$  é múltiplo de 41 e não é primo, mas não se sabe, de forma generalizada, que outros valores de  $n$  produzirão valores primos de  $f(n)$ .

Sobre encontrar polinômios do tipo

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad (a_k \neq 0)$$

cujos coeficientes  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1$  e  $a_0$  são números inteiros e que gerem números primos, existem as seguintes não resolvidas:

**Problema em Aberto 9 (Conjectura de Schinzel e Sierpinski):** *É verdade que para todo polinômio  $f(n)$  de coeficientes inteiros e sem divisores diferentes de 1 comuns, de grau maior ou igual a 1, existe um número  $n$  tal que  $f(n)$  seja primo?*

**Problema em Aberto 10:** *Existem infinitos números primos da forma  $n^2 + 1$ , com  $n$  natural?*

Observe que se  $n$  é ímpar, então  $f(n) = n^2 + 1$  é par e exceto para  $n = 1$ , temos  $f(n)$  é composto. Assim,  $f(n) = n^2 + 1$  somente poderá ser primo se  $n$  é par mas não necessariamente, pois  $f(8) = 8^2 + 1 = 65 = 5 \cdot 13$  que é composto. Esse comportamento não é específico para este polinômio, mas é geral.

**Teorema 12:** *Dado um polinômio  $f(n)$  com coeficientes inteiros, existe uma infinidade de inteiros  $m$  tais que  $f(m)$  é composto.*

**Demonstração:** Considere  $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$  com todos os coeficientes inteiros e  $a_k \neq 0$ . Fixado o valor de  $n = n_0$ , tal que  $f(n_0) = p$  é um número primo. Então, para qualquer inteiro  $t$ , considere

$$f(n_0 + tp) = a_k (n_0 + tp)^k + a_{k-1} (n_0 + tp)^{k-1} + \dots + a_1 (n_0 + tp) + a_0$$

$$f(n_0 + tp) = (a_k n_0^k + a_{k-1} n_0^{k-1} + \dots + a_1 n_0 + a_0) + p \cdot Q(t)$$

$$f(n_0 + tp) = f(n_0) + p \cdot Q(t)$$

$$f(n_0 + tp) = p + p \cdot Q(t)$$

$$f(n_0 + tp) = p \cdot [1 + Q(t)]$$

onde  $Q(t)$  é um polinômio de variável  $t$  com coeficientes inteiros.

Observe que  $p$  divide  $f(n_0 + tp)$  e  $[1 + Q(t)]$  pode ser diferente de 1. Variando o  $t$  obtemos o resultado. ■

Pierre Fermat (1601-1665) também fracassou na tentativa de encontrar uma fórmula que gerasse números primos e conjecturou que os números da forma  $F_n = 2^{2^n} + 1$  eram sempre primos, o que vale para  $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$  e  $F_4 = 65.537$  mas Euler mostrou que  $F_5 = 4.294.967.297 = 641 \cdot 6.700.417$  não é primo. Não foram encontrados outros números primos de Fermat  $F_n$ , com  $n > 4$ , e a seguinte questão permanece sem resposta:

**Problema em Aberto 11:** *Os números de Fermat são compostos para todo natural  $n$  maior que 4?*

Observe a seguinte questão sobre a sequência dos números de Fermat:

**Problema 4:** *Sendo  $F_n = 2^{2^n} + 1$  mostre que  $F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} + 2$  para todo  $n$  natural.*

**Resolução:** Vamos usar indução sobre  $n$ . Observe que  $F_1 = 5 = 3 + 2 = F_0 + 2$ . Suponhamos que  $F_k = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{k-1} + 2$ , então

$$\begin{aligned} F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{k-1} \cdot F_k + 2 &= (F_k - 2) \cdot F_k + 2 \\ &= (2^{2^k} + 1 - 2) \cdot (2^{2^k} + 1) + 2 \\ &= (2^{2^k} - 1) \cdot (2^{2^k} + 1) + 2 \\ &= (2^{2^k})^2 - 1 + 2 \\ &= 2^{2^{k+1}} + 1 \\ &= F_{k+1} \end{aligned}$$

Assim,  $F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} + 2$  para todo  $n$  natural.

No campo dos números primos, Fermat deu várias contribuições para a matemática e podemos destacar o resultado que se segue:

**Teorema 13 (O Pequeno Teorema de Fermat):** *Dado um número primo  $p$ , o número  $a^p - a$  é divisível por  $p$  para todo  $a$  inteiro.*

**Exemplo 4:** *Como aplicação deste teorema vamos mostrar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é natural o número*

$$\frac{3}{5}n^5 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{11}{15}n.$$

*Escrevendo a expressão acima da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}(n^5 - n) + \frac{2}{3}(n^3 - n) + \frac{11}{15}n + \frac{3}{5}n + \frac{2}{3}n \\ \frac{3}{5}(n^5 - n) + \frac{2}{3}(n^3 - n) + \frac{30}{15}n \end{aligned}$$

*e usando o Pequeno Teorema de Fermat, temos que  $n^5 - n = 5k_1$  e  $n^3 - n = 3k_2$  com  $k_1, k_2$  inteiros. Assim,*

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}.5k_1 + \frac{2}{3}.3k_2 + \frac{30}{15}n \\ 3k_1 + 2k_2 + 2n \end{aligned}$$

*e a soma de naturais é natural.*

Em 1637, Pierre Fermat propôs um teorema mas sem publicar a sua prova que tornou-se em um grande desafio para os matemáticos ao longo dos anos e somente em 1995 o matemático britânico Andrew Wiles conseguiu demonstrá-lo (SINGH, 2002).

**Teorema 14 (O Último Teorema de Fermat):** *A equação  $x^n + y^n = z^n$  não possui solução no conjunto dos números naturais, quando  $n$  natural maior que 2.*

Observando o Teorema de Pitágoras, em que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, Fermat modificou a equação  $x^2 + y^2 = z^2$ , que tem infinitas soluções, para uma nova equação da forma  $x^n + y^n = z^n$ , com expoentes  $n > 2$ , afirmando que não tem soluções.

Considerando polinômios com mais variáveis, existe o seguinte resultado devido à Fermat:

**Teorema 15:** *Se  $p$  um número primo ímpar e existem  $x$  e  $y$  naturais tais que  $p = x^2 + y^2$ , então  $p = 4k + 1$ ,  $k$  natural.*

**Demonstração:** Temos três casos a considerar:  $x$  e  $y$  pares,  $x$  e  $y$  ímpares ou  $x$  e  $y$  com paridades distintas,

- i. Se  $x$  e  $y$  fossem ambos pares, teríamos que  $x^2 + y^2$  seria um número par, contrariando a hipótese.
- ii. Se  $x$  e  $y$  fossem ambos ímpares, novamente teríamos que  $x^2 + y^2$  seria um número par, contrariando a hipótese.
- iii. Se  $x$  e  $y$  têm paridades distintas, suponhamos, sem perda de generalidade, que  $x$  seja par e  $y$  ímpar, ou seja,  $x = 2k$  e  $y = 2t + 1$  com  $k$  e  $t$  naturais, segue que  $x^2 = 4k^2$ ,  $y^2 = 4t^2 + 4t + 1$  e, conseqüentemente,  $x^2 + y^2 = 4k^2 + (4t^2 + 4t + 1) = 4(k^2 + t^2 + t) + 1$ . Portanto  $x^2 + y^2$  é da forma  $4k + 1$ . ■

Em particular, este teorema mostra que existem infinitos números primos da forma  $x^2 + y^2$  com  $x$  e  $y$  naturais, pois se  $p = x^2 + y^2$  pode ser escrito como  $4k + 1$  que representa termos de uma progressão aritmética, então, pelo **Teorema 4** de Dirichlet, existem infinitos números primos.

Existem expressões que produzem números primos e um exemplo é proceder da seguinte maneira:

- i. Escolha dois números naturais  $x$  e  $y$ , com  $y \neq 0$ ;
- ii. Em seguida, encontre o número  $a = x(y + 1) - (y! + 1)$ ;
- iii. Por fim, aplique estes números na fórmula

$$f(x, y) = \frac{y - 1}{2} [|a^2 - 1| - (a^2 - 1)] + 2$$

Por exemplo, se  $x = 2$  e  $y = 3$ , então  $a = 2 \cdot (3 + 1) - (3! + 1) = 8 - 7 = 1$  e  $f(2, 3) = 2$  que é primo. Vamos usar o seguinte teorema para justificar uma aplicação interessante da expressão acima.

**Teorema 16 (Teorema de Wilson):** *Se  $p$  é um número primo, então  $\frac{(p - 1)! + 1}{p}$  é um número natural.*

Calculando para  $x = \frac{(p - 1)! + 1}{p}$  e  $y = p - 1$ , com  $p$  primo, encontramos

$$a = \frac{(p - 1)! + 1}{p} \cdot p - [(p - 1)! + 1] = 0 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{(p - 1)! + 1}{p}, p - 1\right) = p - 2 + 2 = p$$

Assim, é possível encontrar todos os números primos  $p$  através da expressão de  $f(x, y)$ . Por exemplo, para obter o número primo 13, fazemos

$$x = \frac{12! + 1}{13} = 36846277 \quad \text{e} \quad y = 12.$$

Observe que esta não é uma maneira simples e pode gerar vários primos repetidos, por exemplo, fazendo  $x = 5$  e  $y = 10$ , obteremos  $a = -3628746$ , logo  $f(5, 10) = f(2, 3) = 2$  que é um número primo.

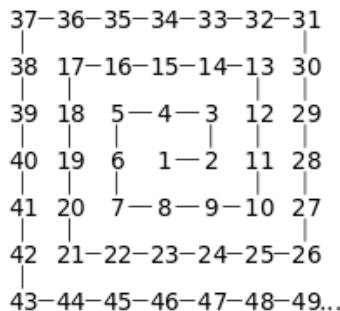
A demonstração desta fórmula pode ser encontrada em Watanabe (2012).



## 2.6 A Espiral de Ulam

É uma maneira de se encontrar números primos descoberta pelo matemático Stanislaw Ulam em 1963 (STEIN; ULAM; WELLS, 1964). A espiral é construída iniciando normalmente com o número 1 no centro e prosseguindo, em espiral, para o exterior:

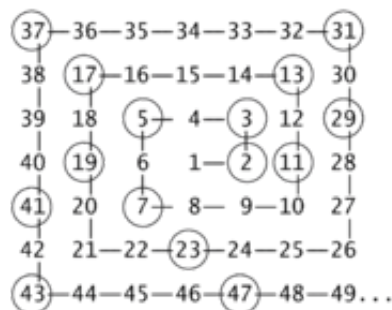
Figura 2 – Espiral de Ulam



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=143179>

Em seguida, assinale todos os números primos e obtenha a figura seguinte:

Figura 3 – Números primos na espiral de Ulam



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=143179>

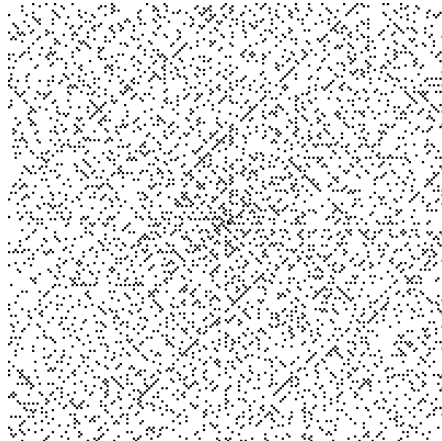
Os números primos, com a exceção do 2, encontram-se em diagonais alternadas e os números primos obedecem à uma função quadrática do tipo  $p(x) = 4x^2 + bx + c$  com  $b$  e  $c$  constantes inteiras. Por exemplo, a diagonal que começa pelo número 3 é determinada pela função definida por:

$$p(x) = 4x^2 - 2x + 1.$$

Observe que  $p(1) = 3, p(2) = 13, p(3) = 31, p(4) = 57$  e assim por diante, como mostra a Figura 3.

Na prática, estas diagonais podem servir para encontrar números primos grandes. Ulam usando um computador conseguiu observar uma espiral com números de 1 a 65025 e ficou surpreso de que algumas diagonais parecem ter mais primos que outras.

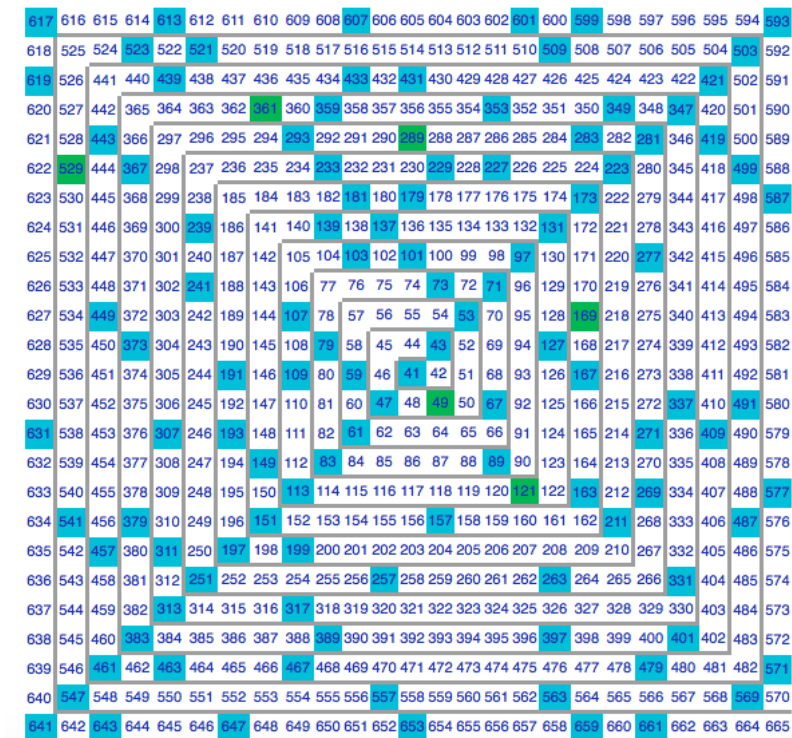
Figura 4 – Espiral de Ulam 200x200 com primos na cor preta



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1924394>

Na maioria das vezes a espiral é iniciada com o número 1 no centro, mas é possível começar com qualquer número, e a mesma concentração de primos ao longo de linhas diagonais, horizontais e verticais é observada. Começando com 41 no centro dá um exemplo particularmente impressionante, com uma diagonal contendo uma sequência ininterrupta de 40 primos gerados pelo polinômio de Euler  $p(n) = n^2 - n + 41$ , parte da qual é mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Espiral de Ulam centrada no número 41



Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ulam\\_spiral](https://en.wikipedia.org/wiki/Ulam_spiral)

## 2.7 A Conjectura de Goldbach

Um dos mais antigos problemas matemáticos em aberto está entre os mais fáceis de enunciar e foi proposto por Christian Goldbach (1690-1764) numa carta que escreveu para Leonhard Euler.

**Problema em Aberto 12 (A conjectura de Goldbach):** *Todo número natural par maior que 2 pode ser expresso como soma de dois números naturais primos?*

Tabela 3 – Conjectura de Goldbach

número par	soma de primos
4	2+2
6	3+3
8	3+5
10	5+5
12	5+7
14	7+7
...	...
100	3+97
...	...

Fonte: elaborada pelo autor

Acredita-se que tal conjectura seja verdade, mas ainda não foi provada e o mais recente avanço foi a solução da chamada conjectura fraca de Goldbach, em 2013, pelo matemático peruano Harald Andrés Helfgott.

**A conjectura fraca de Goldbach:** *Todo número ímpar maior que 5 pode ser escrito como soma de 3 números naturais primos.*

Tabela 4 – Conjectura fraca de Goldbach

número ímpar	soma de primos
7	2+2+3
9	3+3+3
11	3+3+5
13	3+3+7
15	3+5+7
17	3+7+7
...	...
103	3+3+97
...	...

Fonte: elaborada pelo autor

Esta conjectura recebe o nome de "fraca" porque a conjectura de Goldbach, chamada de "forte", sobre a soma de dois números primos, se demonstrada, demonstraria automaticamente a conjectura fraca de Goldbach.

Considerando válida a Conjectura forte de Goldbach. Então, para todo  $k$  natural, maior que 1, existem  $p_1$  e  $p_2$  primos tais que  $2k = p_1 + p_2$ . Somando 3 a ambos os membros desta última igualdade, temos

$$2k + 3 = p_1 + p_2 + 3 \Rightarrow 2(k + 1) + 1 = p_1 + p_2 + 3,$$

como  $2(k+1)+1$  é ímpar e maior que 5, concluímos que todo ímpar maior que 5 pode ser escrito como soma de três números primos. Por exemplo, se  $34 = 11+23$ , então  $37=11+23+3$ .

Tabela 5 – Conjecturas forte e fraca de Goldbach

Conjectura Forte	Conjectura Fraca
$4=2+2$	$7=2+2+3$
$6=3+3$	$9=3+3+3$
$8=3+5$	$11=3+3+5$
$10=3+7$	$13=3+3+7$
$12=5+7$	$15=3+5+7$
$14=7+7$	$17=3+7+7$
...	...
$100=3+97$	$103=3+3+97$
...	...

Fonte: elaborada pelo autor

A Conjectura Forte não pode ser obtida através da Conjectura Fraca, pois não sabemos se existe um número  $p$  primo, tal que possamos escrever todos os ímpares na forma  $p_1 + p_2 + p$ .

### 2.7.1 Outros resultados

A solução da conjectura fraca, por Helfgott, é, sem dúvida, o maior avanço na tentativa de se provar a Conjectura forte de Goldbach. Listamos aqui alguns resultados parciais que foram obtidos (WANG, 2002):

- **O Crivo de Brun:** Em 1915, Viggo Brun (1885–1978) introduziu um crivo para estimar quantidades de números primos em um conjunto de números naturais e usou este crivo para demonstrar o seguinte resultado:

*Se  $k$  um número par e suficientemente grande, então  $k$  é a soma de dois naturais, cada um tendo no máximo nove fatores primos.*

Este resultado, apesar de valer para números maiores que  $3^{3^{15}}$ , representou um grande avanço em direção à conjectura de Goldbach.

- **O Teorema de Shnirelmann:** Em 1931, o matemático russo Lev Genrikhovich Shnirelmann (1905-1938) usou o Crivo de Brun e provou que:

*Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como soma de não mais de 20 números primos.*

- **O Teorema de Vinogradov:** Em 1937, o russo Ivan Matveevich Vinogradov (1831-1983) provou que:

*Todo número ímpar suficientemente grande pode ser escrito como a soma de três números primos.*

Este resultado ficou conhecido como a conjectura fraca de Goldbach para números grandes.

- **O Teorema de Chen:** Em 1966, o matemático chinês Jing-Run Chen (1933-1996), provou que:

*Todo número par suficientemente grande é a soma de um número primo com um número que seja produto de no máximo dois números primos*

- **O Teorema de Ramaré:** Em 1995, o matemático francês Olivier Ramaré provou que:

*Todo número par é soma de, no máximo, seis números primos.*

Este teorema pode ser entendido como uma extensão do Teorema de Shnirelmann.

## 2.8 Primos Palíndromos

Um número é chamado de palíndromo quando lido da esquerda para direita ou da direita para esquerda possuem os mesmos dígitos, por exemplo 11, 101 e 16561 são primos palíndromos. Existe o número de Belphegor que possui dois grupos de 13 algarismos iguais a zero e um algarismo 1 ladeando 666 e as vezes representado por  $10(13)6660(13)1$  ou  $1000000000000066600000000000001$  que é um primo palíndromo (NISHIYAMA, 2012).

Pouco se sabe sobre os primos que são palíndromos e está em aberto o seguinte problema:

**Problema em Aberto 13:** *Existem infinitos números primos, representados no sistema de numeração decimal, que são palíndromos?*

Um fato interessante é que números primos podem ser palíndromos dependendo do sistema de numeração, por exemplo o número 31 é primo e não é palíndromo no sistema decimal mas se representarmos sistema binário, obtemos

$$31 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 11111_{(2)}$$

que é primo e palíndromo.

**Definição 14 (Primo Permutável):** Um número primo é dito *permutável* quando qualquer rearranjo de seus algarismos produz um número primo.

Por exemplo, 37 é um primo permutável, pois 37 e 73 são primos. Os primeiros números primos permutáveis são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, ...

**Lema 3:** Um número primo permutável maior que 5 só pode conter, em sua representação decimal, os algarismos 1, 3, 7 ou 9.

**Demonstração:** Se um número primo possuir os algarismos pares 0, 2, 4, 6 ou 8, algum de seus arranjos é par, e se possuir o algarismo 5, possui arranjo múltiplo de 5, portanto um número primo, maior que 5, que possui algum dos algarismos 0, 2, 4, 5, 6 ou 8 não é primo permutável.

**Teorema 17:** Um número primo permutável não pode conter, em sua representação decimal, todos os algarismos 1, 3, 7 e 9 simultaneamente.

**Demonstração:** Considere  $N$  um natural que possui, em sua representação decimal, todos os algarismos 1, 3, 7 e 9, e tome o seguinte arranjo  $N_0$  dos algarismos de  $N$

$$N_0 = \overline{d_1 d_2 \dots d_{n-4} 7931} = \overline{d_1 d_2 \dots d_{n-4}} \cdot 10^4 + 7931,$$

onde  $\overline{d_1 d_2 \dots d_{n-1} d_n}$  representa  $d_1 \cdot 10^{n-1} + d_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + d_{n-1} \cdot 10 + d_n$ .

Usando a divisão Euclidiana, os seguintes arranjos  $k_i$ , com  $0 \leq i \leq 6$ , do número 7931, deixam diferentes restos quando divididos por 7:

- $k_0 = 7931 = 1133 \cdot 7 + 0$
- $k_1 = 1793 = 256 \cdot 7 + 1$
- $k_2 = 9137 = 1305 \cdot 7 + 2$
- $k_3 = 7913 = 1130 \cdot 7 + 3$
- $k_4 = 7193 = 1027 \cdot 7 + 4$
- $k_5 = 1793 = 276 \cdot 7 + 5$
- $k_6 = 7139 = 1019 \cdot 7 + 6$

Assim, os 7 números naturais da forma  $N_i = \overline{d_1 d_2 \dots d_{n-4}} \cdot 10^4 + k_i$ , para  $0 \leq i \leq 6$ , também têm diferentes restos na divisão por 7. Portanto, um deles é múltiplo de 7 e não pode ser primo. Como todos os  $N_i$  são arranjos de  $N$ , então  $N$  não é um primo permutável.

Sobre os números primos permutáveis existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 14:** *Existem infinitos números primos permutáveis?*

**Definição 15 (Primo Reversível):** *Um número primo que não é palíndromo é dito primo **reversível** ou **omirp** (palavra primo de trás para frente) quando a reflexão dos seus algarismos resulta em um primo diferente.*

Por exemplo, 107 é um primo reversível, pois 701 é primo. Note que todo primo permutável que não é ou não tem arranjo palíndromo é reversível e os primeiros primos reversíveis são 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 107, 113, 149, 157, ...

Alguns números primos reversíveis possuem a propriedade de espelho, por exemplo, 37 é o 12º número primo e o seu espelho 73 é 21º número primo.

Sobre os números primos reversíveis existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 15:** *Existem infinitos números primos reversíveis?*

**Definição 16 (Primo Circular):** *Um número primo é **circular** se a qualquer rotação de seus algarismos produz outro primo.*

Por exemplo, 197 é um primo circular, pois 971 e 719 são primos. Os primeiros números primos circulares são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, 79, 97, 113, 131, 197, ... Sobre os números primos circulares existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 16:** *Existem infinitos números primos circulares?*

Sobre palíndromos, mas não necessariamente primos, existe uma outra questão em aberto chamada Algoritmo 196.

**Algoritmo 196:** Um procedimento que se produz rapidamente palíndromos para a maior parte dos números naturais positivos. Este algoritmo depende da operação da sequência "reverter-então-adicionar", nos instruindo à:

- escolher qualquer inteiro positivo de dois ou mais dígitos;
- reverter os dígitos deste número;
- adicionar este número revertido para o número original.

Se o resultado for um número palíndromo, então este processo é completo. Se não, repita este processo no número resultante e o continue repetindo até que o número palíndromo seja alcançado. Por exemplo, 69

$$\begin{aligned}
 69+96 &= 165, \\
 165+651 &= 726, \\
 726+627 &= 1353, \\
 1353+3531 &= 4884
 \end{aligned}$$

que é palíndromo.

Existem números naturais que ainda não foram encontrados palíndromos aplicando-se o Algoritmo 196, por exemplo, 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497, 1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997, . . . Estes números são conhecidos como **números de Lychrel** e o número 196 é considerado como o primeiro número Lychrel.

**Problema em Aberto 17:** *É possível se obter um número palíndromo aplicando o Algoritmo 196 ao número 196?*

Estimativas sobre a quantidade de iterações para se obter um palíndromo, em função do número de algarismos, podem ser encontradas no artigo *Numerical Palindromes and The 196 Problem* de Nishiyama (2012).

Uma outra questão interessante é sobre o misterioso número 6174, abordada no livro *The Mysterious Number 6174* de Nishiyama (2013), que está associado a seguinte operação:

### A Operação de Kaprekar

1º passo: Escolha um número natural qualquer de dois ou mais algarismos;

2º passo: Subtraia do maior número o menor número formado pelos algarismos do número escolhido;

3º passo: Continue repetindo esta operação para cada novo número.

Se o número escolhido é formado por quatro algarismos que não sejam todos iguais, o resultado é surpreendente e para verificarmos vamos testar para o número:

- 4539

$$\begin{aligned}
 9543 - 3459 &= 6048 \\
 8640 - 0468 &= 8172 \\
 8721 - 1278 &= 7443 \\
 7443 - 3447 &= 3996 \\
 9963 - 3699 &= 6264 \\
 6642 - 2466 &= 4176 \\
 7641 - 1467 &= 6174
 \end{aligned}$$



Observe que ao encontrarmos o número 6174 a operação  $7641 - 1467 = 6174$  se repete e o número 6174 é chamado de núcleo de Kaprekar para um número de quatro dígitos. A justificativa se deve ao fato de escolhendo-se quaisquer quatro dígitos  $x, y, z$  não todos iguais e supondo  $9 \geq x \geq y \geq z \geq t \geq 0$ , a operação de Kaprekar

$$\begin{array}{r} xyzt \\ - tzyx \\ \hline abcd \end{array}$$

fornece as seguintes relações

$$\begin{cases} d = 10 + t - x \\ c = 10 + z - y \\ b = y - 1 - z \\ a = x - t \end{cases}$$

Um número será repetido sob a operação de Kaprekar se o número  $abcd$  resultante puder ser escrito usando os quatro dígitos iniciais  $x, y, z$  e  $t$ . Então, podemos encontrar os 24 possíveis números formados pelos algarismos e verificar se eles satisfazem as relações acima. Acontece que apenas a combinação  $abcd = ytxz$  satisfaz as equações e encontramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} z = 10 + t - x \\ x = 10 + z - 1 - y \\ t = y - 1 - z \\ y = x - t, \end{cases}$$

que podemos organizar da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + z - t = 10 & (1) \\ x + y - z = 9 & (2) \\ y - z - t = 1 & (3) \\ x - y - t = 0 & (4), \end{cases}$$

extraindo-se um subsistema apenas com as variáveis  $y, z$  e  $t$

$$\begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow y + 2z - t = 1 \\ (2) - (4) \Rightarrow 2y - z + t = 9 \\ (3) \Rightarrow y - z - t = 1, \end{cases}$$

que resolvendo pelo processo de escalonamento

$$\begin{cases} -y + 2z - t = 1 \\ 3z - t = 11 \\ z - 2t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z - t = 1 \\ 3z - t = 11 \\ 5t = 5, \end{cases}$$

encontramos  $t = 1, z = 4, y = 6$  e  $x = 7$ , ou seja,  $abcd = ytxz = 6174$ . Portanto, 6174 é o único número inalterado pela operação de Kaprekar para quatro dígitos não todos iguais. É possível mostrar que qualquer número com quatro dígitos não todos iguais, através da operação de Kaprekar, resulta em 6174 em no máximo 7 iterações (NISHIYAMA, 2013).

Se considerarmos números de três dígitos encontramos um núcleo de Kaprekar igual a 495, por exemplo 725

$$\begin{aligned} 752 - 257 &= 495 \\ 954 - 459 &= 495 \end{aligned}$$

Sobre números com dois dígitos não é possível encontrar um núcleo, pois aplicando-se a operação de Kaprekar, não demora muito pra perceber um ciclo repetitivo

$$09 \rightarrow 81 \rightarrow 63 \rightarrow 27 \rightarrow 45 \rightarrow 09.$$

Em geral, não se sabe se a aplicação da operação de Kaprekar para números com mais de quatro algarismos resulta em uma constante, como 6174 para números de quatro algarismos e 495 para números de três algarismos.

## 2.9 Números Perfeitos

A abordagem desta seção pode ser encontrada no livro Elementos de Aritmética de Hefez (2006, p. 101-103)

Um número natural é **perfeito** se a soma de seus divisores é igual ao seu dobro, por exemplo, o número 6 é perfeito, pois seus divisores naturais são 1, 2, 3 e 6 cuja soma é igual à 12. Simbolicamente é comum denotar a soma dos divisores de um número natural  $n$  por  $\sigma(n)$ . Assim, afirmamos que um número natural  $n$  é perfeito se  $\sigma(n) = 2n$ .

Os números perfeitos estão intimamente ligados a soma dos divisores, portanto vamos encontrar esta soma usando o Teorema Fundamental da Aritmética.

**Soma dos Divisores de um número natural:** Se  $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$  em que  $p_i$  são fatores primos distintos e  $x_i$  números naturais, então a soma dos divisores de  $n$  é dada por

$$\sigma(n) = (p_1^0 + p_1^1 + \dots + p_1^{x_1})(p_2^0 + p_2^1 + \dots + p_2^{x_2}) \dots (p_k^0 + p_k^1 + \dots + p_k^{x_k}),$$

usando que a soma  $S_n$  dos termos de uma progressão geométrica não constante finita com primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $q$  é  $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ , temos

$$\sigma(n) = \left( \frac{p_1^{x_1+1} - 1}{p_1 - 1} \right) \left( \frac{p_2^{x_2+1} - 1}{p_2 - 1} \right) \cdots \left( \frac{p_k^{x_k+1} - 1}{p_k - 1} \right).$$

Observe que se  $p$  é primo,  $\sigma(p) = 1 + p$  e se os números  $a$  e  $b$  são primos entre si, então a função  $\sigma$  é multiplicativa, ou seja,  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ . Por exemplo, considerando  $p$  e  $q$  primos distintos os divisores do produto  $pq$  são  $1, p, q$  e  $pq$ , de forma que

$$\sigma(pq) = 1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q) = \sigma(p) \cdot \sigma(q).$$

Este resultado pode ser generalizado usando o Teorema Fundamental da Aritmética e indução.

**Teorema 18 (Teorema de Euclides-Euler):** *Um número natural  $n$  é perfeito par se, e somente se,  $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ , onde  $2^k - 1$  é primo e  $k \geq 2$ .*

**Demonstração:** Observe que  $2^{k-1}$  e  $2^k - 1$  são primos entre si, portanto

$$\sigma(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) = \sigma(2^{k-1}) \cdot \sigma(2^k - 1)$$

$$\sigma(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) = (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) \cdot (2^k - 1 + 1).$$

Utilizando a soma dos termos de uma progressão geométrica, temos

$$\sigma(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) = (2^k - 1) \cdot 2^k$$

$$\sigma(2^{k-1} \cdot (2^k - 1)) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$$

ou seja, se  $\sigma(n) = 2n$  e  $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$  é perfeito.

Para provar a recíproca, procedemos assim. Sendo  $n$  um número perfeito par. Por ser par podemos escrever  $n = 2^{k-1} \cdot m$  com  $k \geq 2$  e  $m$  ímpar e por ser perfeito, temos

$$\sigma(n) = 2n$$

$$\sigma(2^{k-1} \cdot m) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot m$$

$$\sigma(2^{k-1}) \cdot \sigma(m) = 2^k \cdot m$$

$$(2^k - 1) \cdot \sigma(m) = 2^k \cdot m$$

segue que  $2^k - 1$  divide  $2^k \cdot m$ . Como  $2^k$  e  $2^k - 1$  são primos entre si, concluímos que  $2^k - 1$  divide  $m$ . Logo, existe  $M$  natural tal que  $(2^k - 1) \cdot M = m$ . Assim,

$$(2^k - 1) \cdot \sigma(m) = 2^k \cdot (2^k - 1) \cdot M$$

$$\sigma(m) = 2^k \cdot M,$$

mas  $m$  e  $M$  são divisores de  $m$ , portanto  $\sigma(m) \geq m + M$ , segue que

$$2^k \cdot M = \sigma(m) \geq m + M = 2^k \cdot M,$$

portanto  $\sigma(m) = m + M$  e  $m$  e  $M$  são os únicos divisores de  $m$ . Particularmente,  $M = 1$  e  $m = 2^k - 1$  é primo. Logo,  $n$  é da forma

$$n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) \text{ com } 2^k - 1 \text{ primo. } \blacksquare$$

Assim, para encontrarmos números perfeitos precisamos encontrar números primos da forma  $2^k - 1$ , chamados de Primos de Mersenne e denotados por  $M_k$ . Os resultados a seguir são importantes para encontrar números de Mersenne que são primos.

**Lema 4:** *Sejam  $a$  e  $n$  números naturais. Temos*

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

**Demonstração:** Vamos provar usando indução sobre  $n$ . Observe que se  $n = 1$  a afirmação é verdadeira, pois  $a^1 - 1 = a - 1$ . Suponhamos agora que

$$a^k - 1 = (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)$$

escrevamos

$$\begin{aligned} a^{k+1} - 1 &= a \cdot a^k - 1 \\ &= a \cdot a^k - a^k + a^k - 1 \\ &= a^k(a - 1) + a^k - 1 \end{aligned}$$

usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} a^{k+1} - 1 &= a^k(a - 1) + (a - 1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1) \\ &= (a - 1)(a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1). \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 19:** *Se  $2^k - 1$  é primo, então  $k$  é primo.*

**Demonstração:** Usando o **Lema 1**, temos  $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + k + 1$

Suponhamos agora, por absurdo, que  $k$  é composto, então  $k = m \cdot n$  com  $m$  e  $n$  naturais tais que  $m, n \geq 2$  e

$$2^k - 1 = 2^{m \cdot n} - 1 = (2^m)^n - 1 = (2^m - 1)[(2^m)^{n-1} + (2^m)^{n-2} + \dots + 2^m + 1]$$

o que é um absurdo, pois  $2^k - 1$  é divisível por  $2^m - 1$  que é diferente de 1 e de  $2^k - 1$ . ■

Assim, para um número de Mersenne  $M_k = 2^k - 1$  ser primo é necessário que  $k$  seja primo mas não suficiente, por exemplo  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ .

Usando valores primos de  $k$  e o **Teorema de Euclides-Euler** podemos encontrar números perfeitos. Por exemplo,

Tabela 6 – Números perfeitos

número $k$ primo	$2^k - 1$ é primo	$2^{k-1}(2^k - 1)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496

Fonte: elaborada pelo autor

Sobre números perfeitos existem as seguintes questões não resolvidas:

**Problema em Aberto 18:** *Existem infinitos números perfeitos?*

**Problema em Aberto 19:** *Existe algum número perfeito ímpar?*

Um número primo não pode ser perfeito, pois sendo  $p$  um número natural primo qualquer, como os únicos divisores naturais de um número primo são 1 e o próprio número  $p$ , então  $\sigma(p) = p + 1$ . Se  $p$  fosse perfeito,  $\sigma(p) = 2p$  e, então,  $p + 1 = 2p \Rightarrow p = 1$ , o que não é possível, visto que  $p$  é primo. Portanto, um número primo não pode ser perfeito.

## 2.10 Os Números Primos de Sophie Germain

Nesta seção, abordaremos os números que ficaram famosos após Sophie Germain usá-los para provar um dos casos do **Último Teorema de Fermat** (Teorema 14 p.45), que afirma que  $x^n + y^n = z^n$  não possui solução no conjunto dos números naturais, quando  $n > 2$ , com  $n$  inteiro. Sophie Germain provou o caso  $n = p$ , quando  $p$  e  $2p + 1$  são primos.

**Definição 17:** *Um número natural primo  $p$  é dito de Sophie Germain se  $2p + 1$  é primo também.*

Por exemplo, 3 é primo de Sophie Germain, pois  $2 \cdot 3 + 1 = 7$  que é primo, 7 não é primo de Sophie Germain já que  $2 \cdot 7 + 1 = 15$  que não é primo.

Em relação à quantidade de números primos de Sophie Germain a seguinte questão encontra-se não resolvida:

**Problema em Aberto 20:** *Existem infinitos números de Sophie Germain?*

## 2.11 Outros Problemas em Aberto sobre Números Primos

Nesta seção, apresentaremos outros problemas em aberto sobre números primos, coletados dos livros *Prime numbers: the most mysterious figures in math* de Wells (2005) e *Os mistérios matemáticos do professor Stewart: resolvidos por Hemlock Soames e o dr. Watsup* de Stewart (2015).

Em 1912, Edmund Landau listou quatro problemas sobre números primos. Os dois primeiros foram a **Conjectura de Goldbach** e a **Conjectura dos Primos Gêmeos**, já mencionadas, e os outros dois foram a **Conjectura de Legendre** e o **Quarto problema**, listados a seguir (STEWART, 2015):

**Problema em Aberto 21 (Conjetura de Legendre):** *Existe número natural primo entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$ , para qualquer  $n$  natural?*

Em 1965, Chen Jingrun provou para todo  $n$  natural que existe sempre um número que é primo ou produto de dois primos entre  $n^2$  e  $(n + 1)^2$  (STEWART, 2015).

**Problema em Aberto 22 (O Quarto problema de Landau):** *Existem infinitos números naturais primos  $p$  tais que  $p - 1$  é quadrado perfeito?*

Os cinco primeiros números naturais primos que satisfazem a condição são 2, 5, 17, 37 e 101.

**Problema em Aberto 23 (Conjectura de Brocard):** *Existem pelo menos quatro números naturais entre  $(p_n)^2$  e  $(p_{n+1})^2$ , para todo  $n$  natural sendo  $p_n$  o  $n$ -ésimo número primo.*

Em outras palavras queremos saber se entre os quadrados de dois números naturais primos consecutivos existem pelo menos quatro números naturais. Por exemplo, considerando os números primos 2 e 3, temos entre  $2^2 = 4$  e  $3^2 = 9$  existem os naturais 5, 6, 7 e 8.

Em 1876, Henri Brocard (1845-1922) propôs a seguinte questão, sobre números naturais, que também se encontra não resolvida:

**Problema em Aberto 24 (O problema de Brocard):** *Encontrar valores de  $n$  naturais para que  $n! + 1$  seja um quadrado perfeito.*

Estamos interessados em encontrar naturais de  $n$  e  $m$  tais que  $n! + 1 = m^2$ . Por exemplo,

$$4! + 1 = 5^2, \quad 5! + 1 = 11^2 \quad \text{e} \quad 7! + 1 = 71^2$$

Não são conhecidos outros valores de  $n$  maiores que 7, mas Overholt (1993), assumindo a validade de um outro problema não resolvido, a **Conjectura do abc**, provou que existe apenas uma quantidade finita de soluções.

**Problema em Aberto 25 (Conjectura de Andrica):** *A desigualdade*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

*é válida para todo  $n$  natural sendo  $p_n$  o  $n$ -ésimo número primo.*

**Problema em Aberto 26 (Conjectura de Firoozbakht):** *A desigualdade*

$$\sqrt[n]{p_n} > \sqrt[n+1]{p_{n+1}}$$

*é válida para todo  $n$  natural sendo  $p_n$  o  $n$ -ésimo número primo.*

**Problema em Aberto 27 (Conjectura do Número Primo Equilibrado):** *Seja  $p_n$  o  $n$ -ésimo número primo. Existem infinitos números primos  $p_n$ , para  $n \geq 2$ , tais que*

$$p_n = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2} ?$$

Por exemplo,  $p_3 = 5$  é média aritmética entre  $p_2 = 3$  e  $p_4 = 7$ .

**Problema em Aberto 28 (Conjectura de Oppermann):** *Para todo natural  $n$  maior que 1, existe ao menos um número primo entre*

$$n(n-1) \quad \text{e} \quad n^2$$

*e ao menos outro número primo entre*

$$n^2 \quad \text{e} \quad n(n+1).$$

Se esta conjectura for verdadeira, então a **Conjectura de Legendre** é verdadeira, pois existirá ao menos dois primos entre  $n^2$  e  $(n+1)^2$  sendo um no intervalo entre  $n^2$  e  $n(n+1)$  e outro no intervalo entre  $n(n+1)$  e  $(n+1)^2$ .

A conjectura também implica que ao menos um número primo pode ser encontrado em cada revolução da Espiral de Ulam.

**Problema em Aberto 29 (Conjectura de Grimm):** *Para cada elemento de um conjunto de números compostos consecutivos pode-se atribuir um número primo distinto que o divide.*

Por exemplo, se os números são 32, 33, 34, 35 e 36, então os primos atribuídos serão 2, 11, 17, 5 e 3, respectivamente.

Em 1644 Marin Mersenne afirmou que os números da forma  $2^n - 1$  são primos para  $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$  e 257 e compostos para todos os outros os outros naturais  $n$  tais que  $1 < n < 257$ . Acabou-se demonstrando que Mersenne cometera cinco erros:  $n = 67$  e 257 dão números compostos e  $n = 61, 89$  e 107 dão números primos. Em 1989, Paul Bateman, John e Samuel Wagstaff Jr. enunciaram a seguinte conjectura, conhecida como nova conjectura de Mersenne (STEWART, 2015):

**Problema em Aberto 30 (Conjetura de Bateman-Selfridge-Wagstaff):** *Para qualquer natural  $p$  ímpar, se qualquer uma das duas seguintes condições for satisfeita, então a terceira também será:*

1.  $p = 2^k \pm 1$  ou  $p = 4^k \pm 3$  para algum natural  $k$ ;
2.  $2^p - 1$  é primo;
3.  $\frac{2^p + 1}{3}$  é primo.

**Problema em Aberto 31 (Conjectura de Rassias):** *Para cada número natural primo  $p$  maior que 2, existem  $p_1$  e  $p_2$  primos tais que  $p_1 < p_2$  e*

$$p = \frac{p_1 + p_2 + 1}{p_1}$$

**Problema em Aberto 32 (Conjectura de Lemoine):** *Todos os números naturais ímpares maiores que 5 podem ser representados como soma de um primo ímpar e o dobro de um primo.*

Tabela 7 – Conjectura de Lemoine

ímpar maior que 5
$7 = 3 + 2 \cdot 2$
$9 = 5 + 2 \cdot 2$ ou $9 = 3 + 2 \cdot 3$
$11 = 5 + 2 \cdot 3$ ou $11 = 7 + 2 \cdot 2$
$13 = 3 + 2 \cdot 5$ ou $13 = 7 + 2 \cdot 3$
$17 = 3 + 2 \cdot 7$ ou $17 = 7 + 2 \cdot 5$
...

Fonte: Elaborada pelo autor



**Problema em Aberto 33 (Conjectura de Beal):** Se  $A^x + B^y = C^z$ , onde  $A, B, C, x, y$  e  $z$  são naturais com  $x, y$  e  $z$  maiores que 2, então  $A, B$  e  $C$  têm um fator primo comum.

Tabela 8 – Conjectura de Beal

$A^x + B^y = C^z$	Fator primo comum
$2^3 + 2^3 = 2^4$	2
$3^3 + 6^3 = 3^5$	3
$7^6 + 7^7 = 98^3$	7
$33^5 + 66^5 = 33^6$	11
$34^5 + 51^4 = 85^4$	17
$19^4 + 38^3 = 57^3$	19

Fonte: Elaborada pelo autor

Esta conjectura é uma generalização do **Último Teorema de Fermat** (Teorema 14 p.45) criada por Andrew Beal, banqueiro e matemático amador, em 1993, que desde 1997 oferece um prêmio em dinheiro por um contraexemplo ou uma demonstração. O valor do prêmio aumentou várias vezes e atualmente é de um milhão de dólares americanos (BANQUEIRO... 2013).



# 3 PROBLEMAS EM ABERTO DE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, discutiremos sobre Análise Combinatória, abordando problemas em aberto de contagem, de jogos e de diagramas. Este assunto é fundamental para desenvolver no aluno a sua capacidade de raciocínio.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. [...] Se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO, 1991, p. 3)

Para uma abordagem mais completa sobre Análise Combinatória indicamos os livros *Introdução à Análise Combinatória* de Santos, Mello e Murari (2008) e *Análise Combinatória e Probabilidade* de Morgado et al (1991).

## 3.1 O Problema da Superpermutação Mínima

Nesta seção, discutiremos a seguinte questão:

*Imagine que você deseja assistir a uma série de TV, composta de  $n$  episódios, em que não é possível determinar a ordem dos episódios apenas assistindo-os, qual o número mínimo de episódios que você deve assistir para garantir que assista todos os  $n$  episódios da série de TV na ordem correta?*

Para ilustrar o que queremos dizer no problema de como assistir aos  $n$  episódios da série de TV na ordem correta, suponha que  $n = 2$ , ou seja, apenas 2 episódios. Se rotularmos arbitrariamente um dos episódios "1" e do outro episódio "2", podemos assistir aos episódios na ordem "1", "2" e depois "1" novamente. Então, independentemente de qual episódio é realmente o primeiro episódio, vimos os dois episódios consecutivamente na ordem correta. Além disso, isso é claramente mínimo e não há como assistir menos de 3 episódios, garantindo que você veja ambos os episódios na ordem correta.

**Permutações Simples:** Dados  $n$  objetos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de quantos modos é possível ordená-los?

Por exemplo, para os objetos 1, 2 e 3 há 6 ordenações: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. No caso geral temos  $n$  modos de se escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,  $n - 1$  modos de se escolher o que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto, o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é  $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ .

**Definição 18:** Cada ordenação de  $n$  objetos distintos é chamada **permutação simples** de  $n$  objetos e o número de permutações simples de  $n$  objetos distintos é representado por  $P_n$ . Assim,  $P_n = n!$ .

**Definição 19:** Dado o conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  a menor a sequência que contém todas as  $n!$  permutações simples do conjunto como subsequências de tamanho  $n$  é chamada **superpermutação mínima**.

Vamos encontrar, por inspeção, superpermutações mínimas para  $n = 1, 2, 3$  ou 4:

- Para  $n = 1$ , a superpermutação mínima é 1 e tem comprimento 1;
- Para  $n = 2$ , a superpermutação mínima é 121 e têm comprimento 3. Neste caso, as subsequências são:

12 e 21

- Para  $n = 3$ , a superpermutação mínima é 123121321 e tem comprimento 9. Neste caso, as subsequências são:

123, 231, 312, 121 (não convém),

213, 132 e 321

- Para  $n = 4$ , a super permutação mínima é 123412314231243121342132413214321 e tem comprimento 33. Neste caso, as subsequências são:

1234, 2341, 3412, 4123, 1231 (não convém),

2314, 3142, 1423, 4231, 2312 (não convém),

3124, 1243, 2431, 4312, 1213 (não convém),

2134, 1342, 3421, 4213, 2132 (não convém),

1324, 3241, 2413, 4132, 1321 (não convém),

3214, 2143, 1432 e 4321

Para valores naturais de  $n$  maiores ou iguais a 5 fica muito trabalhoso encontrar uma superpermutação mínima por inspeção, mas a listagem dos casos menores  $n = 1, 2, 3$  ou 4 nos fornece uma noção do que pode acontecer.

Suponhamos que conhecemos uma superpermutação mínima com  $n - 1$  objetos e queremos construir uma superpermutação mínima com  $n$  objetos. Para fazer isso, basta substituir cada subsequência que representa uma permutação  $P_i$ , com  $i$  natural, tal que  $1 \leq i \leq (n - 1)!$ , dos  $n - 1$  objetos pela subsequência  $P_{n-1}nP_{n-1}$  e conectá-las através dos termos comuns.

Por exemplo, se começarmos com a superpermutação mínima "121" de dois objetos, substituimos a permutação "12" por "12312" e a permutação "21" por "21321", obtemos a superpermutação mínima de três objetos "123121321".

12312  
21321  
-----

Super permutação mínima de 3 objetos: 123121321.

Repetindo este procedimento podemos obter uma super permutação mínima de 4 objetos através desta super permutação mínima de 3 objetos, como descrito a seguir:

- superpermutação mínima de 3 objetos: 123121321;
- todas as permutações de 3 objetos: 123, 231, 312, 213, 132 e 321;
- subsequências para formação de uma super permutação mínima de 4 objetos:

1234123, 2314231, 3124312, 2134213, 1324132 e 3214321

1234123  
2314231  
3124312  
2134213  
1324132  
3214321  
-----

Superpermutação mínima de 4 objetos:123412314231243121342132413214321.

Utilizando o procedimento acima encontramos a superpermutação mínima para os casos  $n = 5$  e  $n = 6$ , encontrando os seguintes resultados:

- Para  $n = 5$ , a superpermutação mínima é

123451234152341253412354123145231425314235142315423  
124531243512431524312543121345213425134215342135421  
324513241532413524132541321453214352143251432154321

e tem comprimento 153. Um fato curioso é que, para  $n = 5$ , existe uma outra superpermutação mínima, dada por

123451234152341253412354123145231425314235142315423  
 124531243512431524312543121354213524135214352134521  
 325413251432513425132451321543215342153241532145321

- Para  $n = 6$ , a superpermutação mínima é

1234561234516234512634512364513264513624513642513645213645123465123415  
 6234152634152364152346152341652341256341253641253461253416253412653412  
 3564123546123541623541263541236541326543126453162435162431562431652431  
 6254316245316425314625314265314256314253614253164523146523145623145263  
 1452361452316453216453126435126431526431256432156423154623154263154236  
 1542316542315642135642153624153621453621543621534621354621345621346521  
 3462513462153642156342165342163542163452163425163421564325164325614325  
 6413256431265432165432615342613542613452613426513426513426153246513246  
 5312463512463152463125463215463251463254163254613254631245632145632415  
 6324516324561324563124653214653241653246153264153261453261543265143625  
 1436521435621435261435216435214635214365124361524361254361245361243561  
 2436514235614235164235146235142635142365143265413625413652413562413526  
 41352461352416352413654213654123

e tem comprimento 872.

**Definição 20:** O *somatório* dos termos de uma sequência  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  com  $n \in \mathbb{N}$ , denotado pela letra grega sigma ( $\Sigma$ ), é definido por:

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

onde  $k$  natural ( $1 \leq k \leq n$ ) é o índice do somatório.

Por exemplo,  $\sum_{k=1}^5 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30$ .

Sobre as superpermutações destacamos as seguintes questões não resolvidas:

**Problema em Aberto 34:** A superpermutação mínima de  $n$  objetos é única a menos da troca de nomes sobre os seus objetos para todo natural  $n > 5$ ?

Observe que a superpermutação mínima de dois elementos 1 e 2 pode ser 121 ou 212 que são iguais se invertermos os papéis dos objetos “1” e “2” e verificamos que para  $n = 5$  existem duas superpermutações mínimas distintas.

**Problema em Aberto 35:** Qual o comprimento de uma superpermutação mínima de  $n$  objetos?

Johnston (2013) conjecturou que a superpermutação mínima de  $n$  objetos tem comprimento igual a  $\sum_{k=1}^n n!$ , para todo natural  $n > 6$ .

Tabela 9 – Comprimento das superpermutações mínimas

$n$	Superpermutação mínima	Comprimento	$1! + 2! + \dots + n!$
1	1	1	$1! = 1$
2	121	3	$1! + 2! = 3$
3	123121321	9	$1! + 2! + 3! = 9$
4	123412314231243121342132413214321	33	$1! + 2! + 3! + 4! = 33$
5		153	$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$
6		872	$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$

Fonte: elaborada pelo autor

Observe que para  $n = 6$  o comprimento da superpermutação mínima é 872, entretanto  $\sum_{k=1}^6 k! = 873$  e pouco se sabe sobre sua veracidade para valores naturais de  $n$  maiores que 6.

## 3.2 Números Binomiais e o Triângulo de Pascal

Nesta seção, abordaremos os números binomiais e algumas propriedades do triângulo de Pascal.

**Definição 21:** Dados  $n$  e  $p$  números naturais, tais que  $n \geq p$ , chamamos de **número binomial** de  $n$  sobre  $p$ , denotado por  $\binom{n}{p}$ , o número

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

o número  $n$  é chamado numerador e o número  $p$  denominador do número binomial.

Por exemplo, o número binomial de 5 sobre 2 é

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Se no número binomial de  $n$  sobre  $p$  temos  $n < p$ , adotamos que

$$\binom{n}{p} = 0.$$

Por exemplo,  $\binom{2}{5} = 0$ .

Os números binomiais apresentam diversas propriedades, dentre as quais podemos destacar:

- Dois números binomiais de mesmo numerador  $n$  e cuja soma dos denominadores é igual ao numerador  $n$  são chamados complementares e são iguais, ou seja,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Esta é uma consequência imediata da definição do binomial de  $n$  sobre  $p$ . Por exemplo,

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10;$$

- Binomiais de  $n$  sobre 0 e de  $n$  sobre  $n$  são iguais a 1, pois  $0! = 1$  e

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 \text{ e} \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1; \end{aligned}$$

- **Relação de Stifel:**

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{n! \cdot (p+1) + n! \cdot (n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\ &= \frac{n! \cdot (p+1+n-p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\ &= \binom{n+1}{p+1}. \blacksquare \end{aligned}$$



**Definição 22 (Triângulo de Pascal):** *O triângulo de Pascal é uma tabela de números binomiais do tipo  $\binom{n}{p}$ , dispostos em linhas e colunas de forma triangular, de tal forma que os números binomiais de mesmo numerador  $n$ , situam-se na mesma linha e os de mesmo denominador  $p$  na mesma coluna.*

$$\begin{array}{cccccc}
 \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \binom{0}{4} & \cdots & \binom{0}{n} \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \binom{1}{n} \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \binom{2}{n} \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \binom{3}{n} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \binom{4}{n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

A tabela tem forma retangular e o usamos o termo triângulo pelo fato de os números binomiais  $\binom{n}{p}$  serem nulos se  $n < p$ . Assim,

$$\begin{array}{cccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

Podemos calcular os números binomiais no triângulo de Pascal usando que o primeiro e o último elemento de cada linha são sempre iguais a 1, pois  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  e a relação de Stifel para encontrar os demais números binomiais, visto que  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ , então somando-se dois números binomiais consecutivos de uma mesma linha, o resultado encontra-se abaixo do binomial da direita. Assim,

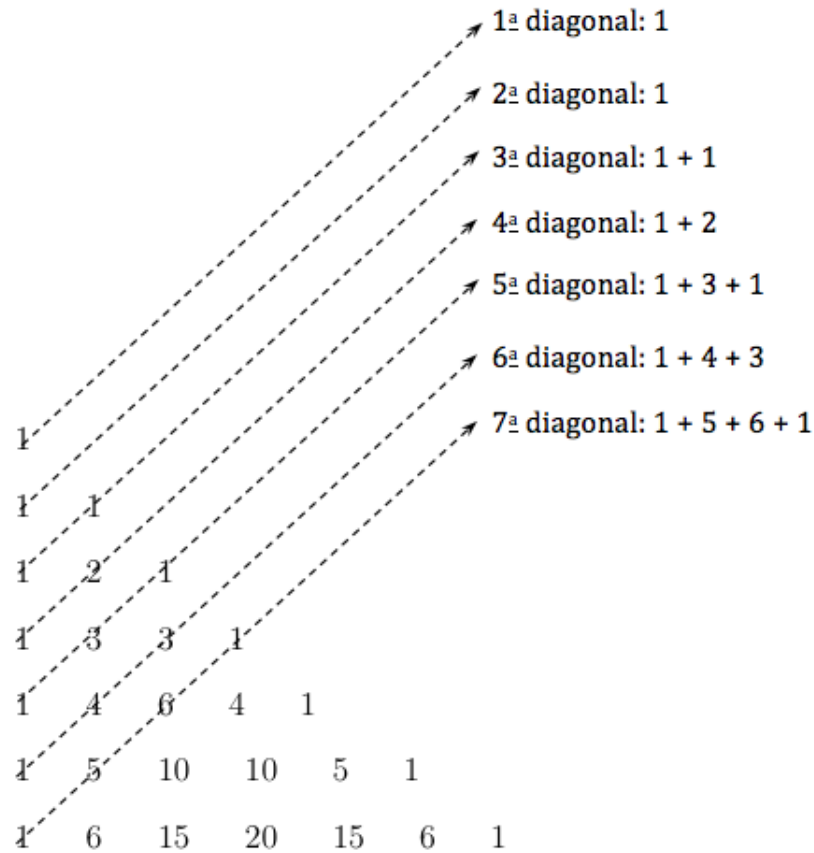
$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} + \binom{3}{3} & & & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} & \dots & \binom{n}{n} \\
 \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} & \binom{n+1}{4} & \dots & \binom{n+1}{p} & \binom{n+1}{p+1} & \dots & \binom{n+1}{n+1}
 \end{array}$$

e o triângulo de Pascal também pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 &
 \end{array}$$

É possível encontrar os números da sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal somando os elementos das diagonais. Lembrando que na sequência de Fibonacci os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo, a partir do terceiro, é soma dos dois imediatamente anteriores.

Figura 6 – Números de Fibonacci no triângulo de Pascal



Fonte: Elaborada pelo autor

A sequência formada pelas somas das diagonais é  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$  e estamos interessados em mostrar que esta sequência coincide com a sequência de Fibonacci dada por

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ se } n \text{ natural e } n > 2 \end{cases}$$

Escrevendo as diagonais em função dos números binomiais na forma  $\binom{n}{p}$ , temos:

- O 1º número de Fibonacci no triângulo de Pascal é  $\binom{0}{0}$ ;
- O 2º número de Fibonacci no triângulo de Pascal é  $\binom{1}{0}$ ;
- O 3º número de Fibonacci no triângulo de Pascal é  $\binom{2}{0} + \binom{1}{1}$ ;
- O 4º número de Fibonacci no triângulo de Pascal é  $\binom{3}{0} + \binom{2}{1}$ ;
- O 5º número de Fibonacci no triângulo de Pascal é  $\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$ .

Considerando  $D_n$  a soma dos elementos da  $n$ -ésima diagonal. Note que

$$D_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{0}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k},$$

usando a relação de Stifel, podemos escrever o somatório acima como soma de dois outros somatórios

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \binom{n-1-k-1}{k} + \binom{n-1-k-1}{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-2-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-3-(k-1)}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-2-k}{k} + \sum_{j=-1}^{n-2} \binom{n-3-j}{j} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2-k}{k} + \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-3-j}{j} \\ &= D_{n-1} + D_{n-2}, \end{aligned}$$

ou seja,  $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$  e as duas primeiras diagonais têm soma igual a 1, que é exatamente a seqüência  $F_n$  de Fibonacci.

Sobre o número de vezes que um determinado valor, diferente de 1, pode aparecer no triângulo de Pascal, a seguinte questão ainda não foi resolvida:

**Problema em Aberto 36 (Conjectura de Singmaster):** *Há um número natural  $n$  tal que nenhum número aparece mais do que  $n$  vezes no triângulo de Pascal?*

Em outras palavras, num triângulo de Pascal infinito, existe um limite para o número de aparições de um número natural diferente de 1?

Um número natural  $k$  só pode aparecer nas  $k$  primeiras linhas do triângulo de Pascal, uma vez que a partir da linha  $k+1$  todos os números são iguais a 1 ou maiores que  $k$ . Para solucionar a conjectura de Singmaster precisamos saber quantas vezes cada número aparece no triângulo de Pascal o que é uma tarefa fácil para números pequenos, como o 4 que aparece duas vezes na linha 4, mas para números grandes é muito trabalhoso, por exemplo, o número 3003 é o primeiro número a aparecer 8 vezes sendo duas vezes na linha 14, duas na 15, duas na 78 e duas na 3003.

### 3.3 Quadrados Mágicos

Nesta seção, abordaremos os quadrados mágicos que representam uma excelente ferramenta de aprendizagem capaz de desenvolver habilidades em relação à utilização de operações matemáticas.

**Definição 23:** Um **quadrado mágico** de ordem  $n$ , para todo  $n$  natural maior que 2, é uma tabela quadrada de números naturais distintos composta de  $n$  linhas e  $n$  colunas, tais que a soma de qualquer linha, coluna e diagonal dá sempre o mesmo valor  $k$ , chamado **constante mágica**.

Figura 7 – Quadrado mágico de ordem 3 com  $k = 36$

<b>36</b>				<b>36</b>
	9	14	13	<b>36</b>
	16	12	8	<b>36</b>
	11	10	15	<b>36</b>
<b>36</b>	<b>36</b>	<b>36</b>		

Fonte: elaborada pelo autor

Se os  $n^2$  números do quadrado mágico de ordem  $n$  estão sequenciados de 1 a  $n^2$ , a soma  $S$  de todos os números do quadrado mágico de ordem  $n$  pode ser encontrada usando a soma dos  $i$  primeiros termos de uma progressão aritmética, então

$$S = 1 + 2 + \dots + n^2 = \left( \frac{a_1 + a_i}{2} \right) \cdot i = \left( \frac{1 + n^2}{2} \right) \cdot n^2$$

e a constante mágica  $k$ , soma de cada linha, coluna ou diagonal, é  $k = \frac{S}{n}$ , ou seja,  $k = \left( \frac{1+n^2}{2} \right) \cdot n$ . Por exemplo, num quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9 a constante mágica é  $k = \left( \frac{1+3^2}{2} \right) \cdot 3 = 15$ .

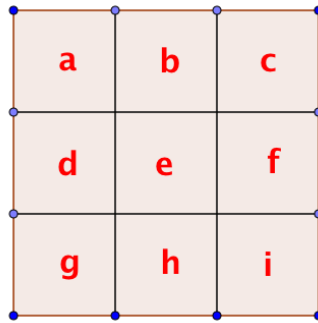
Figura 8 – Quadrado mágico de ordem 3 com  $k = 15$

<b>15</b>				<b>15</b>
	2	7	6	<b>15</b>
	9	5	1	<b>15</b>
	4	3	8	<b>15</b>
<b>15</b>	<b>15</b>	<b>15</b>		

Fonte: elaborada pelo autor

**Propriedades dos quadrados mágicos de ordem 3 numerado de 1 a 9:**  
Considerando o seguinte quadrado mágico, temos:

Figura 9 – Quadrado mágico de ordem 3 genérico



Fonte: elaborada pelo autor

1. O termo central é sempre igual a 5;

Observe que  $a + b + c = 15$  e  $g + h + i = 15$ . Somando estas duas equações, temos

$$a + b + c + g + h + i = 15 + 15$$

$$(a + i) + (c + g) + (b + h) = 30$$

mas  $a + i = c + g = b + h = 15 - e$ , portanto

$$15 - e + 15 - e + 15 - e = 30$$

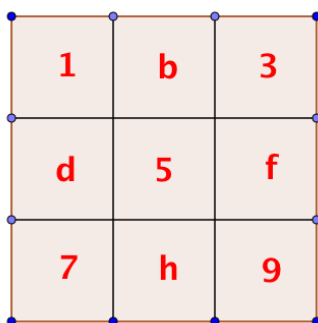
$$45 - 3e = 30$$

$$e = 5$$

2. Os cantos são sempre números pares;

Supondo, por absurdo, que os cantos são os ímpares 1, 3, 7 e 9 devemos colocar nos cantos opostos números que somem 10.

Figura 10 – Cantos do quadrado mágico de ordem 3



Fonte: elaborada pelo autor

Então, teríamos uma linha ou coluna com os números 1 e 3, o que é um absurdo, pois o maior valor que dispomos é 9 e  $1+3+9 = 13$  que é menor que a constante mágica 15, como também, os cantos opostos não podem ter paridades distintas, visto que a soma deles seria ímpar e quando somada ao termo central que é ímpar e igual a 5 seria par sendo diferente de 15 a constante mágica.

Assim, temos a seguinte solução para um quadrado mágico de ordem 3 com números sequenciados de 1 a 9 que podem gerar outras soluções através rotações e reflexões.

Figura 11 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fonte: elaborada pelo autor

Usando os números naturais consecutivos  $1, 2, \dots, n^2$  para preencher um quadrado mágico de ordem  $n$ , considerando que as rotações e reflexões de um quadrado mágico constituem o mesmo quadrado mágico, existem precisamente:

- Um único quadrado mágico de ordem 3;
- 880 quadrados mágicos de ordem 4;
- 275.305.224 quadrados mágicos de ordem 5;

Não se sabe o número exato de quadrados mágicos de ordem 6, mas foi estimado que seja da ordem de  $10^{19}$  (STEWART, 2009). O cálculo da quantidade de quadrados mágicos apresenta o seguinte problema não resolvido:

**Problema em Aberto 37:** *Qual a quantidade de quadrados mágicos de ordem  $n$  diferentes, a menos de simetria de rotação e reflexões, para todo  $n$  natural maior que 5?*

### 3.3.1 Quadrados mágicos de quadrados perfeitos

Existem quadrados mágicos em que todos os seus números são quadrados de números naturais, ou seja, quadrados perfeitos e o primeiro deles de ordem 4 foi encontrado por Leonhard Euler em 1770 (BOYER, 2005).

Figura 12 – Quadrado mágico de Euler de quadrados perfeitos de ordem 4

$68^2$	$29^2$	$41^2$	$37^2$
$17^2$	$31^2$	$79^2$	$32^2$
$59^2$	$28^2$	$23^2$	$61^2$
$11^2$	$77^2$	$8^2$	$49^2$

Fonte: <http://mathgardenblog.blogspot.com.br/2016/05/Euler-magic-square.html>

Sobre os quadrados mágicos de quadrados perfeitos existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 38:** *Encontrar um quadrado mágico de quadrados perfeitos de ordem 3.*

Este problema foi proposto pelo matemático Edouard Lucas em 1876 e alguns resultados chegaram perto. Por exemplo, o quadrado encontrado pelo matemático Lee Sallows.

Figura 13 – Quadrado de quadrados perfeitos de Lee Sallows de ordem 3

$127^2$	$46^2$	$58^2$
$2^2$	$113^2$	$94^2$
$74^2$	$82^2$	$97^2$

Fonte: <http://www.multimagie.com/English/SquaresOfSquares.htm>

Observe que este quadrado tem todas as linhas, colunas e uma diagonal com soma 21.609, mas a diagonal  $127^2 + 113^2 + 97^2 = 38.307$ , portanto não é mágico. Euler conseguiu encontrar o seguinte quadrado mágico em que apenas dois termos não são quadrados perfeitos:

Figura 14 – Quadrado mágico de Euler de ordem 3

$373^2$	$289^2$	$565^2$
360721	$425^2$	$23^2$
$205^2$	$527^2$	222121

Fonte: <http://www.multimagie.com/English/SquaresOfSquares.htm>



### 3.3.2 Quadrados mágicos de números primos

O primeiro quadrado mágico de ordem 3 formado apenas por números primos foi encontrado por Sayles em 1913 e possui constante mágica 177. (SHULDHAM, 1914).

Figura 15 – Quadrado mágico de números primos de Sayles

71	5	101
89	59	29
17	113	47

Fonte: <http://http://www.multimagie.com/English/BimagicPrimes.htm>

Considerando a progressão aritmética  $(a - 4r, a - 3r, a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r)$  de 9 termos, com  $a$  e  $r$  naturais, podemos dispor os seus termos num quadrado mágico de ordem 3 da seguinte forma:

Figura 16 – Quadrado mágico de ordem 3 de números em PA

$a-3r$	$a+2r$	$a+r$
$a+4r$	$a$	$a-4r$
$a-r$	$a-2r$	$a+3r$

Fonte: elaborada pelo autor

Em geral, os termos de uma progressão aritmética com  $n^2$  termos podem ser números de um quadrado mágico de ordem  $n$  e o **Teorema de 7**, do capítulo 2, de Green e Tao, afirma que existem progressões aritméticas de números primos de tamanhos arbitrários, portanto existem quadrados mágicos de números primos de ordem  $n$ , para todo  $n$  natural maior que 2. Por exemplo, o quadrado mágico de ordem 3 com números primos em progressão aritmética dada por  $210n - 11$ , com  $n$  natural e  $1 \leq n \leq 9$ .

Figura 17 – Quadrado mágico de ordem 3 de números primos em PA

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Fonte: elaborada pelo autor

### 3.4 Operações entre Conjuntos

**Definição 24:** Uma família  $F$  de conjuntos é dita **fechada** em relação à operação de união se a união de quaisquer dois conjuntos da família pertence à família  $F$ , ou seja,

$$A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F.$$

Por exemplo,

$$F_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

é uma família fechada formada por dois elementos 1 e 2 e composta por três conjuntos  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  e  $\{1, 2\}$  mas  $F_2 = \{\{3\}, \{4\}\}$  não é uma família fechada, visto que  $\{3\} \cup \{4\} = \{3, 4\} \notin F_2$ .

Sobre famílias de conjuntos fechadas em relação à união existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 39 (Conjectura de Peter Frankl):** Para qualquer família fechada finita  $F$  de conjuntos finitos, exceto  $\{\emptyset\}$ , existe um elemento que pertence a pelo menos metade dos conjuntos da família  $F$ ?

Em outras palavras, se  $m$  é o número de elementos, então existe um elemento que pertence a pelo menos  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  conjuntos de  $F$ , onde  $\lceil x \rceil$  denota o menor inteiro que é maior ou igual a  $x$ .

Por exemplo, dado o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  vamos pegar a família  $F$  dos subconjuntos de  $A$  que só tem números pares, ou seja,

$$F = \{ \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\} \}$$

A família formada pelos três elementos 2, 4 e 6 e composta por 7 conjuntos é fechada para a união, pois a união de quaisquer dois conjuntos que só possuem números pares também possuem números pares. Neste caso, cada elemento pertence a exatamente  $\lceil 7/2 \rceil = 4$  dos 7 subconjuntos de  $F$ , por exemplo, o número 2 pertence aos conjuntos

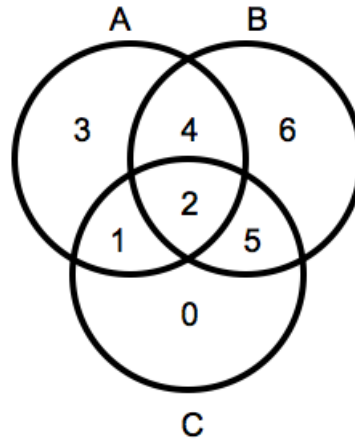
$$\{2\}, \{2,4\}, \{2,6\} \text{ e } \{2,4,6\}.$$

Um avanço importante deve-se à Maric, Zivkovic e Vuckovic (2012) que provaram a validade da conjectura para uma família fechada formada por até 12 elementos e composta por até 50 conjuntos.

### 3.4.1 O Diagrama de Venn

Os Diagramas de Venn são curvas fechadas simples desenhadas sobre um plano que constituem uma importante ferramenta para o estudo da Teoria de Conjuntos, permitindo a representação das relações de pertinência e inclusão. Por exemplo, vamos usar um diagrama de Venn para representar os conjuntos  $A=\{1,2,3,4\}$ ,  $B=\{2,4,5,6\}$  e  $C=\{0,1,2,5\}$ .

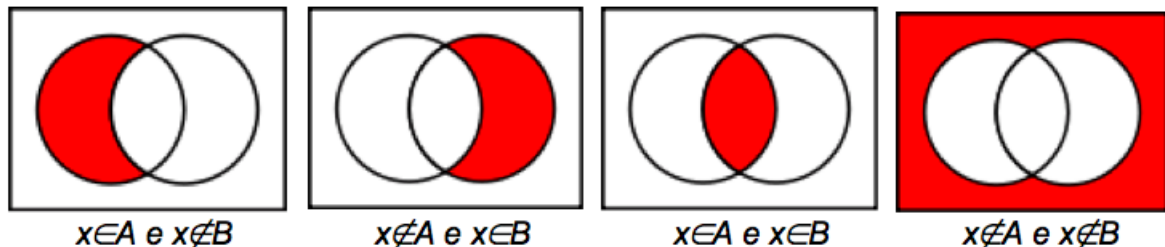
Figura 18 – Diagrama de Venn para 3 conjuntos



Fonte: elaborada pelo autor

Na representação por Diagrama de Venn as regiões internas comuns a dois ou mais conjuntos representam a interseção entre os conjuntos e a totalidade destas regiões internas de um ou mais conjuntos representa a união. Os diagramas de Venn possibilitam representar qualquer elemento envolvido no universo em que se está trabalhando, por exemplo se estamos trabalhando com dois conjuntos  $A$  e  $B$  subconjuntos de um conjunto universo  $U$ , teríamos as seguintes possibilidades para um elemento  $x$  de  $U$ :

Figura 19 – Diagramas de Venn para 2 conjuntos

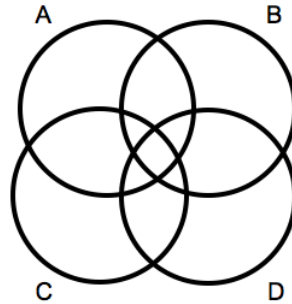


Fonte: elaborada pelo autor

Observe que no diagrama de Venn com dois conjuntos temos 4 regiões distintas, pois um elemento qualquer pode pertencer ou não a cada um dos conjuntos, ou seja, temos  $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$  possibilidades. Em geral um diagrama de Venn com  $n$  conjuntos possui  $2^n$  regiões distintas.

Para representar quatro ou mais conjuntos, torna-se difícil fazer um figura simples e simétrica que mostre todas as possibilidades, não sendo possível fazer apenas com círculos. Por exemplo, é comum tentar representar 4 conjuntos  $A, B, C$  e  $D$  da seguinte forma:

Figura 20 – Falsa representação para 4 conjuntos



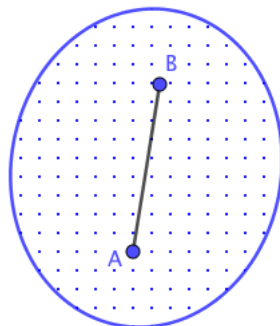
Fonte: elaborada pelo autor

Observe que não é um diagrama de Venn, pois não representa todas as  $2^4 = 16$  possibilidades e faltam as regiões dos elementos comuns apenas aos conjuntos  $A$  e  $D$  e dos elementos comuns apenas aos conjuntos  $B$  e  $C$ .

**Definição 25:** Uma região  $S$  do plano é **convexa** se, e somente se, o segmento determinado por dois pontos quaisquer dessa região estiver contido nela, ou seja,

$$\forall A, B \in S, \overline{AB} \subset S$$

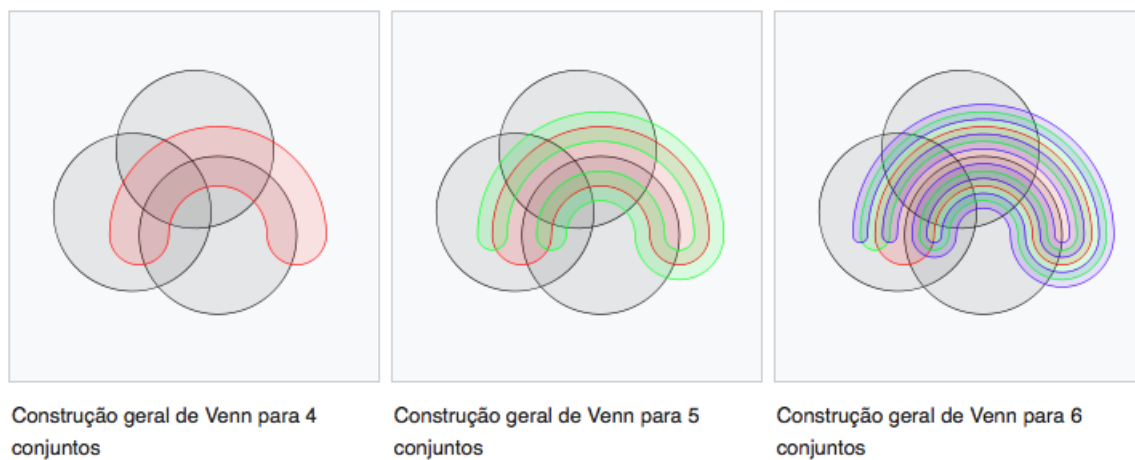
Figura 21 – Região convexa



Fonte: elaborada pelo autor

Existe um método, desenvolvido por Venn, que utiliza regiões não convexas capaz de representar todas as possibilidades para um número qualquer de conjuntos, em que cada curva sucessiva delimita um conjunto que intercepta todos os outros.

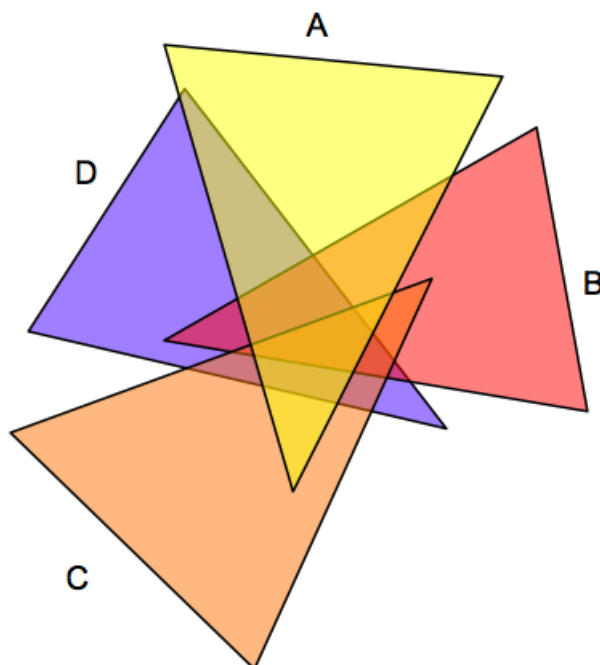
Figura 22 – Diagramas de Venn para 4, 5 ou 6 conjuntos



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama\\_de\\_Venn/media/File:Venn5.svg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn/media/File:Venn5.svg)

O uso de triângulos é alternativa para a representação usando apenas regiões convexas, por exemplo a representação com 4 conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  pode ser feita como na Figura 23 abaixo.

Figura 23 – Diagramas de Venn para 4 conjuntos com triângulos



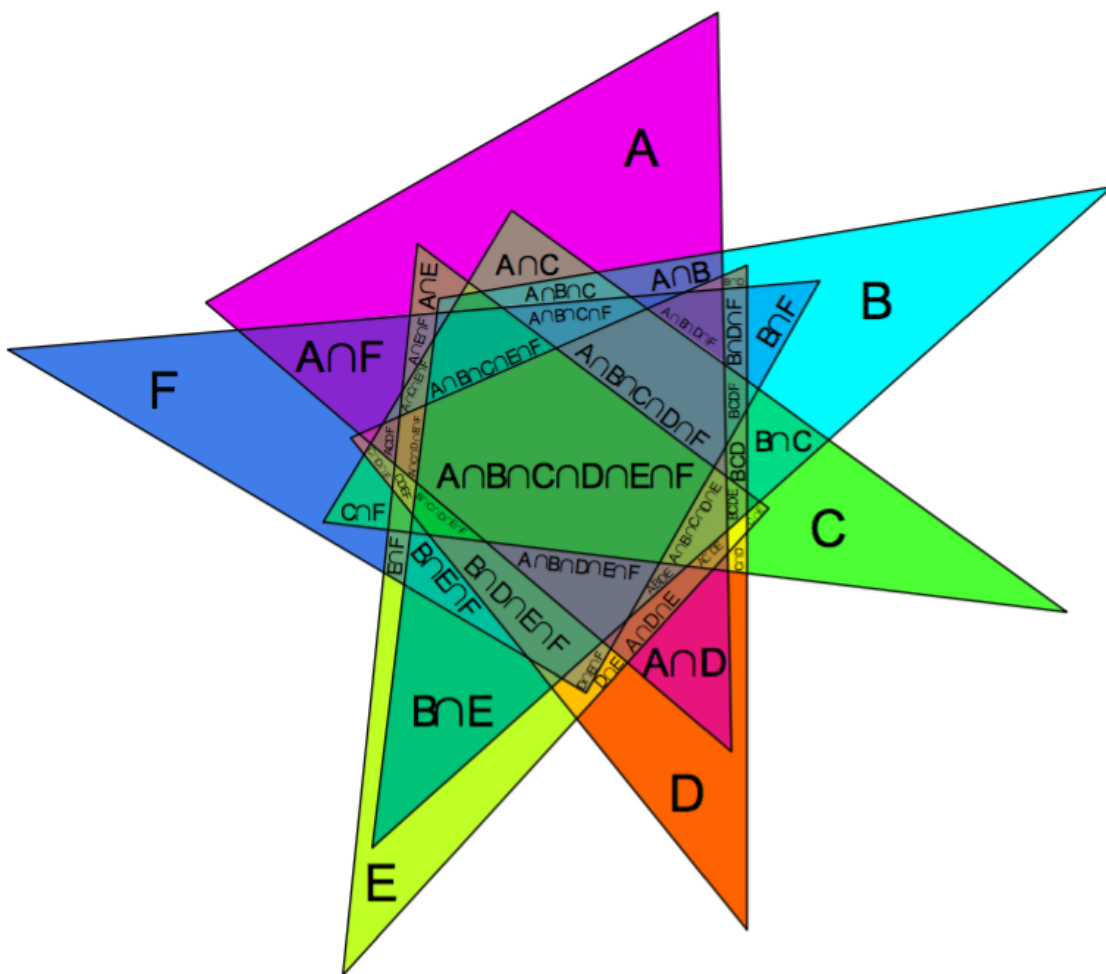
Fonte: Elaborada pelo autor

Sobre a representação por diagramas de Venn para conjuntos utilizando triângulos, temos a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 40:** *Encontrar um diagrama de Venn que se utilize apenas de triângulos para representar 8 conjuntos.*

Apresentamos aqui uma solução para o caso de 6 triângulos bastante elaborada por apresentar  $2^6 = 64$  regiões.

Figura 24 – Diagramas de Venn para 6 conjuntos com triângulos



Fonte: Jeremy J. Carroll

### 3.5 A Torre de Hanoi

É um jogo, criado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, formado por  $n$  discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base com três pinos. O objetivo do jogo consiste em transferir todos os discos inicialmente em um dos pinos para um outro pino sempre respeitando a regra de que nenhum disco com diâmetro maior esteja sobre um outro disco com diâmetro menor.

Figura 25 – Torre de Hanoi de 3 pinos



Fonte: Aritmética - Abramo Hefez

O questionamento mais comum é encontrar o número mínimo de movimentos para transferir os  $n$  discos de um pino para outro pino.

Enumerando os discos de 1 a  $n$  do menor para o maior e a quantidade  $Q_k$  movimentos para transferir os discos de 1 a  $k$  para um outro pino com  $1 \leq k \leq n$ . Observe que se forem transferidos os discos de 1 a  $n - 1$  para um outro pino com  $Q_{n-1}$  movimentos

Figura 26 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 1



Fonte: Aritmética - Abramo Hefez

precisamos de 1 movimento para transferir o disco  $n$  para um outro pino

Figura 27 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 2



Fonte: Aritmética - Abramo Hefez

e mais  $Q_{n-1}$  para transferir os discos de 1 a  $n - 1$  para o pino em que se encontra o disco  $n$

Figura 28 – Torre de Hanoi de 3 pinos - movimento 3



Fonte: Aritmética - Abramo Hefez

Usando o princípio da indução e esta ideia podemos deduzir uma fórmula para  $Q_n$ . No entanto, uma maneira prática é  $Q_n = Q_{n-1} + 1 + Q_{n-1}$  e se tivéssemos apenas um disco precisaríamos de apenas um movimento, então podemos escrever a seguinte relação:

$$Q_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2 \cdot Q_{n-1} + 1, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Explicitando a relação a anterior, concluí-se que o número mínimo de movimentos para resolver o problema da Torre de Hanoi, com  $n$  discos, é  $Q_n = 2^n - 1$ , para  $n \geq 1$ .

Uma outra forma de se obter uma fórmula explícita para  $Q_n$  é analisando quantas vezes se move cada um dos discos para, em seguida, somar todos esses movimentos. Então, note que:

- o disco  $n$  move-se apenas 1 vez (do poste inicial para o poste final);
- o disco  $n - 1$  tem de se mover o dobro das vezes que o disco  $n$  se move, isto é 2 vezes (uma para sair de cima do disco  $n$  e outra para voltar para cima do disco  $n$ );
- o disco  $n - 2$  tem de se mover o dobro das vezes que o disco  $n - 1$  se move, ou seja, 4 (uma para sair de cima do disco  $n - 1$  e outra para voltar para cima do disco  $n - 1$ , isto repetido tantas vezes quantas o disco  $n - 1$  se tem que mover).

Continuando este processo, concluí-se que o disco 1 se move o dobro das vezes do disco 2. Então,  $Q_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$ , segue que

$$2Q_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$2Q_n = -1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$2Q_n = -1 + Q_n + 2^n$$

$$Q_n = 2^n - 1$$

Concluimos que o número mínimo de movimentos para se transferir  $n$  discos de um pino para outro, sem que nenhum disco maior esteja sobre um disco menor, é  $2^n - 1$ .

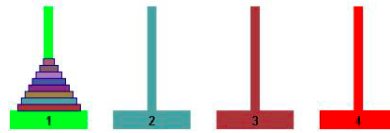
Apesar da solução do problema inicial da torre de Hanoi, existem variações do problema da torre de Hanoi que promoveram questões mais complexas e ainda não resolvidas. A variante mais conhecida é o acréscimo do número de pinos disponíveis para empilhar os discos (PEREIRA; RODRIGUES, 2003).

**Problema em Aberto 41:** *Considerando uma torre de Hanoi composta por 4 pinos A, B, C e D com n discos de diâmetros diferentes, inicialmente no pino A, encontrar o número mínimo de movimentos para transferir todos os discos para o pino D sem que nenhum disco maior esteja sobre o menor.*



Várias propostas de resolução já foram apresentadas, mas sem garantir um número mínimo de movimentos. Um dos algoritmos mais conhecidos, proposto por Frame-Stewart, baseia-se num parâmetro  $i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , e consiste nos seguintes passos:

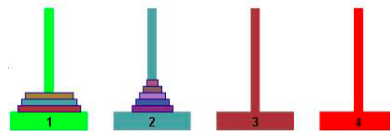
Figura 29 – Torre de Hanoi de 4 pinos



Fonte: Elaborada pelo autor

- 1º passo: Transferir a pilha dos  $n - i$  menores discos do primeiro pino para um poste auxiliar, usando os quatro pinos no processo;

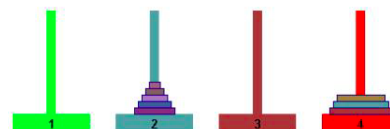
Figura 30 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 1



Fonte: Elaborada pelo autor

- 2º passo: Transferir a pilha dos restantes  $i$  discos maiores do primeiro pino para o poste destino, utilizando o algoritmo original das Torres de Hanoi com 3 pinos (ignorando o pino que contém os  $n - i$  discos menores);

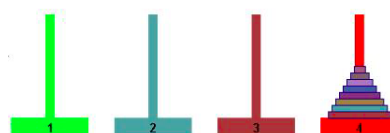
Figura 31 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 2



Fonte: Elaborada pelo autor

- 3º passo: Transferir os  $n - i$  discos menores do pino auxiliar para o pino final, utilizando novamente os quatro pinos no processo.

Figura 32 – Torre de Hanoi de 4 pinos - movimento 3



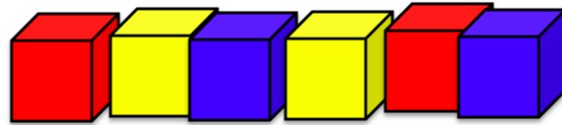
Fonte: Elaborada pelo autor

Garantir se o algoritmo acima minimiza o número de movimentos constitui na solução da chamada conjectura de Frame-Stewart, primeiros autores a apresentarem o algoritmo (RAND, 2018).

### 3.6 Os Cubos de Langford

O matemático escocês C. Dudley Langford estava observando o seu filho que brincava com três pares de cubos coloridos, dois de cada cor, quando percebeu que o seu filho arrumou os cubos de forma que entre os dois cubos amarelos, por exemplo, existia um cubo, entre os dois cubos azuis existiam dois cubos e entre os dois cubos vermelhos existiam três cubos (MAGELA, 2013).

Figura 33 – Cubos de Langford com 3 pares



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, Langford avaliou a configuração assumida pelos três pares de cubos e concluiu que essa é a única maneira possível, a exceção do caso simétrico, ou seja, obtido por reflexão da direita para a esquerda. Então, Langford se questionou se seria possível fazer o mesmo com mais cores. E descobriu ser possível com 4 pares de forma única a menos da sua reflexão da seguinte forma:

Figura 34 – Cubos de Langford com 4 pares



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma maneira alternativa de se pensar nestes arranjos é trocar cubos coloridos por números. Por exemplo, no caso de 3 pares (1,1,2,2,3,3), temos dois algarismos iguais a 1, dois algarismos iguais a 2 e dois algarismos iguais a 3 e o seguinte arranjo 3 1 2 1 3 2, observe que entre os algarismos iguais a 1 existe apenas um algarismo (2), entre os algarismos iguais a 2 existem dois algarismos (1 e 3) e entre os algarismos iguais a 3 existem três algarismos (1, 2 e 1). Chamaremos cada arranjo de arranjo de Langford.

**Problema em Aberto 42:** *Encontrar uma expressão para o número de arranjos dos  $n$  pares de números*

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n,$$

*tais que os números  $k$  e  $k$  estejam separados por  $k$  números, com  $1 \leq k \leq n$ .*

Para o caso de 4 pares (1,1,2,2,3,3,4,4), temos o seguinte arranjo 4 1 3 1 2 4 3 2, não existem arranjos para 5 ou 6 pares, conforme demonstraremos a seguir e para 7 pares existem as seguintes 26 soluções possíveis:

Tabela 10 – Arranjos de Langford para 7 pares

Arranjo de Langford
7 3 6 2 5 3 2 4 7 6 5 1 4 1
7 2 6 3 2 4 5 3 7 6 4 1 5 1
7 2 4 6 2 3 5 4 7 3 6 1 5 1
7 3 1 6 1 3 4 5 7 2 6 4 2 5
7 1 4 1 6 3 5 4 7 3 2 6 5 2
7 1 3 1 6 4 3 5 7 2 4 6 2 5
7 4 1 5 1 6 4 3 7 5 2 3 6 2
7 2 4 5 2 6 3 4 7 5 3 1 6 1
5 7 2 6 3 2 5 4 3 7 6 1 4 1
3 7 4 6 3 2 5 4 2 7 6 1 5 1
5 7 4 1 6 1 5 4 3 7 2 6 3 2
5 7 2 3 6 2 5 3 4 7 1 6 1 4
1 7 1 2 6 4 2 5 3 7 4 6 3 5
5 7 1 4 1 6 5 3 4 7 2 3 6 2
1 7 1 2 5 6 2 3 4 7 5 3 6 4
2 7 4 2 3 5 6 4 3 7 1 5 1 6
6 2 7 4 2 3 5 6 4 3 7 1 5 1
2 6 7 2 1 5 1 4 6 3 7 5 4 3
3 6 7 1 3 1 4 5 6 2 7 4 2 5
5 1 7 1 6 2 5 4 2 3 7 6 4 3
2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4
4 1 7 1 6 4 2 5 3 2 7 6 3 5
5 2 7 3 2 6 5 3 4 1 7 1 6 4
3 5 7 4 3 6 2 5 4 2 7 1 6 1
3 5 7 2 3 6 2 5 4 1 7 1 6 4
2 4 7 2 3 6 4 5 3 1 7 1 6 5

Fonte: <http://datagenetics.com/blog.html> - Nick Berry

Se num arranjo de Langford, para algum valor de  $n$ , o elemento  $k$  estiver numa posição  $a_k$ , então o outro elemento  $k$  estará numa posição  $b_k = a_k + k + 1$ . Somando todas as posições dos  $2n$  elementos, temos

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n.$$

Substituindo  $b_k$  por  $a_k + k + 1$  e usando a soma dos termos de uma progressão aritmética no segundo membro da equação acima, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n (a_k + k + 1) &= \left(\frac{1+2n}{2}\right) \cdot 2n \\ \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 &= \left(\frac{1+2n}{2}\right) \cdot 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{k=1}^n a_k + \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n + \left(\frac{1+1}{2}\right) \cdot n &= \left(\frac{2+4n}{2}\right) \cdot n \\
2 \cdot \sum_{k=1}^n a_k &= \left(\frac{3n-1}{2}\right) \cdot n \\
\sum_{k=1}^n a_k &= \left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n
\end{aligned}$$

o primeiro membro da equação acima é um número inteiro positivo, pois todas as posições  $a_k$  são números inteiros, então o segundo membro da equação

$$\left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n$$

deve ser um número inteiro positivo.

Quando dividimos um número natural por 4 existem quatro restos possíveis 0, 1, 2 ou 3. Então, todo inteiro  $n$  é expresso de uma das quatro formas  $4t$ ,  $4t+1$ ,  $4t+2$  ou  $4t+3$ , com  $t$  inteiro. Assim, temos:

- se  $n = 4t$  com  $t \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n = \left(\frac{3 \cdot 4t - 1}{4}\right) \cdot 4t = (12t - 1) \cdot t \in \mathbb{Z}$$

- se  $n = 4t + 1$  com  $t \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n = \left[\frac{3 \cdot (4t+1) - 1}{4}\right] \cdot (4t+1) = \frac{(6t+1)(4t+1)}{2} \notin \mathbb{Z}$$

- se  $n = 4t + 2$  com  $t \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n = \left[\frac{3 \cdot (4t+2) - 1}{4}\right] \cdot (4t+2) = \frac{(12t+5)(2t+1)}{2} \notin \mathbb{Z}$$

- se  $n = 4t + 3$  com  $t \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left(\frac{3n-1}{4}\right) \cdot n = \left[\frac{3 \cdot (4t+3) - 1}{4}\right] \cdot (4t+3) = (3t+2)(4t+3) \in \mathbb{Z}$$

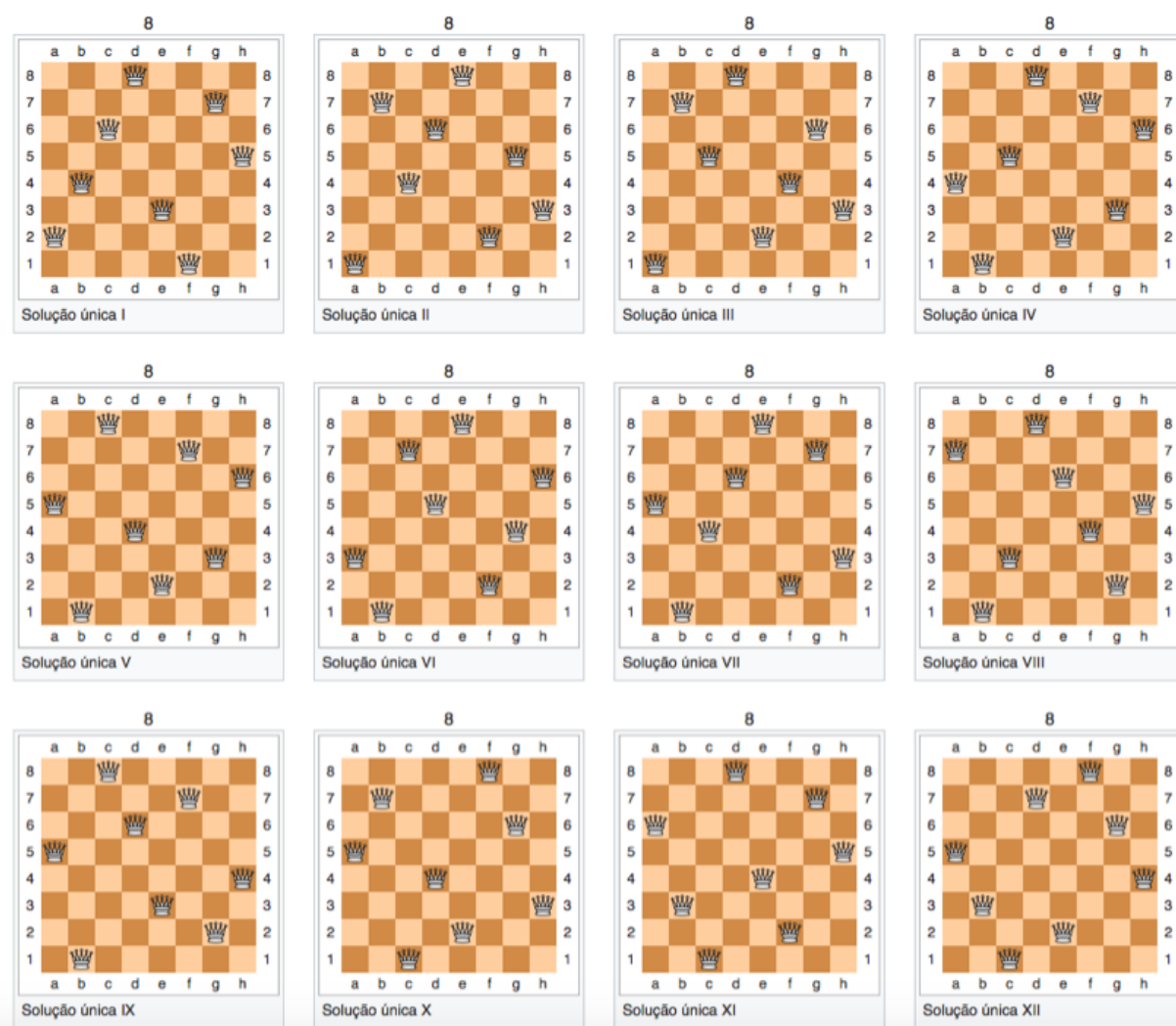
Concluimos que se existe um arranjo de Langford com  $n$  pares, então  $n$  dividido por 4 deixa resto 0 ou 3, o que demonstra não existir arranjos com 5 ou 6 pares.

## 3.7 O Problema das Rainhas

Imagine colocar 8 rainhas num tabuleiro de xadrez de dimensão 8x8 de forma que nenhuma delas se confrontem, ou seja, quaisquer duas rainhas não podem estar numa mesma linha, coluna ou diagonal.

O matemático cego Franz Nauck resolveu o quebra-cabeças por completo em 1850. O enigma conta com 92 soluções: 12 delas são básicas, e as 80 restantes são obtidas por giros e simetrias.

Figura 35 – Soluções do problema das 8 rainhas



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema\\_das\\_oito\\_damas](https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_das_oito_damas)

**Problema em Aberto 43:** *Encontre uma maneira de não confrontar 1000 rainhas em um tabuleiro de xadrez com dimensões 1000×1000.*

Em agosto de 2017 a Universidade de St. Andrews, na Escócia, e o Clay Mathematics Institute, nos Estados Unidos, se uniram para anunciar uma competição com um prêmio de US\$ 1 milhão para quem conseguir resolver essa questão (RUBIO, 2017).

Quando expandimos o problema das rainhas para tabuleiros maiores a sua solução fica exponencialmente mais complexa. Por este motivo, a busca por um algoritmo capaz de solucionar o problema para um número grande de rainhas é essencial, pois o desafio vai além de um mero problema teórico sem qualquer aplicação prática. Caso solucionado, pesquisadores acreditam que o algoritmo capaz de resolver o problema das rainhas também poderia solucionar outros problemas considerados impossíveis envolvendo criptografia, com inúmeras aplicações práticas; uma delas seria, por exemplo, tornar a navegação na internet mais segura e difícil de ser interceptada.

### 3.8 As Frações Egípcias

Nesta seção, falaremos sobre **fração egípcia** que é uma fração ou soma de frações unitárias da forma  $\frac{1}{n}$ . Por exemplo,

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

As frações tiveram origem no Egito antigo e surgiram da necessidade de se medir as terras após as enchentes. A medição das terras era feita esticando cordas e verificando o número de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. No entanto, na maioria das vezes, a medição dificilmente resultava em um número inteiro de cordas o que originou a criação dos números fracionários que eram representados com o uso de frações, porém os egípcios só entendiam a fração como uma unidade, ou seja, frações cujo numerador é igual a 1. Quando as frações não eram unitárias, expressavam em forma de adição de frações unitárias. (BOYER, 1996, p. 13).

Dada uma fração  $\frac{a}{b}$  é possível fazer sua decomposição em frações egípcias utilizando o seguinte procedimento:

- Escreve-se o denominador  $b$  em um produto de dois fatores  $p$  e  $q$ , ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{p \cdot q}$$

- Sendo  $r = \frac{p+q}{a}$ , decompõe-se a fração da seguinte forma:

$$\frac{a}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot r} + \frac{1}{q \cdot r}$$

Se  $r$  não for inteiro, o procedimento precisa ser reaplicado nas frações encontradas até encontrar todas as frações na forma  $\frac{1}{n}$ .

Por exemplo, considerando a fração

$$\frac{2}{21} = \frac{2}{3 \cdot 7},$$

então

$$r = \frac{3+7}{2} = 5.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{2}{21} &= \frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 5} \\ \frac{2}{21} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

A principal razão de se representar as frações desta forma está ligada à operação de divisão e para entender melhor, vamos analisar os seguintes exemplos:

**Exemplo 5:** *Como dividir a quantidade de grãos contida em 5 sacos de feijão por 8 pessoas?*

Se tivéssemos 4 sacos, cada pessoa receberia a metade de cada saco. Assim, cada uma das 8 pessoas recebe a metade de um saco e sobra um único saco que dividido por 8 dá mais um oitavo de um saco para cada um, portanto cada pessoa recebe  $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ .

**Exemplo 6:** *Numa festa em que o número de convidados superou o número de bolos existiam 58 bolos para 87 convidados. Como dividir os bolos igualmente entre os convidados?*

Note que se dividirmos cada bolo ao meio ficamos com  $58 \times 2 = 116$  metades que são suficientes para os 87 convidados. Dando uma metade para cada convidado sobram  $116 - 87 = 29$  metades que se dividirmos em três partes iguais obtemos  $29 \cdot 3 = 87$  metades divididas por três, ou seja, 87 sextos. Assim, cada um dos 87 convidados receberá  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$  de cada bolo e o número  $\frac{58}{87} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ .

A escrita de uma fração qualquer em frações unitárias deu origem a vários problemas, alguns deles muito difíceis e alguns em aberto, por exemplo, em 1948, os matemáticos Paul Erdős e Ernst Straus enunciaram a seguinte questão:

**Problema em Aberto 44 (Conjectura de Erdős-Straus):** *Provar que qualquer que seja o número natural  $n > 1$  existem naturais  $a, b$  e  $c$ , tais que*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Alguns pesquisadores exigem que os denominadores das frações unitárias  $a, b$  e  $c$  sejam distintos entre si escrevendo a escrevem o problema da seguinte forma:

**Problema em Aberto 45:** *Provar que qualquer que seja o número natural  $n > 5$  existem naturais distintos  $a, b$  e  $c$ , tais que*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

O fato é que para  $n = 2$ , temos  $\frac{4}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  de forma única, mas  $a, b$  e  $c$  não são distintos entre si e para  $n > 2$  se existir solução para  $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , com  $a, b$  e  $c$  naturais, então existe solução  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , com  $x, y$  e  $z$  naturais distintos, por exemplo,

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Thomas Hagedorn, em 2000, demonstrou que para todo natural  $n$  ímpar, não divisível por 3, existem naturais ímpares  $x, y$  e  $z$ , distintos entre si, tais que  $\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  (MACHIAVELO, 2007).

### 3.9 A Sequência de Kolakoski

**Definição 26:** *A sequência de Kolakoski é uma sequência autogeradora infinita formada por blocos de dígitos 1 ou 2 em que um bloco é um dígito ou par de dígitos diferentes do dígito usado no bloco anterior.*

Vamos construir uma sequência utilizando apenas os seguintes procedimentos:

1. Leia os dígitos sequencialmente;
2. Se o dígito for 1, então o próximo bloco possui um dígito senão possui dois dígitos.

Para construir a sequência, comece com o dígito 1 que consiste no primeiro bloco e dá a informação que o próximo bloco só terá um dígito 2, dando a sequência 12. Agora, o 2 significa que o próximo bloco terá dois dígitos 1, então anexe 11 e obtenha 1211. O terceiro dígito 1 diz que o quarto bloco tem um dígito 2, assim como o quarto dígito 1 diz que o quinto bloco tem um dígito 2, ou seja, a sequência fica 121121. Assim, obtemos a sequência

1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----



e para obtermos a sequência de Kolakoski precisamos repetir o segundo dígito 2 para obter o terceiro e ficar com a sequência

$$\boxed{1 \mid 2 \ 2 \mid 1 \ 1 \mid 2 \mid 1 \ 2 \ 2 \mid 1 \mid 2 \ 2 \mid 1 \ 1 \mid 2 \mid 1 \ 1 \mid \dots}$$

Observe que em cada dígito ocorre uma "execução" de um ou dois termos consecutivos, e escrever os comprimentos dessas execuções dá exatamente a mesma sequência:

$$\underbrace{1}_1, \underbrace{2, 2}_2, \underbrace{1, 1}_2, \underbrace{2}_1, \underbrace{1}_1, \underbrace{2, 2}_2, \underbrace{1}_1, \underbrace{2, 2}_2, \underbrace{1, 1}_2, \underbrace{2}_1, \underbrace{1, 1}_2, \dots$$

Sobre esta sequência existem as seguintes questões não resolvidas:

**Problema em Aberto 46:** Sendo  $k_n$  o  $n$ -ésimo termo da sequência de Kolakoski encontrar uma expressão geral para  $k_n$ .

**Problema em Aberto 47:** Na sequência de Kolakoski a frequência de dígitos 1 é igual a de dígitos 2?



## 4 PROBLEMAS EM ABERTO DE GEOMETRIA

A Geometria surgiu nas civilizações antigas através da experimentação para suprir necessidades cotidianas relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros, sendo usada para cálculo de perímetros, áreas e volumes. Euclides (300 a.C.), em sua obra *Os Elementos*, apresentou a geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva, em que cada afirmação deveria ser deduzida de outras mais simples de maneira lógica e sucessiva.

Os problemas geométricos sempre despertaram o interesse das pessoas e os mais marcantes objetivavam construções com uma régua não graduada e um compasso, sendo conhecidos como: “Os três problemas clássicos de Geometria”. Eles são:

- a quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual ao de um círculo dado;
- a duplicação do cubo: construir um cubo com volume igual ao dobro do volume de um cubo dado;
- a trissecção do ângulo: dividir um ângulo qualquer em três partes com medidas iguais.

A busca pela solução destes problemas promoveu o desenvolvimento da geometria Euclidiana, levando a descobertas, das quais destacamos as cônicas e curvas cúbicas. Pierre Laurent Wantzel, em 1837, provou a impossibilidade da solução dos três problemas clássicos somente com régua e compasso (BARBOSA; ASSIS NETO, 2011).

Apesar da origem remota a Geometria Euclidiana não está totalmente pronta e várias questões ainda permanecem sem solução. Assim, apresentaremos, neste capítulo, alguns problemas em aberto de Geometria Euclidiana acompanhados de um desenvolvimento teórico e de algumas soluções parciais se existirem.

Alguns tópicos básicos de Geometria não serão discutidos por serem usuais aos estudantes do ensino médio, e para uma abordagem completa o leitor pode consultar o volume 2 da coleção *Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana* de Muniz Neto (2012).

### 4.1 Triângulos

Nesta seção, abordaremos propriedades e problemas em aberto sobre triângulos.

**Definição 27:** Um *triângulo*  $ABC$  é um polígono de três lados, denotado por  $\triangle ABC$ , que tem por vértices os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , por lados os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  e por ângulos internos os ângulos  $\angle ABC$  (ou  $\widehat{ABC}$ ),  $\angle BCA$  (ou  $\widehat{BCA}$ ) e  $\angle CAB$  (ou  $\widehat{CAB}$ ).

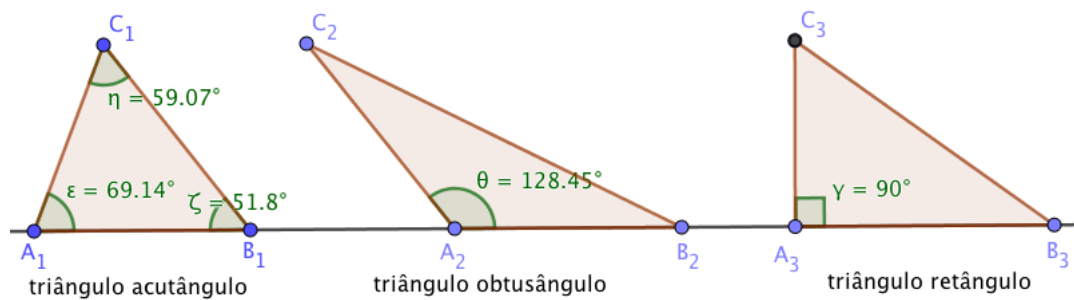
Quanto à medida de seus lados um triângulo pode ser classificado em:

- equilátero, se possui os três lados com medidas iguais;
- isósceles, se possui dois lados com medidas iguais;
- escaleno, se não possui lados com medidas iguais.

Quanto à medida de seus ângulos internos um triângulo pode ser classificado em:

- acutângulo, se possui os três ângulos internos agudos, ou seja, com medidas menores que  $90^\circ$ ;
- retângulo, se possui um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo com medida  $90^\circ$ . Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados *catetos*;
- obtusângulo, se possui um ângulo interno obtuso, ou seja, um ângulo com medida maior que  $90^\circ$ .

Figura 36 – Classificação de um triângulo quanto aos ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

Em geometria a noção de congruência está associada a mesmo tamanho e forma, ou seja, através de movimentos rígidos podemos sobrepor as duas figuras congruentes e estabelecer uma correspondência entre seus pontos. É importante ressaltar que figuras congruentes não são necessariamente iguais, por exemplo, se considerarmos um segmento de reta  $\overline{AB}$  com medida 3 cm e um outro segmento de reta  $\overline{CD}$  medindo 3 cm, os conjuntos de pontos destes dois segmentos são desiguais. Assim, dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida, como também, dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida.

**Definição 28:** Dois triângulos são congruentes (símbolo  $\equiv$ ) se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes.

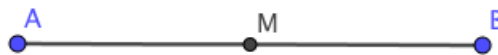
A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas seis condições são congruências entre os três lados e entre os três ângulos, mas existem condições mínimas chamadas de casos de congruência que estabelecem a congruência entre triângulos a partir de três elementos congruentes. Esses casos de congruência são:

- 1º caso (LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses lados, então eles são congruentes;
- 2º caso (ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes;
- 3º caso (LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

A demonstração destes casos de congruência pode ser feita admitindo-se a validade de um deles e os outros serem obtidos como consequências.

**Definição 29:** Um ponto  $M$  é o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$  se, e somente se,  $M$  pertence a  $\overline{AB}$  e  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ .

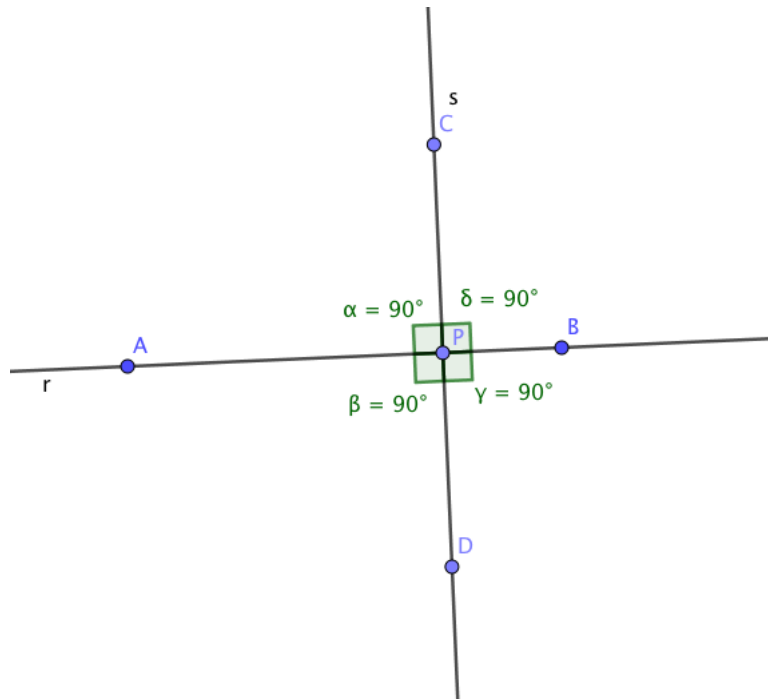
Figura 37 – Ponto médio de um segmento



Fonte: Elaborada pelo autor

**Definição 30:** Duas retas são **perpendiculares** quando são concorrentes e formam quatro ângulos congruentes.

Figura 38 – Retas perpendiculares

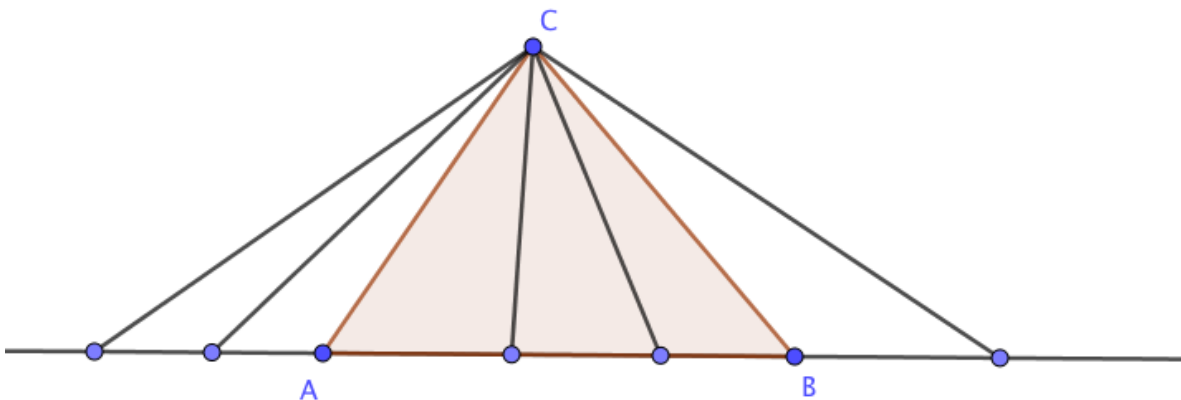


Fonte: Elaborada pelo autor

Se as retas são perpendiculares, então formam ângulos com medidas  $90^\circ$ .

**Definição 31:** *Ceviana* de um triângulo é o segmento com extremidades em um dos vértices do triângulo e em um ponto da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

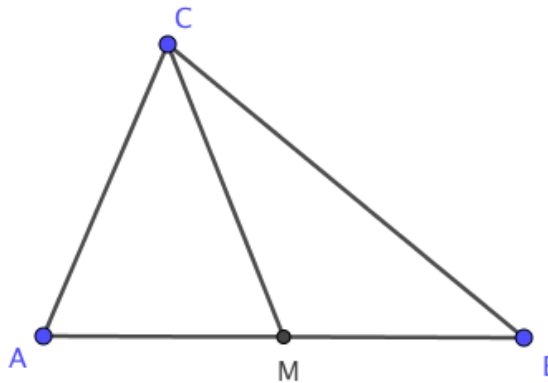
Figura 39 – Cevianas do vértice C de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

**Definição 32:** *Mediana* de um triângulo é a ceviana com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

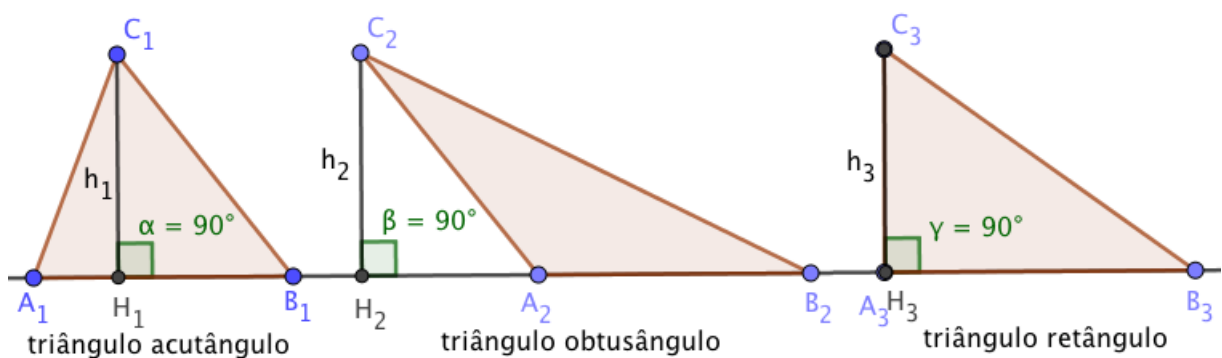
Figura 40 – Mediana de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

**Definição 33:** *Altura* de um triângulo é a ceviana com extremidade num vértice do triângulo perpendicular à reta suporte do lado oposto a este vértice. Esse lado é chamado de base da altura e o ponto de interseção entre a altura e o seu lado ou seu prolongamento é chamado pé da altura.

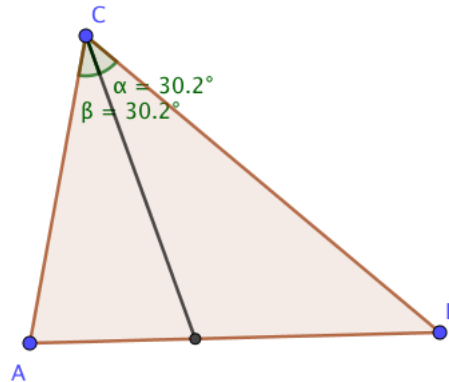
Figura 41 – Altura de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

**Definição 34:** *Bissetriz Interna* de um triângulo é a ceviana de que divide o ângulo interno desse vértice em dois ângulos congruentes.

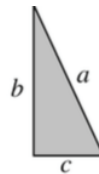
Figura 42 – Bissetriz interna de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

**Teorema 20 (O Teorema de Pitágoras):** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

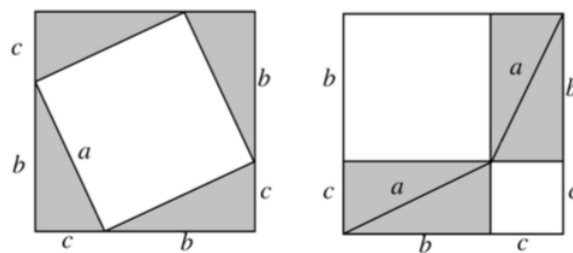
**Demonstração:** Dado um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ ,

Figura 43 – Triângulo retângulo com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

considere um quadrado de lado  $b + c$  e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo retângulo dado como mostra a figura 44.

Figura 44 – Demonstração do teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborada pelo autor



Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado  $b + c$  quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $a$ . Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado  $b + c$  os quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $b$  e um quadrado de lado  $c$ . Logo, a área do quadrado de lado  $a$  é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem  $b$  e  $c$ . ■

De outra forma, a área do quadrado de lado  $b + c$  é igual a soma da área do quadrado de lado  $a$  com a área de quatro triângulos retângulos de catetos  $b$  e  $c$ , ou seja,

$$\begin{aligned}(b + c)^2 &= a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} \\ b^2 + 2 \cdot bc + c^2 &= a^2 + 2 \cdot bc \\ b^2 + c^2 &= a^2. \blacksquare\end{aligned}$$

**Definição 35:** Uma **tripla Pitagórica**  $(x, y, z)$  consiste de três números naturais  $x, y$  e  $z$  tais que  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Se os números  $x, y$  e  $z$  não possuem, simultaneamente, divisor comum a tripla é chamada primitiva. A tripla primitiva mais comum é a  $(3, 4, 5)$  que origina uma infinidade de outras triplas não-primitivas da forma  $(3k, 4k, 5k)$  com  $k > 1$  inteiro, por exemplo  $(6, 8, 10)$ .

**Lema 5:** Dada uma tripla pitagórica primitiva  $(x, y, z)$ , então  $x$  e  $y$  têm paridades distintas e  $z$  é ímpar.

**Demonstração:** Se  $x$  e  $y$  são ambos pares, então  $x^2$  e  $y^2$  são pares, logo a soma  $x^2 + y^2 = z^2$  é par e  $z$  é par, assim,  $(x, y, z)$  não é uma tripla pitagórica primitiva, pois  $x, y$  e  $z$  têm 2 como divisor comum. Observe que  $x$  e  $y$  não podem ser ambos ímpares, ou seja, da forma  $2k + 1$  para algum  $k$  natural, pois

$$\begin{aligned}z^2 &= (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 \\ &= 4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1 + 2k_2 + 1),\end{aligned}$$

então  $z^2$  é par, mas não é múltiplo de 4, o que é um absurdo, pois sendo  $z^2$  par, temos  $z$  também é par, ou seja,  $z = 2k$  para algum  $k$  natural e, conseqüentemente,  $z^2 = (2k)^2 = 4k^2$  é múltiplo de 4. Resumindo, em toda tripla pitagórica primitiva  $(x, y, z)$ , temos que  $x$  ou  $y$  é par e o outro ímpar e, conseqüentemente,  $z$  é ímpar. ■

**Lema 6:** Se  $v$  e  $u$  são números naturais, com  $v > u$ ,  $\text{mdc}(v, u) = 1$  e de paridades diferentes, então:

$$a) \text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 - u^2) = 1;$$

$$b) \text{mdc}(2vu, v^2 + u^2) = 1;$$

$$c) \text{mdc}(2vu, v^2 - u^2) = 1.$$

**Demonstração:** Para o item  $a)$ , vamos usar o Lema de Euclides:

$$\text{mdc}(v^2, v^2 + u^2) = \text{mdc}(v^2, v^2 + u^2 - v^2) = \text{mdc}(v^2, u^2) = 1,$$

pois  $\text{mdc}(v, u) = 1$ . Calculando

$$\text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 - u^2) = \text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 + u^2 + v^2 - u^2)$$

$$\text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 - u^2) = \text{mdc}(v^2 + u^2, 2v^2),$$

como  $\text{mdc}(v^2, v^2 + u^2) = 1$ , segue que

$$\text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 - u^2) = \text{mdc}(v^2 + u^2, 2),$$

mas  $v$  e  $u$  têm paridades diferentes, portanto  $v^2 + u^2$  é ímpar e não tem 2 como divisor. Então,

$$\text{mdc}(v^2 + u^2, v^2 - u^2) = 1.$$

Para os itens  $b)$  e  $c)$ , observe que

$$\text{mdc}(u, v^2 + u^2) = \text{mdc}(u, v^2 + u^2 - u \cdot u) = \text{mdc}(u, v^2) = 1,$$

analogamente,  $\text{mdc}(v, v^2 + u^2) = 1$ . Agora, temos

$$\text{mdc}(u, v^2 + u^2) = \text{mdc}(v, v^2 + u^2) = \text{mdc}(2, v^2 + u^2) = 1,$$

então,

$$\text{mdc}(2vu, v^2 + u^2) = 1$$

Procedendo da mesma forma, temos

$$\text{mdc}(u, v^2 - u^2) = \text{mdc}(v, v^2 - u^2) = \text{mdc}(2, v^2 - u^2) = 1$$

então,

$$\text{mdc}(2vu, v^2 - u^2) = 1 \blacksquare$$

**Teorema 21:** *A tripla de números naturais  $(x, y, z)$  é uma tripla pitagórica primitiva se, e somente se, é da forma*

$$x = 2uv, y = u^2 - v^2 \text{ e } z = u^2 + v^2$$

*$u$  e  $v$  são números naturais primos entre si que possuem paridades distintas.*

**Demonstração:**( $\Rightarrow$ ) Se  $(x, y, z)$  uma tripla pitagórica primitiva, então

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^2 = z^2 - y^2$$

$$x^2 = (z - y)(z + y)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $y$  e  $z$  são ímpares, pois, pelo **Lema 5**,  $x$  e  $y$  têm paridades distintas e  $z$  é ímpar, portanto  $z - y$  e  $z + y$  são pares, ou seja, existem  $k_1$  e  $k_2$  naturais tais que  $z - y = 2k_1$  e  $z + y = 2k_2$ . Mas  $y$  e  $z$  são primos entre si, portanto o maior divisor natural comum entre  $z - y$  e  $z + y$  é 2 e, conseqüentemente,  $k_1 = \frac{z-y}{2}$  e  $k_2 = \frac{z+y}{2}$  são primos entre si também.

Observe que  $x^2 = (z - y)(z + y)$ , ou seja,  $(z - y)(z + y)$  é um quadrado de um número natural, então, pelo Teorema Fundamental da Aritmética,  $\frac{z-y}{2}$  e  $\frac{z+y}{2}$  são quadrados de números naturais. Assim, considere  $u$  e  $v$  naturais tais que

$$\frac{z - y}{2} = v^2 \text{ e } \frac{z + y}{2} = u^2,$$

logo  $z = u^2 + v^2$ ,  $y = u^2 - v^2$  e  $x^2 = (z - y)(z + y) = 2u^2 \cdot 2v^2 = 4u^2v^2 \Rightarrow x = 2uv$  com  $u$  e  $v$  primos entre si.

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente,  $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$  é uma tripla pitagórica, pois

$$(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 = 4u^2v^2 + v^4 - 2u^2v^2 + u^4$$

$$= v^4 + 2v^2u^2 + u^4$$

$$= (v^2 + u^2)^2. \blacksquare$$

Os números naturais  $x = 2vu$ ,  $z = u^2 + v^2$  e  $y = u^2 - v^2$  são dois a dois primos entre si, como mostrado no **Lema 6**. Então, podemos encontrar triplas pitagóricas dando valores para  $u$  e  $v$ , por exemplo,

Tabela 11 – Triplas pitagóricas

$u$	$v$	$y = u^2 - v^2$	$x = 2uv$	$z = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29

Fonte: elaborada pelo autor

Considerando  $(a, b, c)$  e  $(x, y, z)$  duas triplas pitagóricas tais que  $a^2 + b^2 = c^2$  e  $x^2 + y^2 = z^2$ , podemos produzir uma terceira tripla pitagórica da seguinte forma:  
 $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (cz)^2$

A justificativa é a seguinte:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = c^2 \cdot z^2$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = c^2z^2$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 = c^2z^2$$

$$(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = c^2z^2$$

Por exemplo, as triplas  $(3,4,5)$  e  $(15,8,17)$  produzem a tripla  $(13,84,85)$ .

## 4.2 A Fórmula de Herão

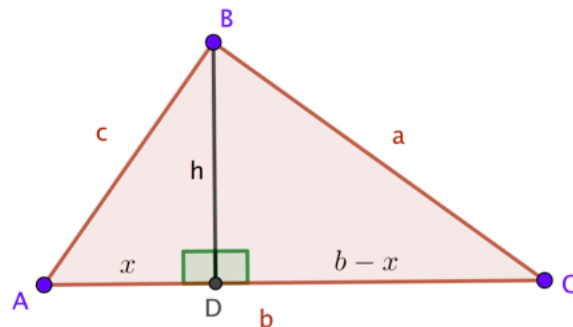
É possível calcular a área de um triângulo em função das medidas de seus três lados usando a expressão encontrada por Herão de Alexandria (10 d.C.- 80d.C.).

**Teorema 22 (Fórmula de Herão):** A área  $S$  de um triângulo com lados medindo  $a, b$  e  $c$  é dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ sendo } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ o semiperímetro do triângulo.}$$

**Demonstração:** Considerando um triângulo de lados medindo  $a, b$  e  $c$  e  $h$  altura relativa ao lado que mede  $b$ , a área  $S = \frac{bh}{2}$ . Assim, vamos encontrar  $h$  em função de  $a, b$  e  $c$ .

Figura 45 – A fórmula de Herão



Fonte: Elaborada pelo autor

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $ABD$  e  $BCD$ , temos

$$\begin{cases} \Delta ABD : x^2 + h^2 = c^2 \\ \Delta BCD : (b-x)^2 + h^2 = a^2, \end{cases}$$

desenvolvendo a segunda equação do sistema acima, temos

$$\begin{aligned} b^2 - 2bx + x^2 + h^2 &= a^2 \\ b^2 - 2bx + c^2 &= a^2 \\ x &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \end{aligned}$$

substituindo na primeira equação do sistema,

$$\begin{aligned} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2 + h^2 &= c^2 \\ h^2 &= c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2, \end{aligned}$$

usando que a diferença entre dois quadrados é o produto da soma pela diferença, segue que

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \cdot \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \\ h^2 &= \left(\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b}\right) \cdot \left[\frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2b}\right] \\ h^2 &= \left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b}\right] \cdot \left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}\right] \\ h^2 &= \left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b}\right] \cdot \left[\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}\right], \end{aligned}$$

fazendo  $a + b + c = 2p$ , temos

$$\begin{aligned} h^2 &= \left[\frac{2p(2p-2a)}{2b}\right] \cdot \left[\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{2b}\right] \\ h^2 &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2} \\ h &= 2 \cdot \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \end{aligned}$$

e a área

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \blacksquare$$

**Definição 36:** Um triângulo é dito **heroniano** se possui como medida de seus lados e de sua área números inteiros positivos.

Por exemplo, o triângulo com lados medindo 13, 14 e 15 é heroniano, pois sua área é

$$S = \sqrt{21 \cdot (21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

**Teorema 23:** Todo triângulo retângulo cujos lados têm medidas inteiras é heroniano.

**Demonstração:** Dado um triângulo retângulo de lados com medidas inteiras  $a, b$  e  $c$ , sendo  $b$  e  $c$  os catetos e  $a$  sua hipotenusa. A área  $S$  do triângulo é  $S = \frac{bc}{2}$ , o triângulo é heroniano se o produto dos catetos  $bc$  é par. Provamos no **Lema 5** que se  $(b, c, a)$  é tripla pitagórica primitiva, então  $b$  e  $c$  têm paridades diferentes e  $a$  é ímpar, portanto  $b$  ou  $c$  é par e  $S$  é um número inteiro, mas se  $(b, c, a)$  não for uma tripla pitagórica primitiva, eliminamos os fatores comuns de  $a, b$  e  $c$  e ficamos com uma tripla pitagórica primitiva. ■

Um triângulo que tem todos os lados com medidas racionais  $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$  e  $\frac{m_3}{n_3}$ , pode ser alterado, em escala, e transformado num triângulo de lados com medidas inteiras, multiplicando-se as medidas dos seus lados pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores  $n_1, n_2$  e  $n_3$  das frações que representam as medidas de seus lados.

Existe uma maneira, proposta por Carmichael em 1915 (BUCHHOLZ, 1989), capaz de gerar triângulos heronianos dada por:

**A parametrização de Carmichael:** Para inteiros  $m, n$  e  $k$  tais que  $m$  e  $n$  são primos entre si,  $m \geq n \geq 1$  e  $mn > k^2 \geq \frac{m^2 n}{2m + n}$ , o triângulo com lados medindo  $a, b$  e  $c$  onde

$$\begin{aligned} a &= n(m^2 + k^2), \\ b &= m \cdot (n^2 + k^2) \text{ e} \\ c &= (m + n) \cdot (mn - k^2) \end{aligned}$$

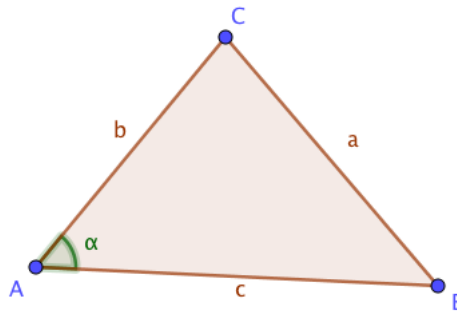
é heroniano.

Por exemplo, para  $m = 2, n = 1$  e  $k = 1$ , temos lados medindo 5, 4 e 3 e área 6.

**Teorema 24 (A Lei dos Cossenos):** Para um triângulo  $ABC$  com lados medindo  $a, b, c$  opostos aos vértices  $A, B, C$  respectivamente, tem-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

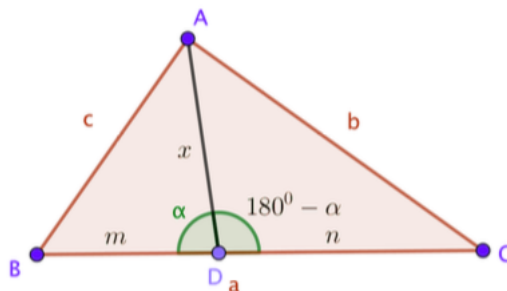
Figura 46 – A lei dos cossenos



Fonte: Elaborada pelo autor

**Teorema 25 (A relação de Stewart):** Considerando um triângulo  $ABC$  com lados medindo  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$  e  $x$  a medida do segmento  $\overline{AD}$ , chamado ceviana, onde  $D$  é um ponto do lado  $\overline{BC}$ , temos  $x^2 \cdot a + a \cdot m \cdot n = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n$ .

Figura 47 – Relação de Stewart



Fonte: Elaborada pelo autor

**Demonstração:** Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ , temos

$$\begin{cases} \Delta ABD : c^2 = x^2 + m^2 - 2 \cdot x \cdot m \cdot \cos(\alpha) \\ \Delta ACD : b^2 = x^2 + n^2 - 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos(180^\circ - \alpha). \end{cases}$$

Usando que  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ , temos

$$\begin{cases} \Delta ABD : c^2 = x^2 + m^2 - 2 \cdot x \cdot m \cdot \cos(\alpha) \\ \Delta ACD : b^2 = x^2 + n^2 + 2 \cdot x \cdot n \cdot \cos(\alpha), \end{cases}$$

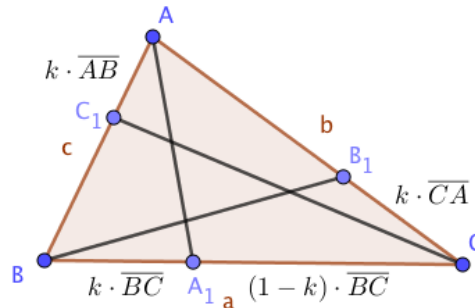
multiplicando a primeira equação  $n$ , a segunda por  $m$  e somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}
 nc^2 + mb^2 &= nx^2 + mx^2 + nm^2 + mn^2 \\
 &= (n + m)x^2 + mn(m + n) \\
 &= ax^2 + mna. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Uma aplicação interessante da relação de Stewart é a seguinte questão:

**Problema 5:** Num triângulo  $ABC$  de lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , considerando pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  que dividem, respectivamente os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo numa mesma razão, determinar o menor valor para a expressão  $(\overline{AA_1})^2 + (\overline{BB_1})^2 + (\overline{CC_1})^2$ .

Figura 48 – Triângulo com lados divididos na mesma razão  $k$



Fonte: Elaborada pelo autor

**Resolução:** Sendo  $k > 0$  e usando que  $\overline{BA_1} = k \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{CB_1} = k \cdot \overline{CA}$  e  $\overline{AC_1} = k \cdot \overline{AB}$ , podemos aplicar a relação de Stewart no triângulo  $\Delta ABC$  com o segmento  $\overline{AA_1}$

$$\begin{aligned}
 (\overline{AA_1})^2 \cdot a + a \cdot k \cdot a \cdot (1 - k) \cdot a &= b^2 \cdot k \cdot a + c^2 \cdot (1 - k) \cdot a \quad (\text{simplicando por } a), \\
 (\overline{AA_1})^2 + k(1 - k)a^2 &= kb^2 + c^2(1 - k) \\
 (\overline{AA_1})^2 &= c^2(1 - k) + kb^2 - k(1 - k)a^2.
 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos encontrar

$$(\overline{BB_1})^2 = a^2(1 - k) + kc^2 - k(1 - k)b^2 \text{ e } (\overline{CC_1})^2 = b^2(1 - k) + ka^2 - k(1 - k)c^2,$$

adicionando as três equações, encontramos

$$(\overline{AA_1})^2 + (\overline{BB_1})^2 + (\overline{CC_1})^2 = (k^2 - k + 1) \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

observando a expressão acima, o termo  $T = k^2 - k + 1$  possui valor mínimo quando  $k = \frac{1}{2}$ , pois é uma função quadrática que tem valor mínimo no vértice igual a  $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ . Assim,

$$(\overline{AA_1})^2 + (\overline{BB_1})^2 + (\overline{CC_1})^2 \geq \left(\frac{3}{4}\right) \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Observe a seguinte questão não resolvida, apresentada num artigo de Smarandache (2010), sobre problemas em aberto de geometria elementar:



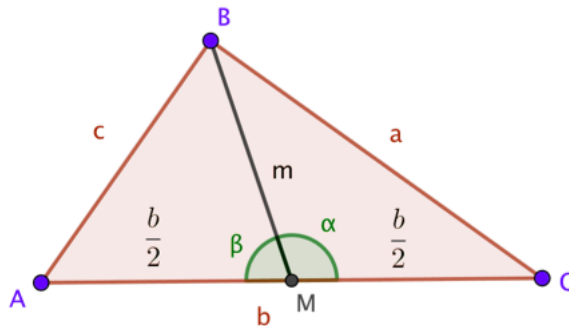
**Problema em Aberto 48:** Se  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são pontos que dividem os lados  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$  de um polígono numa dada razão, determine o menor valor da expressão

$$(\overline{P_1A_1})^2 + (\overline{P_2A_2})^2 + \dots + (\overline{P_nA_n})^2.$$

### Medianas de um triângulo

Considerando um triângulo cujos lados medem  $a, b$  e  $c$  e  $m$  a medida da mediana relativa ao lado que mede  $b$ , podemos aplicar a relação de Stewart no triângulo  $ABC$  e para obter a medida da mediana  $m$ .

Figura 49 – Medida de uma mediana de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\begin{aligned} m^2 \cdot b + b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} &= a^2 \cdot \frac{b}{2} + c^2 \cdot \frac{b}{2} \\ 4m^2 &= 2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2 \\ m &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}. \end{aligned}$$

Uma questão interessante é a de encontrar triângulos com lados e medianas com medidas inteiras, por exemplo o triângulo com lados medindo  $a = 136, b = 170$  e  $c = 174$  cujas medianas medem 158, 131 e 127, mas a sua área não é um número inteiro, portanto não é heroniano.

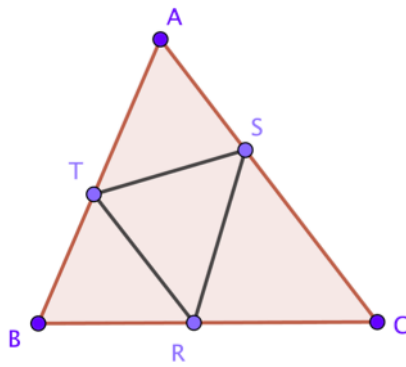
**Problema em Aberto 49:** Encontrar um triângulo heroniano em que as medianas têm medidas expressas por números inteiros positivos.

Os maiores avanços para este problema se devem a Buchholz e Rathbun (1997) que encontraram um conjunto infinito de triângulos heronianos com duas medianas inteiras, por exemplo o triângulo com lados medindo  $a = 52, b = 102$  e  $c = 146$  tem medianas  $4\sqrt{949}, 97$  e  $35$  e área  $S = 560$ .

Um problema interessante proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766) é o de inscrever num triângulo acutângulo um outro triângulo com o menor perímetro possível (PERALTA, 1994).

**Problema 6 (O problema de Fagnano):** *Encontrar num triângulo acutângulo  $ABC$  um triângulo inscrito  $RST$  de perímetro mínimo, ou seja, estamos interessados que a soma  $\overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TR}$  seja mínima.*

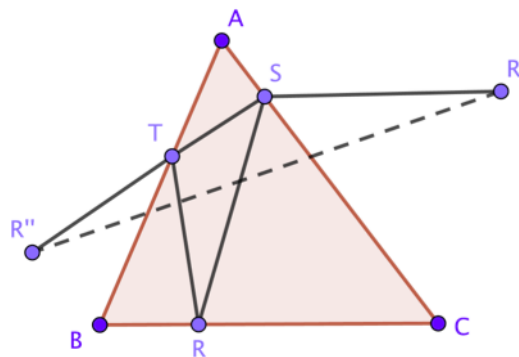
Figura 50 – O problema de Fagnano



Fonte: Elaborada pelo autor

**Resolução:** Considere  $R'$  o ponto simétrico de  $R$  em relação à reta  $AC$  e  $R''$  o ponto simétrico de  $R$  em relação à reta  $AB$

Figura 51 – Parte 1 da resolução da problema de Fagnano

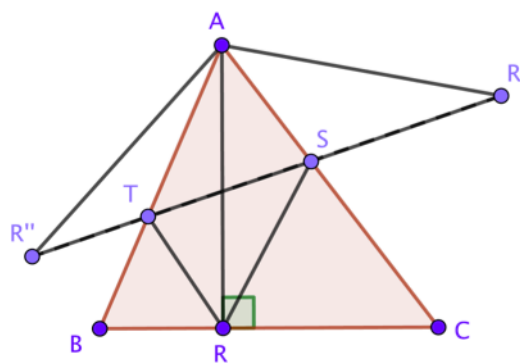


Fonte: Elaborada pelo autor

e note que  $\overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TR} = \overline{R'S} + \overline{ST} + \overline{TR''}$  será mínimo quando os pontos  $R', S, T$  e  $R''$  estiverem alinhados.

Pela simetria dos pontos  $R'$  e  $R''$ , temos  $\overline{AR'} \equiv \overline{AR} \equiv \overline{AR''}$  e o ângulo  $\angle R'AR''$  mede o dobro da medida do ângulo  $\angle BAC$ , então o triângulo  $AR'R''$  é isósceles de base  $\overline{R'R''}$  e o ângulo  $\angle BAC$  deve ser agudo. Como também, a existência dos pontos  $T$  e  $S$  está condicionada ao fato do triângulo  $ABC$  ser acutângulo. Então,  $\overline{R'R''}$  será mínimo quando  $\overline{AR}$  for mínimo, isto acontece quando  $\overline{AR}$  for perpendicular a  $\overline{BC}$ , ou seja,  $\overline{AR}$  é uma das alturas do triângulo  $ABC$ . Assim, o triângulo  $RST$ , inscrito no triângulo  $ABC$ , tem perímetro mínimo quando  $R, S$  e  $T$  são os pés das alturas do triângulo.

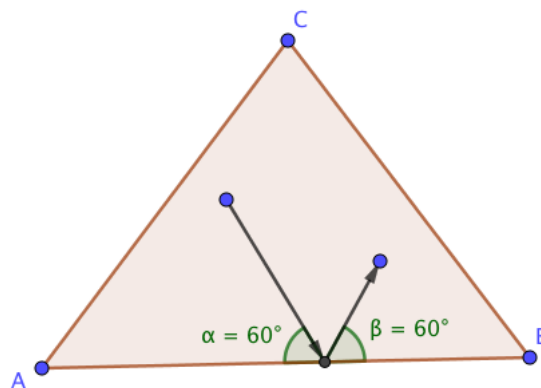
Figura 52 – Parte 2 da resolução da problema de Fagnano



Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando uma mesa de bilhar triangular existe uma questão interessante com aplicações em sistemas dinâmicos que é a de encontrar uma trajetória triangular periódica para uma partícula que ao tocar a borda da mesa de bilhar se reflete segundo o ângulo de incidência.

Figura 53 – Reflexão de uma partícula num bilhar triangular



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que para uma mesa de bilhar no formato de um triângulo acutângulo o triângulo de perímetro mínimo encontrado na resolução do **Problema de Fagnano** é uma trajetória triangular periódica, mas para um triângulo obtusângulo a seguinte questão encontra-se não resolvida:

**Problema em Aberto 50:** *Existe pelo menos uma trajetória triangular periódica para uma partícula que se movimenta num bilhar com o formato de um triângulo obtusângulo?*

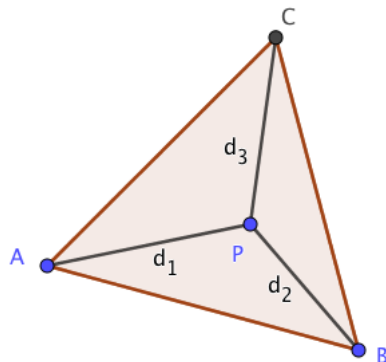
Schwartz (2008) com auxílio computacional provou a existência de uma trajetória triangular periódica para triângulos com ângulo obtuso de no máximo de 100 graus. Mesmo sendo afirmativa a existência de uma trajetória periódica um questionamento natural é sobre a quantidade de trajetórias periódicas não resolvido até mesmo para triângulos acutângulos.

### 4.3 Pontos com Distâncias Racionais aos Vértices de um Polígono

Encontrar pontos no interior de um polígono cujas distâncias a todos os seus vértices sejam números racionais é um problema que não está solucionado para todo tipo de polígono, então, nesta seção, apresentaremos a solução para o caso do triângulo equilátero de lado 1 e discutiremos algumas condições para o caso do quadrado de lado 1.

**Problema 7:** *Considerando um triângulo equilátero  $ABC$ , de lado  $n$  natural, e  $P$  um ponto do seu interior, com  $\overline{PA} = d_1$ ,  $\overline{PB} = d_2$  e  $\overline{PC} = d_3$ , encontrar  $P$ , tal que  $d_1, d_2$  e  $d_3$  são inteiros positivos.*

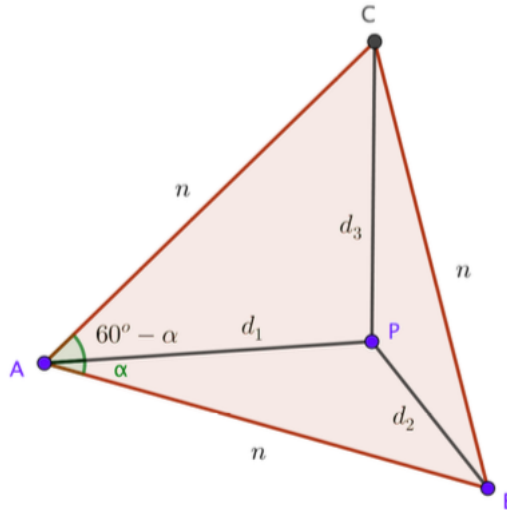
Figura 54 – Ponto no interior de um triângulo equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor

**Resolução:** Aplicando a Lei dos Cossenos nos triângulos  $ABP$  e  $ACP$ , temos

Figura 55 – Ponto no interior de um triângulo equilátero - Resolução



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\begin{cases} \Delta ABP : d_2^2 = n^2 + d_1^2 - 2 \cdot n \cdot d_1 \cdot \cos(\alpha) \\ \Delta ACP : d_3^2 = n^2 + d_1^2 - 2 \cdot n \cdot d_1 \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \end{cases}$$

Isolando os termos trigonométricos em cada equação:

$$\cos(\alpha) = \frac{n^2 + d_1^2 - d_2^2}{2nd_1} \quad \text{e} \quad \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{n^2 + d_1^2 - d_3^2}{2nd_1},$$

usando que  $\cos(60^\circ - \alpha) = \cos(60^\circ) \cdot \cos(\alpha) + \sin(60^\circ) \cdot \sin(\alpha) = \frac{\cos(\alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha)}{2}$ , temos

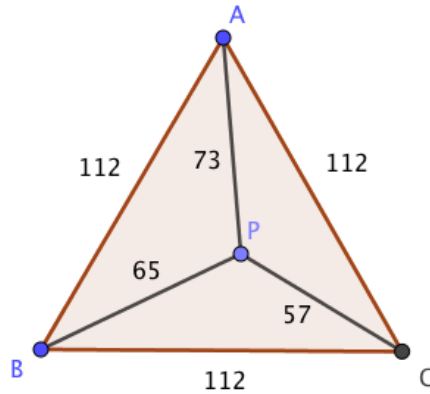
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\alpha) &= \frac{n^2 + d_1^2 - d_3^2}{2nd_1} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + d_1^2 - d_2^2}{2nd_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\alpha) &= \frac{n^2 + d_1^2 - d_3^2}{2nd_1} \\ \sin(\alpha) &= \frac{n^2 + d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2}{2nd_1\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

substituindo as expressões de  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$  na relação fundamental da trigonometria  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ , segue que

$$\left( \frac{n^2 + d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2}{2nd_1\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{n^2 + d_1^2 - d_2^2}{2nd_1} \right)^2 = 1.$$

Encontrar um ponto no interior de um triângulo equilátero de lado medindo  $n$  com distâncias inteiras aos seus vértices equivale a encontrar valores inteiros positivos  $d_1, d_2$  e  $d_3$  que satisfaçam a esta última relação e também condições para que seja um ponto do interior do triângulo. Uma solução para  $n = 112$  é  $d_1 = 57, d_2 = 65$  e  $d_3 = 73$  (MARTINEZ, 2009).

Figura 56 – Ponto no interior do triângulo equilátero de lado 112

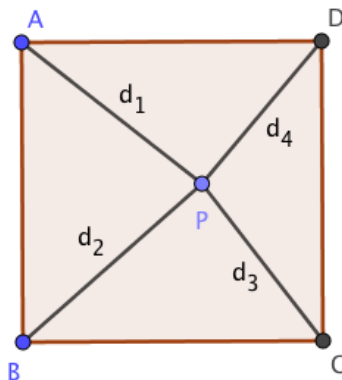


Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, podemos afirmar que existe ponto no interior de um triângulo equilátero de lado 1 cujas distâncias aos seus vértices são números racionais com  $d_1 = \frac{57}{112}, d_2 = \frac{65}{112}$  e  $d_3 = \frac{73}{112}$ .

**Problema em Aberto 51:** *Encontrar um ponto do plano cujas distâncias aos quatro vértices de um quadrado de lado unitário sejam números racionais.*

Figura 57 – Ponto no interior de um quadrado

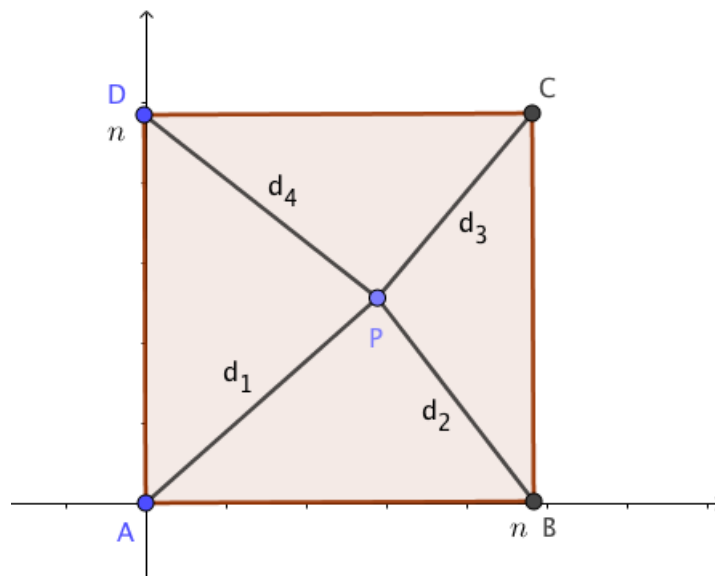


Fonte: Elaborada pelo autor

Encontrar um ponto no interior de um quadrado de lado 1 cujas distâncias aos vértices sejam racionais equivale a encontrar um ponto no interior de um quadrado de lado inteiro positivo  $n$  em que as distâncias  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  aos vértices sejam expressas por números inteiros positivos, pois se existir tal ponto basta dividir as distâncias inteiras encontradas por  $n$  para se obter as distâncias racionais  $\frac{d_1}{n}, \frac{d_2}{n}, \frac{d_3}{n}$  e  $\frac{d_4}{n}$  de um ponto do interior de um quadrado de lado 1 aos seus vértices.

Se considerarmos um quadrado de lado inteiro positivo  $n$  com vértices nos pontos  $(0, 0), (n, 0), (n, n)$  e  $(0, n)$  de um sistema cartesiano de coordenadas, podemos encontrar as distâncias  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  de um ponto  $P(x, y)$  aos vértices do quadrado de lado  $n$  usando o Teorema de Pitágoras e obtendo as seguintes relações:

Figura 58 – Quadrado de lado  $n$  num sistema cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\begin{cases} (1): d_1^2 = x^2 + y^2 \\ (2): d_2^2 = (n - x)^2 + y^2 \\ (3): d_3^2 = (n - x)^2 + (n - y)^2 \\ (4): d_4^2 = x^2 + (n - y)^2 \end{cases}$$

Note que se adicionarmos as equações (1) e (3), obtemos a mesma soma das equações (2) e (4), portanto  $d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$ . Desenvolvendo os produtos notáveis nas relações (3) e (4), obtemos

$$(2): d_2^2 = (n - x)^2 + y^2 \Rightarrow d_2^2 = x^2 + y^2 - 2xn + n^2 \Rightarrow 2xn = d_1^2 - d_2^2 + n^2$$

$$(4): d_4^2 = x^2 + (n - y)^2 \Rightarrow d_4^2 = x^2 + n^2 - 2yn + y^2 \Rightarrow 2yn = d_1^2 - d_4^2 + n^2,$$

mas

$$\begin{aligned}
(2nd_1)^2 &= 4n^2 \cdot d_1^2 \\
&= 4n^2 \cdot (x^2 + y^2) \\
&= 4n^2 \cdot x^2 + 4n^2 y^2 \\
&= (2nx)^2 + (2ny)^2 \\
&= (d_1^2 - d_2^2 + n^2)^2 + (d_1^2 - d_4^2 + n^2)^2.
\end{aligned}$$

Usando que  $d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$ , temos

$$d_1^2 - d_4^2 = d_2^2 - d_3^2 \quad \text{e} \quad d_1^2 - d_2^2 = d_4^2 - d_3^2,$$

portanto

$$(2nd_1)^2 = (d_4^2 - d_3^2 + n^2)^2 + (d_2^2 - d_3^2 + n^2)^2.$$

Encontrar um ponto com distâncias  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  inteiras aos vértices de um quadrado de lado  $n$  inteiro equivale a encontrar soluções inteiras que satisfaçam as seguintes equações:

$$d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2 \quad \text{e} \quad (2nd_1)^2 = (d_2^2 - d_3^2 + n^2)^2 + (d_4^2 - d_3^2 + n^2)^2,$$

como também, condições para que o ponto com estas distâncias aos vértices esteja no interior do quadrado e não foi descoberto.

Podemos interpretar a equação

$$(2nd_1)^2 = (d_2^2 - d_3^2 + n^2)^2 + (d_4^2 - d_3^2 + n^2)^2,$$

como um tripla pitagórica do tipo  $a^2 = b^2 + c^2$  e buscar soluções inteiras positivas. Por exemplo, se considerarmos um quadrado de lado  $n = 4$  e  $d_1 = 5$ , temos

$$\begin{aligned}
(2 \cdot 4 \cdot 5)^2 &= (d_2^2 - d_3^2 + 4^2)^2 + (d_4^2 - d_3^2 + 4^2)^2 \\
(40)^2 &= (d_2^2 - d_3^2 + 16)^2 + (d_4^2 - d_3^2 + 16)^2
\end{aligned}$$

tentando associar ao triplo pitagórico (40, 32, 24) podemos fazer  $d_2 = 5$  e  $d_3 = 3$  para obter

$$\begin{aligned}
(40)^2 &= (5^2 - 3^2 + 16)^2 + (d_4^2 - 3^2 + 16)^2 \\
(40)^2 &= (25 - 9 + 16)^2 + (d_4^2 - 9 + 16)^2 \\
(40)^2 &= (32)^2 + (d_4^2 + 7)^2
\end{aligned}$$



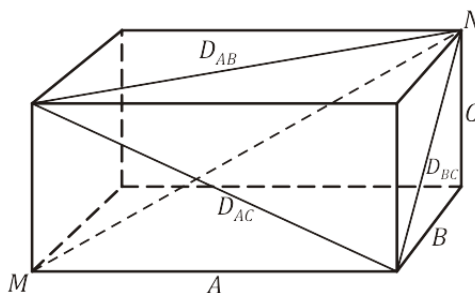
e para  $d_4^2 + 7 = 24$  encontramos  $d_4 = \sqrt{17}$  que não é inteiro. Assim, conseguimos apenas três distâncias racionais, visto que  $d_1 = 5$ ,  $d_2 = 5$ ,  $d_3 = 3$  e  $d_4 = \sqrt{17}$ . Outro detalhe importante é que estas distâncias encontradas não satisfazem a equação  $d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$ .

Existe uma infinidade de pontos do interior de um quadrado de lado 1 que possuem três distâncias racionais aos seus vértices e encontrar estes pontos equivale a encontrar soluções inteiras que satisfazem apenas a equação  $(2nd_1)^2 = (d_2^2 - d_3^2 + n^2)^2 + (d_4^2 - d_3^2 + n^2)^2$ , mas para a quarta distância ser racional é necessário que a equação  $d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$  também seja satisfeita (SHARMA, 2015).

## 4.4 O Tijolo de Euler

**Definição 37:** *O tijolo de Euler é um paralelepípedo reto-retângulo em que todas as arestas e diagonais das faces têm medidas expressas por números inteiros positivos.*

Figura 59 – Tijolo de Euler



Fonte: <http://www.obaricentrodamente.com/2015/07/o-tijolo-de-euler.html>

Encontrar tijolos de Euler é uma aplicação natural de triplas pitagóricas, pois todas as faces do sólido são retângulos e as medidas de suas diagonais são encontradas através do teorema de Pitágoras. O menor tijolo de Euler já encontrado tem arestas  $A = 240$ ,  $B = 117$  e  $C = 44$  e diagonais das faces  $D_{AB} = 267$ ,  $D_{AC} = 244$  e  $D_{BC} = 125$ , sendo descoberto em 1719, pelo matemático Halcke. Se a diagonal interna do paralelepípedo que não está contida numa das faces também tem como medida um número inteiro, o paralelepípedo diz-se **perfeito**.

**Problema em Aberto 52:** *Encontrar um tijolo de Euler perfeito.*

Já foram encontrados alguns paralelepípedos de arestas inteiras com diagonal interna inteira e apenas duas diagonais de suas faces inteiras, sendo considerados paralelepípedos quase perfeitos, por exemplo, o paralelepípedo com arestas  $A = 672$ ,  $B = 153$  e  $C = 104$ , diagonais das faces  $D_{AB} = 3\sqrt{52777}$ ,  $D_{AC} = 680$  e  $D_{BC} = 185$  e diagonal interna  $D_{ABC} = 697$ .

## 4.5 Problemas de Empacotamento

Nesta seção, abordaremos alguns problemas de empacotamento que possuem muitas aplicações na confecção de embalagens com melhor aproveitamento do espaço ou menor desperdício de material.

### 4.5.1 O empacotamento de círculos

Imagine que você precise empacotar círculos de mesmo raio, sem haver sobreposição, envolvendo todos eles com um menor perímetro possível e que o conjunto de espaços vazios da sua embalagem seja a menor possível. Ao tentar arranjar os círculos, nestas condições, você está procurando a densidade máxima da embalagem, o que significa ter uma maior fração da área da embalagem ocupada pelos círculos. Matematicamente, definimos a densidade de uma embalagem da seguinte forma:

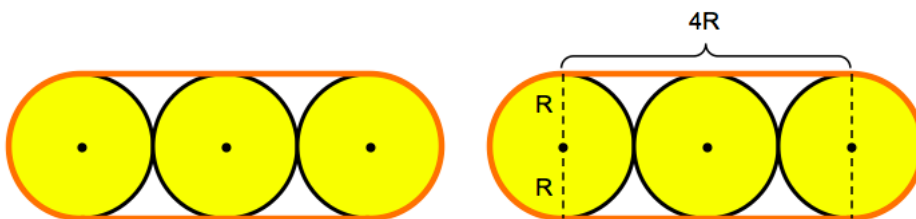
**Definição 38 (Densidade):** Sendo  $E$  uma embalagem com área total  $A_E$  que comporta  $n$  círculos de raio  $R$  a sua **densidade**, denotada por  $\lambda$ , é

$$\lambda = \frac{n \cdot \pi \cdot R^2}{A_E}.$$

**Exemplo 7:** Considerando três círculos de raio  $R$ , temos pelo menos duas possibilidades:

1. Os centros dos três círculos estão alinhados.

Figura 60 – Empacotamento com 3 círculos na forma linear

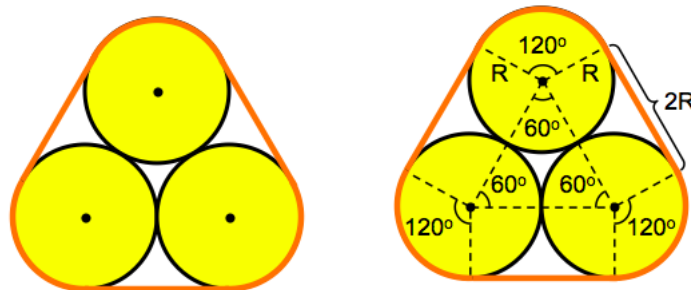


Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso, a embalagem é formada por um círculo de raio  $R$  e um retângulo de dimensões  $2R$  e  $4R$ . Usando que um círculo de raio  $R$  tem perímetro  $2\pi R$  e área  $\pi R^2$ , assim como o retângulo de dimensões  $a$  e  $b$  tem área  $ab$ , encontramos o perímetro  $2\pi R + 8R$ , a área  $A_E = 8R^2 + \pi R^2$  e a densidade da embalagem  $\lambda = \frac{3\pi R^2}{8R^2 + \pi R^2} \approx 0,84$ ;

2. Os centros dos três círculos são vértices de um triângulo equilátero.

Figura 61 – Empacotamento com 3 círculos na forma triangular



Fonte: Elaborada pelo autor

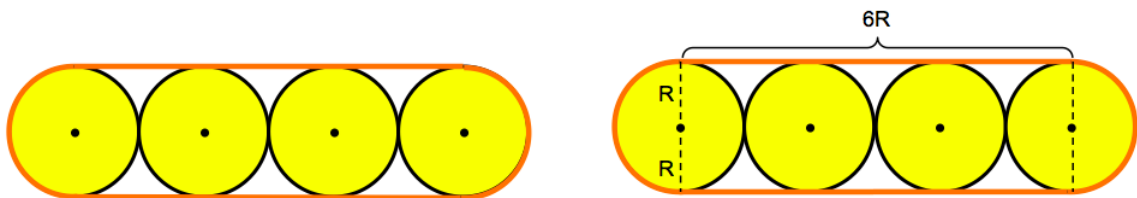
Neste caso, a embalagem é composta por um triângulo equilátero de lado  $2R$ , três retângulos de dimensões  $R$  e  $2R$  e um círculo de raio  $R$ . Usando que a área do triângulo equilátero de lado  $L$  é  $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ , encontramos o perímetro é  $2\pi R + 6R$ , a área  $A_E = 6R^2 + R^2\sqrt{3} + \pi R^2$  e a densidade da embalagem  $\lambda = \frac{3\pi R^2}{6R^2 + R^2\sqrt{3} + \pi R^2} \approx 0,87$ ;

Observe que a configuração triangular é melhor, pois a embalagem tem menor perímetro, menor área e maior densidade.

**Exemplo 8:** Para o caso de quatro círculos de mesmo raio  $R$  vamos analisar três possibilidades:

1. Os centros dos círculos estão alinhados.

Figura 62 – Empacotamento com 4 círculos na forma linear



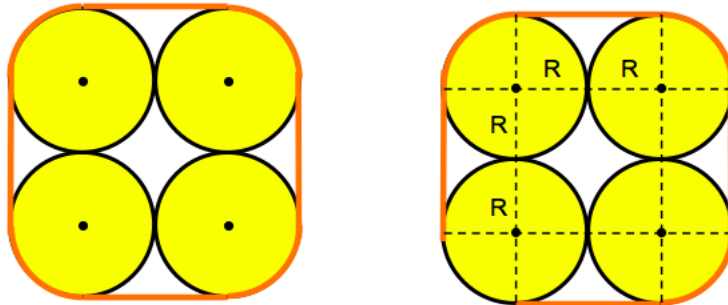
Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso, a embalagem é formada por um círculo de raio  $R$  e um retângulo de dimensões  $2R$  e  $6R$ , portanto o perímetro é  $2\pi R + 12R$ , a área é  $A_E = 12R^2 + \pi R^2$  e a densidade da embalagem é  $\lambda = \frac{4\pi R^2}{12R^2 + \pi R^2} \approx 0,83$ ;

2. Os centros dos círculos são vértices de um quadrado.

Neste caso, a embalagem é formada por um quadrado de lado  $2R$ , quatro retângulos de dimensões  $R$  e  $2R$  e um círculo de raio  $R$ , o perímetro é  $2\pi R + 8R$ , a área é da embalagem é  $A_E = 12R^2 + \pi R^2$  e a densidade da embalagem é  $\lambda = \frac{4\pi R^2}{12R^2 + \pi R^2} \approx 0,83$ ;

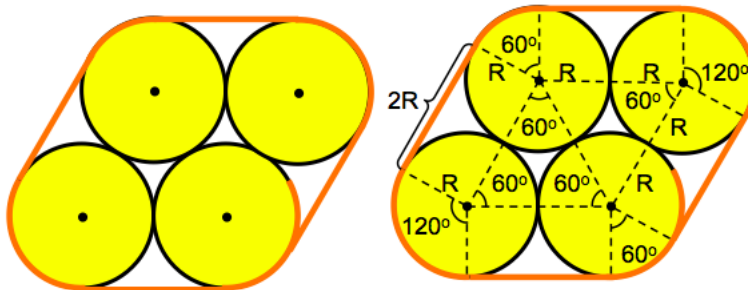
Figura 63 – Empacotamento com 4 círculos na forma quadrada



Fonte: Elaborada pelo autor

3. Os centros dos círculos são vértices de um losango que não é quadrado.

Figura 64 – Empacotamento com 4 círculos na forma de losango



Fonte: Elaborada pelo autor

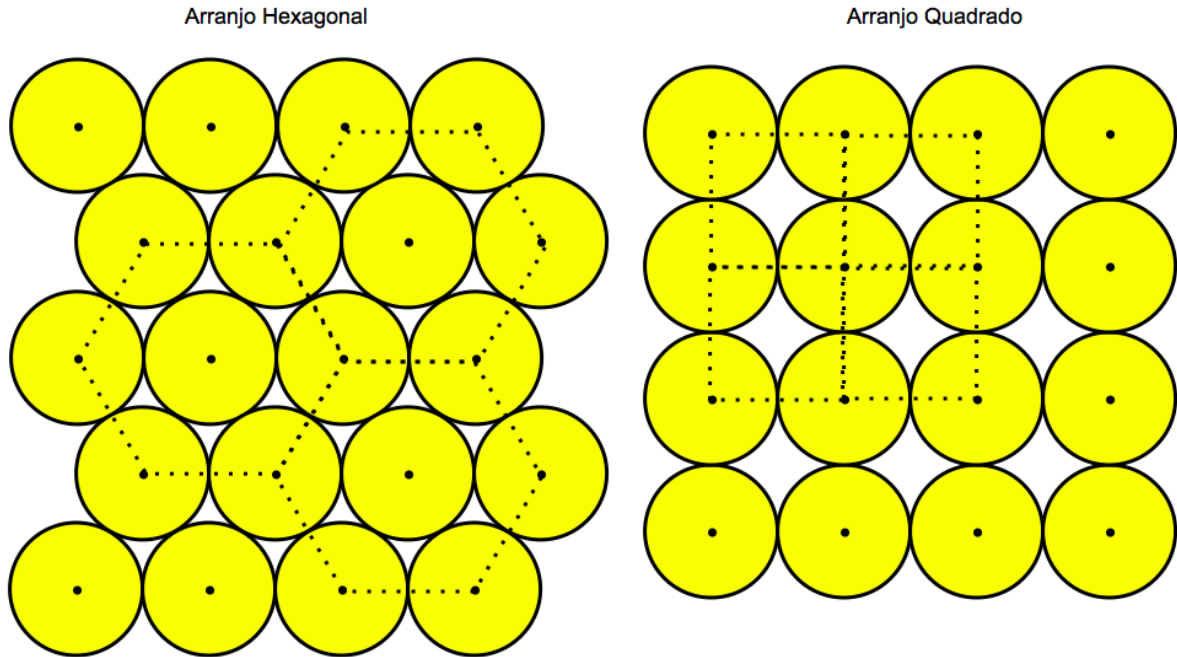
Observe que o quadrilátero com vértices nos centros dos círculos é um losango, visto que é um quadrilátero equilátero de lado  $2R$  e pelo fato de uma de suas diagonais ter medida  $2R$ , podemos entender este losango como a justaposição de dois triângulos equiláteros de lado  $2R$ . Assim, a embalagem é formada por dois triângulos equiláteros de lado  $2R$ , quatro retângulos de dimensões  $R$  e  $2R$  e um círculo de raio  $R$ .

Então, o perímetro é  $2\pi R + 8R$ , a área é  $A_E = 8R^2 + 2R^2\sqrt{3} + \pi R^2$  e a densidade da embalagem é  $\lambda = \frac{4\pi R^2}{8R^2 + 2R^2\sqrt{3} + \pi R^2} \approx 0,86$ .

Observe que as três configurações têm o mesmo perímetro mas a configuração de losango apresenta menor área e maior densidade, portanto é mais eficiente.

Empacotando círculos no plano bidimensional os exemplos 7 e 8 dão a ideia de um padrão mais denso, ou seja, de uma maneira mais eficiente de se cobrir o plano com círculos que não se sobrepõem.

Figura 65 – Empacotamento do plano com círculos



Fonte: Elaborada pelo autor

Para encontrar as densidades destes arranjos basta pegar uma menor parte que se repete:

- Arranjo Hexagonal:  $\lambda = \frac{3 \cdot A_{\text{círculo}}}{A_{\text{hexágono regular}}} = \frac{3\pi R^2}{6 \cdot \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907;$
- Arranjo Quadrado:  $\lambda = \frac{A_{\text{círculo}}}{A_{\text{quadrado}}} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$

Em 1831, Gauss (1777-1855) demonstrou que o arranjo de círculos de mesmo raio com maior densidade é o hexagonal. Em 1890, Axel Thue enunciou o seguinte teorema:

**Teorema 26:** *O arranjo hexagonal regular de círculos no plano é o mais denso. A densidade desse arranjo é  $\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,90690$ .*

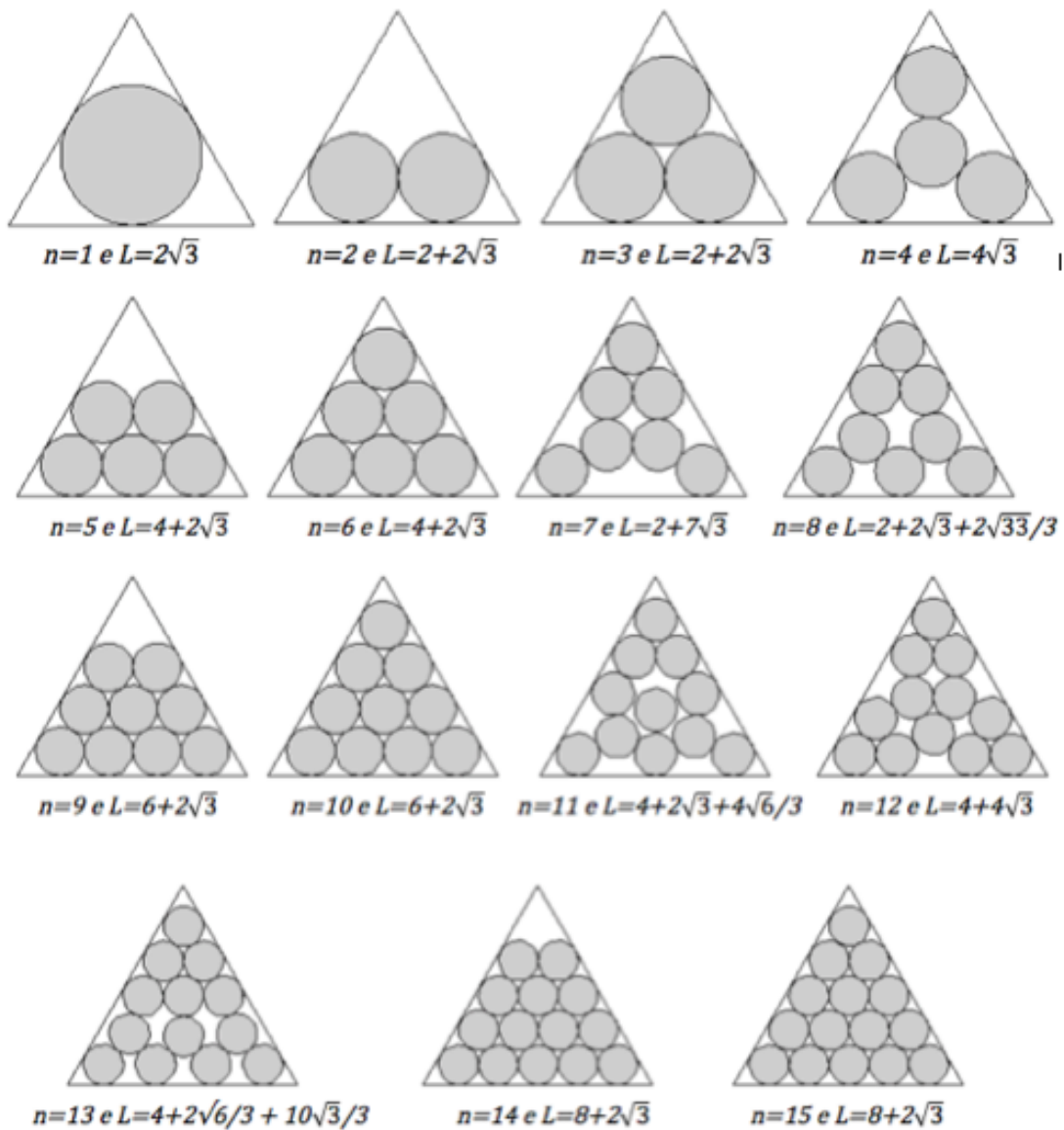
Thue foi o primeiro a resolver o problema do empacotamento de círculos no plano para todos os arranjos regulares ou irregulares, mas a sua demonstração não foi aceita porque se verificou estar incompleta e, em 1940, L. F. Toth conseguiu completar a demonstração (MISTRY, 2016).

É comum em uma região do plano limitada avaliar a melhor forma de empacotar círculos. Por exemplo, empacotando círculos em um triângulo equilátero existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 53:** Qual o menor lado do triângulo equilátero capaz de embalar  $n$  círculos de raio 1, para todo  $n$  natural maior que 15?

Este problema possui solução encontrada por Friedman (2016) para  $n < 15$  e para qualquer  $n$  expresso como soma dos  $k$  primeiros números naturais, ou seja,  $n = 1 + 2 + \dots + k$  para todo  $k$  natural.

Figura 66 – Triângulo equilátero empacotando de 1 a 15 círculos



Usando outras formas para empacotamento no plano observe a seguinte questão:

**Problema 8:** *Quais polígonos regulares pavimentam o plano?*

**Resolução:** Estamos interessados em encontrar polígonos regulares que cubram o plano sem deixar espaços e para isto a soma dos ângulos internos do polígono ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ , ou seja, a medida do ângulo interno do polígono regular deve ser divisor de  $360^\circ$ .

Usando que a medida do ângulo interno  $a_n$  do polígono regular de  $n$  lados é

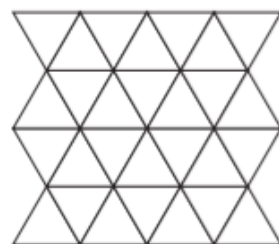
$$a_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Observe que para  $n > 6$ , temos  $a_n > 120^\circ \Rightarrow 3a_n > 360^\circ$ , ou seja, não é possível ter três polígonos num mesmo vértice se  $n > 6$ , portanto  $n = 3, 4, 5$  ou  $6$ . Mas

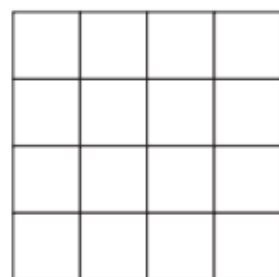
$$\frac{360^\circ}{a_n} = \frac{360^\circ}{\frac{180^\circ(n-2)}{n}} = \frac{2n}{n-2}$$

deve ser um número inteiro positivo e ocorre para  $n = 3, 4$  ou  $6$ . Assim, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular são os únicos polígonos regulares que ladrilham o plano.

Figura 67 – Ladrilhamento do plano com polígonos regulares



Ladrilhamento com triângulos equiláteros



Ladrilhamento com quadrados



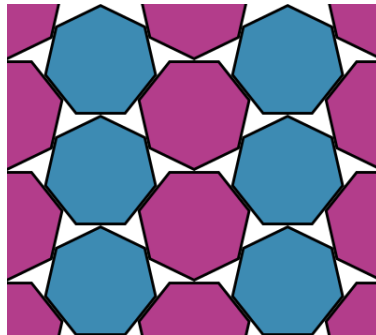
Ladrilhamento com hexágonos regulares

Avaliando a densidade do empacotamento de arranjos com polígonos regulares no plano existe a seguinte questão não resolvida:

**Problema em Aberto 54:** *Qual arranjo formado por polígonos regulares possui a menor densidade de empacotamento no plano?*

Acredita-se que o arranjo formado por heptágonos regulares tem a menor densidade, mas nada foi provado ainda. Greg Kuperberg e seu pai, Włodzimierz Kuperberg, mostraram que este empacotamento da Figura 67, entre os formados por heptágonos regulares congruentes, tem a maior densidade possível que vale aproximadamente 0.89269 (BAEZ, 2014).

Figura 68 – Empacotamento do plano com heptágonos regulares



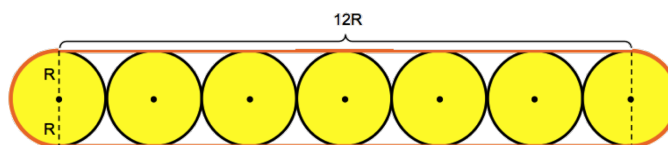
Fonte: <https://golem.ph.utexas.edu>

#### 4.5.2 A Conjectura da Salsicha

Vamos procurar a melhor maneira de se embalar 7 círculos de mesmo raio  $R$  entre as duas possibilidades seguintes:

- Configuração com centros alinhados: o perímetro  $2\pi R + 12R$  e a área  $24R^2 + \pi R^2 \approx 27,14R^2$ .

Figura 69 – Embalagem para 7 círculos na forma linear

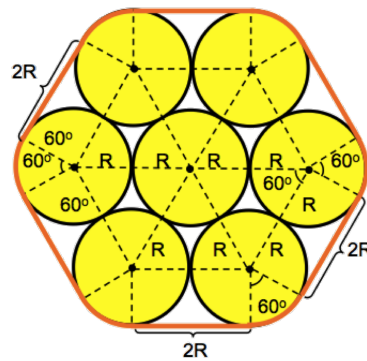


Fonte: Elaborada pelo autor

- Configuração de um hexágono regular: o perímetro  $2\pi R + 12R$  e a área  $12R^2 + 6R^2\sqrt{3} + \pi R^2 \approx 25,52R^2$ .



Figura 70 – Embalagem para 7 círculos na forma hexagonal



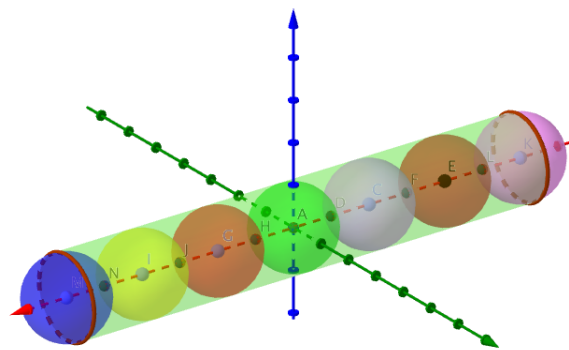
Fonte:Elaborada pelo autor

Observe que a configuração hexagonal é melhor para embalar 7 círculos de mesmo raio, pois apresenta uma menor área para um mesmo perímetro.

É fato que o empacotamento de círculos num arranjo hexagonal no plano é mais eficiente. Mas, substituindo os círculos no plano por esferas no espaço de raios  $R$  e as envolvermos com uma superfície de menor área possível que determine o menor volume possível um fato curioso acontece e para observá-lo vamos encontrar a área e o volume de embalagens que envolvem 7 esferas nos seguintes casos:

- Arranjo com centros alinhados: A embalagem que envolve estas esferas é formada por uma superfície esférica de raio  $R$  mais uma superfície lateral de um cilindro circular reto de raio  $R$  e altura  $12R$ .

Figura 71 – Embalagem de 7 esferas na forma linear



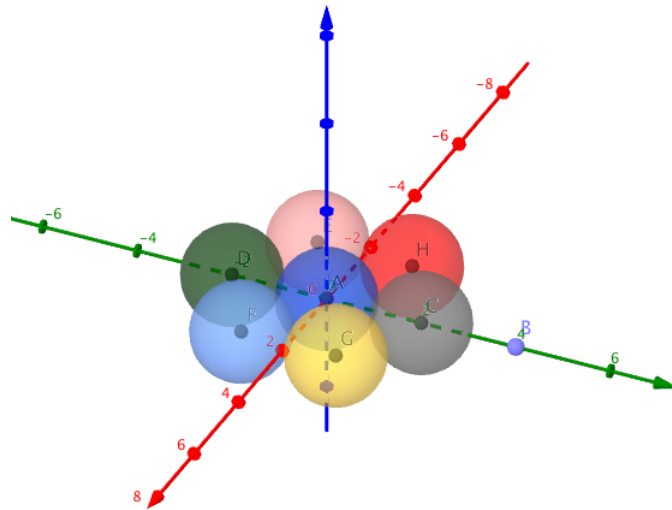
Fonte:Elaborada pelo autor

Usando que uma esfera de raio  $R$  tem volume  $\frac{4\pi R^3}{3}$  e um cilindro circular reto de raio da base  $R$  e altura  $h$  tem volume  $\pi R^2 h$ , encontramos o volume da embalagem

$$\frac{4\pi R^3}{3} + \pi R^2 \cdot 12R = \frac{40\pi R^3}{3} \approx 42R^3;$$

- Arranjo hexagonal: A embalagem que envolve estas esferas é formada por uma superfície esférica de raio  $R$ , seis metades da superfície lateral de um cilindro circular reto de raio  $R$  e altura  $2R$  e pelas bases de um prisma hexagonal regular de aresta da base  $2R$  e altura  $2R$ .

Figura 72 – Embalagem de 7 esferas na forma hexagonal



Fonte:Elaborada pelo autor

Usando que um prisma hexagonal regular de aresta da base  $L$  e altura  $h$  tem volume  $6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$ , encontramos o volume da embalagem

$$\frac{4\pi R^3}{3} + 6 \cdot \pi R^2 \cdot \frac{2R}{2} + 6 \cdot \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2R = \frac{22\pi R^3}{3} + 12R^3\sqrt{3} \approx 43,78R^3;$$

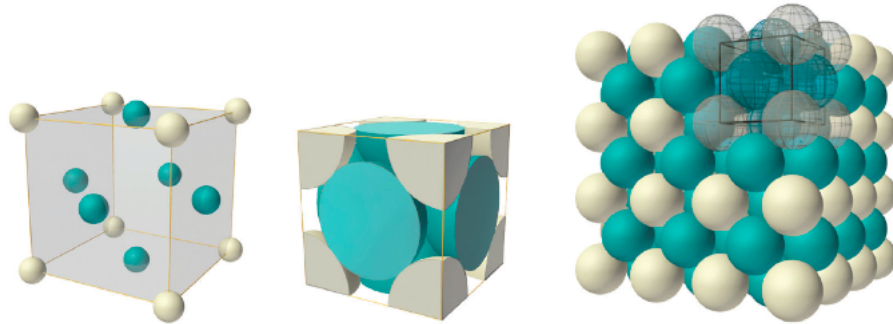
Note que o arranjo com os centros das esferas alinhados, em forma de salsicha, tem volume menor que o arranjo hexagonal, quando envolvidos com uma superfície de menor área possível, sendo o contrário do que acontece com círculos no plano, e este arranjo com centros das esferas alinhados se mantém como mais eficiente para até 56 esferas. Considerando um espaço de quatro dimensões, não se sabe o número exato em que o alinhamento de esferas quadrimensionais deixa de ser o ideal (STEWART, 2009).

### 4.5.3 O empacotamento de esferas

Em 1611, Johannes Kepler (1571-1630) conjecturou que a melhor maneira de se empilhar esferas é na forma cúbica de face centrada. No entanto, ele não conseguiu provar que estava certo, e esse problema enigmático acabou ficando conhecido como a *Conjectura de Kepler*. Em 1998, o matemático Thomas Hales anunciou que conseguiu comprovar a proposta de Kepler, mas só em 2014 a prova ficou completa e aceita (RINCON, 2014).

O arranjo cúbico de face centrada pode ser obtido colocando-se, em cada vértice e, em cada centro das faces de um cubo, esferas de raios iguais de modo que as esferas adjacentes se tangenciem.

Figura 73 – Arranjo cúbico de face centrada



Fonte: MISTRY - 2016

Podemos avaliar a densidade  $\tau$  do empacotamento de um arranjo de esferas no espaço calculando a fração que o volume das esferas ocupa do volume do sólido que caracteriza o arranjo, ou seja,

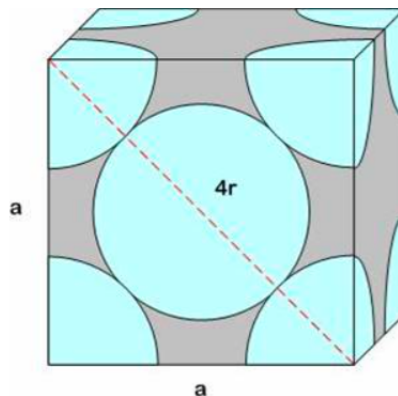
$$\tau = \frac{\text{volume esférico contido no sólido}}{\text{volume do sólido}}.$$

Note que no arranjo cúbico de face centrada, em cada um dos 8 vértices do cubo, existe  $\frac{1}{8}$  do volume de uma esfera e, em cada uma das 6 faces, existe  $\frac{1}{2}$  do volume de uma esfera, portanto a densidade  $\tau$  do empacotamento é

$$\tau = \frac{8 \cdot \frac{V_{\text{esfera}}}{8} + 6 \cdot \frac{V_{\text{esfera}}}{2}}{V_{\text{cubo}}} = \frac{4 \cdot V_{\text{esfera}}}{V_{\text{cubo}}}$$

Considerando que todas as esferas têm raio  $r$ , a diagonal da face do cubo mede  $4r$ .

Figura 74 – Parte de um arranjo cúbico de face centrada



Fonte: MISTRY - 2016

Aplicando o teorema de Pitágoras podemos encontrar a aresta  $a$  do cubo

$$a^2 + a^2 = (4r)^2$$

$$2a^2 = 16r^2$$

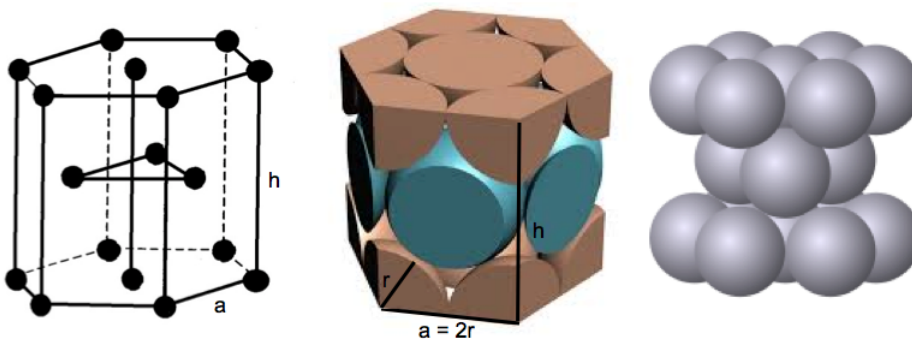
$$a^2 = 8r^2$$

$$a = 2r\sqrt{2}$$

e a densidade  $\tau$  do empacotamento é  $\tau = \frac{4 \cdot V_{esfera}}{V_{cubo}} = \frac{4 \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{(2r\sqrt{2})^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$ .

Existe o arranjo hexagonal compacto que é equivalente ao cúbico de face centrada em termos de densidade. Este arranjo possui, em cada um dos 12 vértices do prisma hexagonal regular,  $\frac{1}{6}$  de uma esfera e, em cada uma de suas 8 faces,  $\frac{1}{2}$  de uma esfera.

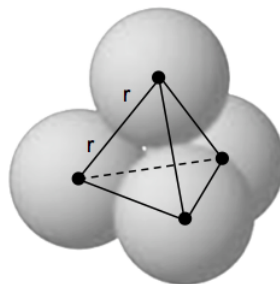
Figura 75 – Arranjo hexagonal compacto



Fonte: wikipedia

Para determinar a altura  $h$  do prisma hexagonal, observe que se considerarmos uma parte do arranjo formada por 4 esferas em contato, os centros das mesmas são vértices de um tetraedro regular de aresta  $2r$ . A altura  $h$  do prisma hexagonal mede o dobro da altura do tetraedro regular de aresta  $2r$ .

Figura 76 – Quatro esferas tangentes duas a duas



Fonte: Elaborada pelo autor

Usando que a altura do tetraedro regular de aresta  $L$  é  $\frac{L\sqrt{6}}{3}$ , temos

$$h = 2 \cdot \frac{2r\sqrt{6}}{3} = \frac{4r\sqrt{6}}{3},$$

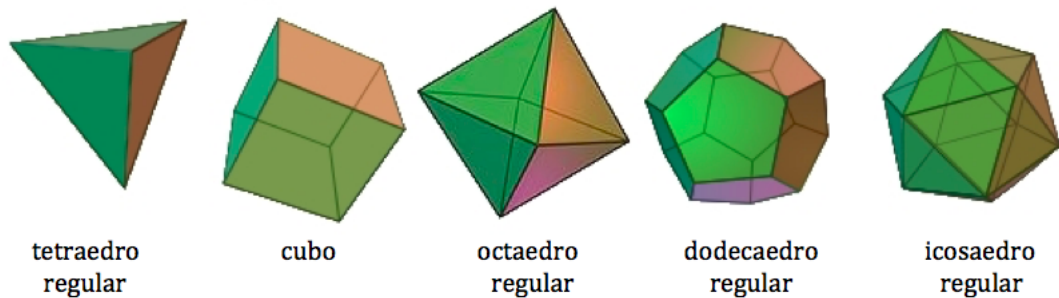
e a densidade  $\tau$  do empacotamento é

$$\tau = \frac{12 \cdot \frac{V_{esfera}}{6} + 8 \cdot \frac{V_{esfera}}{2}}{V_{prisma}} = \frac{6 \cdot V_{esfera}}{V_{prisma}} = \frac{6 \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{6 \cdot \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4r\sqrt{6}}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74.$$

#### 4.5.4 Poliedros

Um poliedro regular é um sólido convexo cujas faces são formadas por um único tipo de polígono regular e, em cada vértice concorre o mesmo número de arestas. Existem somente 5 poliedros regulares, são eles: tetraedro regular, hexaedro regular ou cubo, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

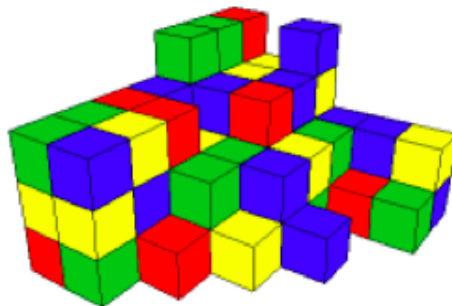
Figura 77 – Poliedros regulares



Fonte: wikipedia

Usando um só tipo de poliedro regular, o cubo é o único que preenche o espaço (GARDNER, 1984).

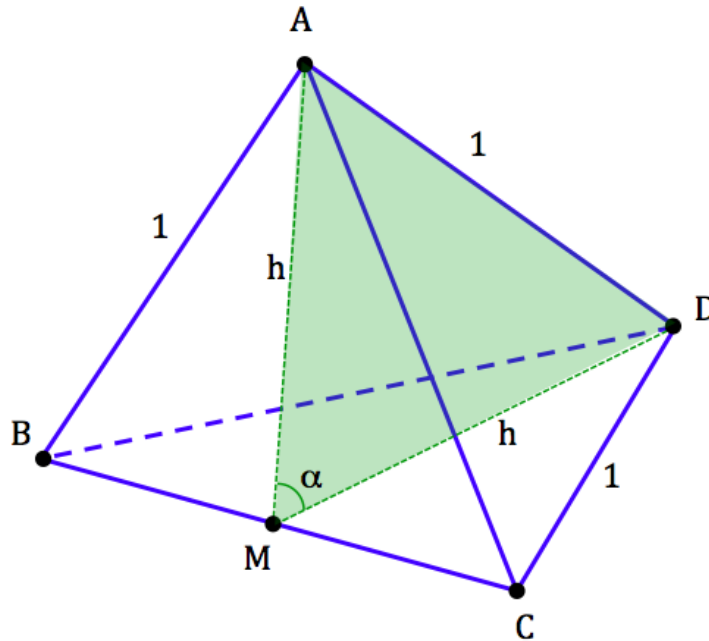
Figura 78 – Preenchimento espacial com cubos



Fonte: wikipedia

Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) afirmou que tetraedros regulares congruentes preenchem o espaço, mas isto não é possível. Considerando um tetraedro regular  $ABCD$  de aresta medindo 1, sendo  $M$  o ponto médio da aresta  $\overline{BC}$ , podemos encontrar a medida do ângulo  $\alpha$  formado por duas faces adjacentes do tetraedro regular aplicando a Lei dos cossenos no triângulo  $ADM$  da figura 78.

Figura 79 – Tetraedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor

$$1^2 = h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{2h^2 - 1}{2h^2}$$

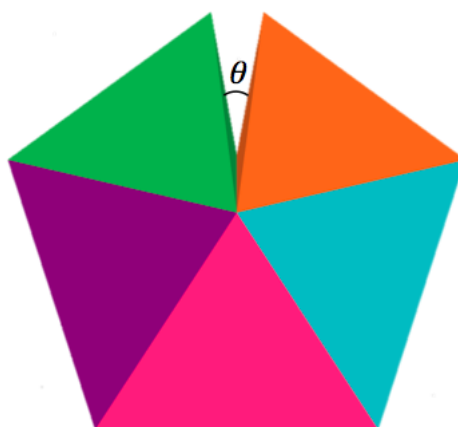
usando que a altura  $h$  do triângulo equilátero de lado 1 mede  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , temos

$$\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

e o ângulo entre duas faces adjacentes de um tetraedro regular mede  $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,52^\circ$ . Assim, não é possível preencher o espaço colocando-se face a face tetraedros regulares congruentes, pois se 5 tetraedros regulares congruentes são colocados face a face, fica um espaço vazio limitado por um ângulo  $\theta$ , compreendido entre duas faces de dois tetraedros, tal que

$$0 < \theta = 360^\circ - 5\alpha \approx 7,4^\circ < \alpha$$

Figura 80 – Combinação de 5 tetraedros regulares

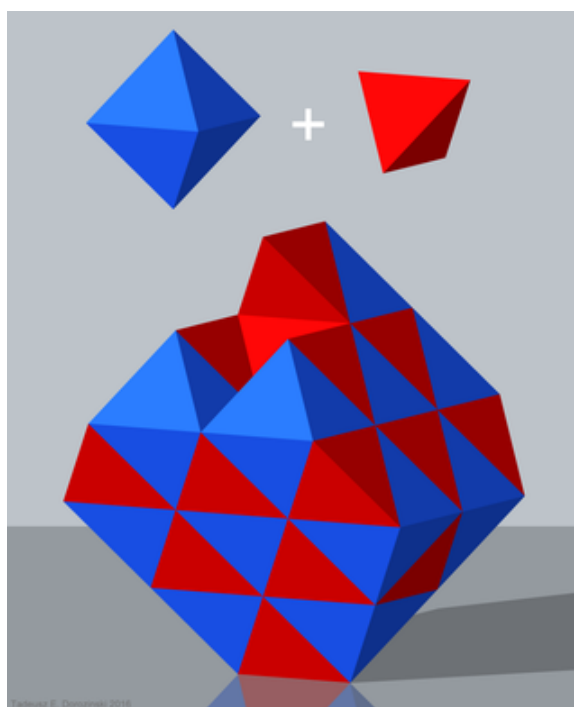


Fonte: Elaborada pelo autor

Usando tetraedros não é simples encontrar um arranjo que proporcione uma maior densidade de empacotamento e Chen (2010) conseguiu um agrupamento de tetraedros regulares congruentes com densidade de 85,63%.

Combinando mais de um tipo de poliedros regulares é possível preencher o espaço usando tetraedros e octaedros.

Figura 81 – Preenchimento espacial com tetraedros e octaedros regulares



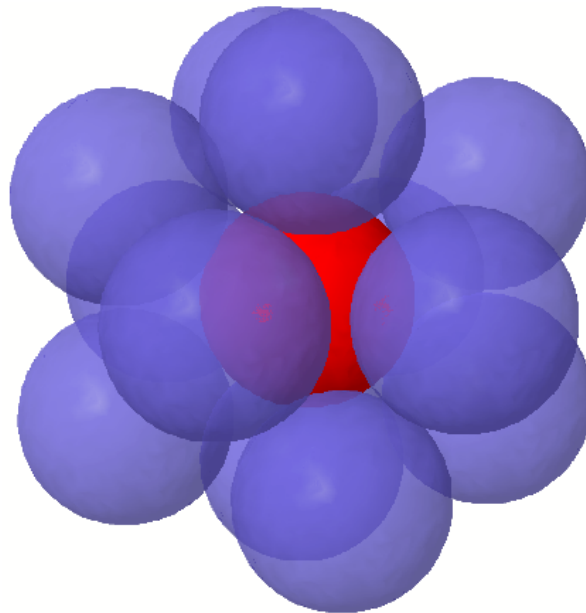
Fonte: wikipedia

Sobre a densidade de empacotamentos com sólidos convexos no espaço a seguinte questão encontra-se não resolvida:

**Problema em Aberto 55 (Conjectura do empacotamento de Ulam):** *Existe algum outro arranjo de sólidos convexos congruentes no espaço com densidade de empacotamento menor que o arranjo de esferas?*

Uma questão, proposta por Isaac Newton em 1694, que passou muitos anos desafiando os matemáticos foi a de encontrar o número máximo de esferas de raios unitários que podem tangenciar uma outra esfera de raio unitário. Este problema ficou conhecido como o número de formas de beijar, criando um desacordo entre matemáticos Isaac Newton (1643 - 1727) e David Gregory (1625 - 1720), visto que Newton pensou corretamente que o limite era 12 e Gregory pensou ser 13 e só foi provado que é 12 por Schutte e Van der Waerden em 1953 (SZPIRO, 2003).

Figura 82 – Problema do número de formas de beijar



Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Kissing\\_number\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Kissing_number_problem)

Visualmente é fácil arrumar 12 esferas de modo que cada uma toca uma esfera central e não é óbvio que não há como colocar uma 13ª esfera, pois há tanto espaço extra que duas das 12 esferas externas podem trocar lugares através de um movimento contínuo, sem que nenhuma das esferas externas perca contato com o centro.

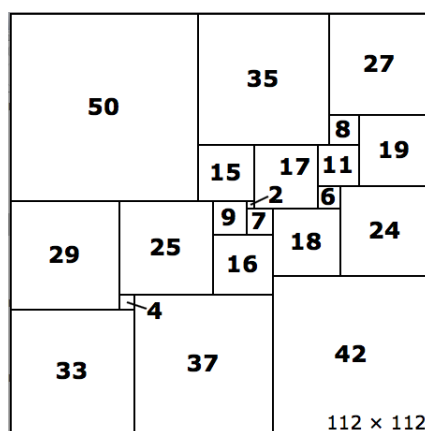


## 4.6 Divisão do Quadrado

O processo de divisão ou dissecção um quadrado em quadrados menores, todos diferentes entre si, é chamado de quadratura do quadrado. A quadratura é dita simples se nenhum subconjunto dos quadrados formar um retângulo.

Em 1978, Duijvestijn descobriu uma quadratura simples do quadrado de lado 112 usando 21 quadrados menores de lados 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 27, 29, 33, 35, 37, 42 e 50 e provou com uso do computador ser mínima (STEWART, 2009).

Figura 83 – Quadratura de um quadrado de lado 112



Fonte: [https://www.krypton.ovh/filew/Squaring\\_the\\_square.svg](https://www.krypton.ovh/filew/Squaring_the_square.svg)

**Problema em Aberto 56:** *É possível encaixar todos os retângulos de lados medindo  $\frac{1}{k}$  e  $\frac{1}{k+1}$ ,  $k$  natural positivo, num quadrado de lado 1?*

A área  $A_k$  de cada um dos retângulos é

$$A_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

e a soma  $S$  de todas as áreas é dada por

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

se  $k$  é qualquer número natural positivo, quando  $n$  tende a infinito,  $S$  tende a 1, ou seja, a soma das áreas de todos os retângulos é 1, mas não garante o encaixe.

Meir e Moser provaram, em 1968, que é possível encaixar os retângulos do tipo  $\frac{1}{k}$  por  $\frac{1}{k+1}$  em quadrado de lado  $\frac{31}{30} \approx 1,03$  e melhorado para um quadrado de lado  $\frac{133}{132} \approx 1,0075$  (OWINGS, 1985).



# 5 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de ensino de matemática com a utilização de problemas em aberto.

## 5.1 Princípio da Indução Matemática

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de inserir o método de demonstração por Indução Matemática no ensino médio. Este conteúdo é bastante relevante para instigar a investigação matemática como destaca Abramo Hefez:

"Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista."(HEFEZ-2009)

**Tema:** Indução Matemática

**Objetivos:** Introduzir o princípio da Indução Matemática com aplicações.

**Conteúdos Relacionados:** Indução Matemática.

**Público alvo:** Estudantes da primeira série do ensino médio.

**Metodologia:** Aula expositiva apresentando o princípio da indução matemática com resolução de exemplos para em seguida aplicar ao problema da torre de Hanoi e a sequência de Fibonacci, como também propor exercícios.

**Princípio de Indução Matemática Generalizado:** Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre  $\mathbb{N}$ . Suponha que

- i.  $P(a)$  é verdadeira para algum  $a$  natural; e
- ii. qualquer que seja  $k$  natural, sempre que  $P(k)$  é verdadeira, segue que  $P(k + 1)$  é verdadeira.

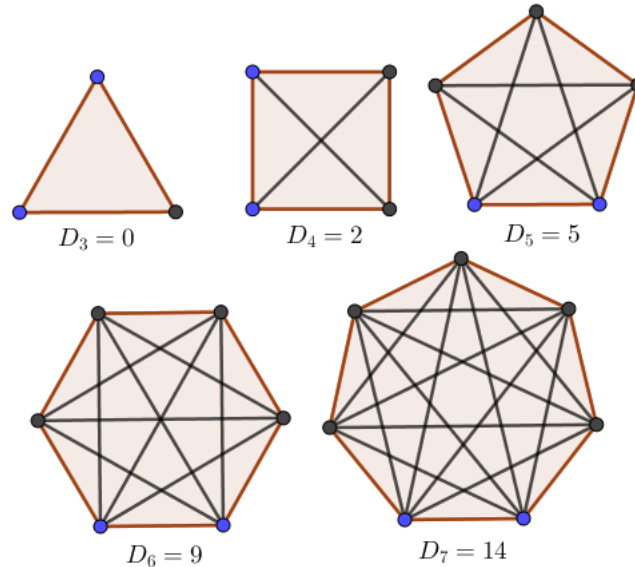
Então,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n$  natural maior ou igual a  $a$ .

**Aplicação 1:** *Encontrar o número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados.*

Apresentamos a seguinte sequência de etapas para construir o conhecimento sobre o número de diagonais de um polígono convexo:

**1ª etapa:** Tentar conjecturar uma expressão  $D_n$  para o número de diagonais examinando os casos iniciais

Figura 84 – Polígonos com 3, 4, 5, 6 ou 7 lados



Fonte: Elaborada pelo autor

e construir uma tabela do tipo:

Tabela 12 – Número de diagonais de um polígono convexo

número de lados $n$	número de diagonais $D_n$
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14

Note que em cada um dos  $n$  vértices de um polígono convexo de  $n$  lados concorrem  $n - 3$  diagonais e cada diagonal é comum a dois vértices, portanto  $D_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ . Podemos, por inspeção, testar os valores anotados na tabela mas isto não prova a sua veracidade para qualquer polígono.

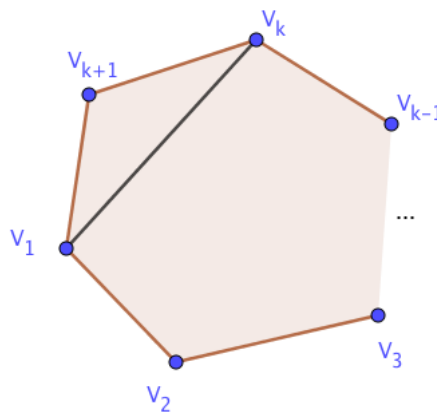
**2ª etapa:** Provar, por indução, a expressão encontrada.

Considere a seguinte proposição  $P_n$  sobre os naturais  $n \geq 3$ :

$P(n)$ : O número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados é  $D_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

- i. Se  $n = 3$ , o polígono é um triângulo e  $D_3 = \frac{3 \cdot (3 - 3)}{2} = 0$ , ou seja, triângulo não tem diagonais;

- ii. Supondo que, para  $k > 3$ , temos para um polígono convexo de  $k$  lados  $D_k = \frac{k \cdot (k-3)}{2}$ . Considerando um polígono de  $k + 1$  lados com vértices consecutivos  $V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+1}$  e unindo por um segmento de reta os vértices  $V_1$  a  $V_k$ , construímos um polígono convexo de  $k$  lados que, por hipótese de indução, tem  $D_k = \frac{k \cdot (k-3)}{2}$ . O polígono de  $k + 1$  lados possui todas as  $D_k$  diagonais, mais as  $k - 2$  diagonais que o vértice  $V_{k+1}$  forma com os vértices  $V_2, V_3, \dots, V_{k-1}$  e a diagonal  $V_1V_k$ .

Figura 85 – Polígonos com  $k + 1$  lados

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, o número de diagonais do polígono de  $k + 1$  lados é

$$D_{k+1} = \frac{k \cdot (k-3)}{2} + (k-2) + 1$$

$$D_{k+1} = \frac{k \cdot (k-3)}{2} + k - 1$$

$$D_{k+1} = \frac{k \cdot (k-3) + 2 \cdot (k-1)}{2}$$

$$D_{k+1} = \frac{k^2 - k - 2}{2}$$

$$D_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

$$D_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$$

Então, o número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados é  $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$  para todo natural  $n \geq 3$ .

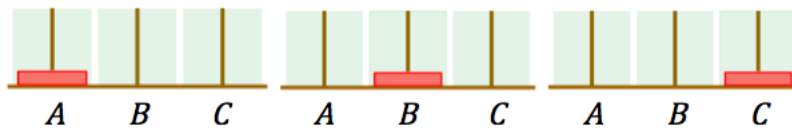
Antes de apresentar a aplicação seguinte mostrar o Problema da Torre de Hanoi, da Seção 3.5, para, em seguida, resolver esta variação do problema:

**Aplicação 2:** Considere o mesmo problema das Torres de Hanoi com uma terceira regra: um disco só pode ser movido para uma haste adjacente, ou seja, se o disco estiver na haste  $A$  só pode ser movido para a haste  $B$ , da haste  $B$  pode ser movido para  $A$  ou  $C$ , e da haste  $C$  só pode ir para a  $B$ . Conjecture uma fórmula para passar todos os discos da haste  $A$  para a  $C$ , em função do número de discos  $n$ .

Considere  $T_n$  é o número mínimo de movimentos para resolver o problema com  $n$  discos, com  $n$  natural.

Observe que para transferir um único disco da haste  $A$  para a haste  $C$  precisamos de 2 movimentos, ou seja, passar o disco da haste  $A$  para  $B$  e depois para  $C$ .

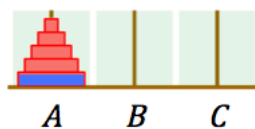
Figura 86 – Torre de Hanoi com 1 disco



Fonte: Elaborada pelo autor

Considere uma torre com  $k + 1$  discos

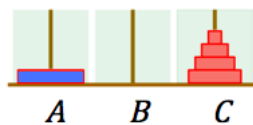
Figura 87 – Torre de Hanoi com  $k + 1$  discos



Fonte: Elaborada pelo autor

precisamos de  $T_k$  movimentos para transferir os  $k$  menores discos da haste  $A$  para a  $C$ .

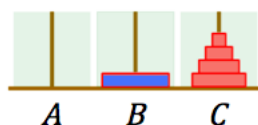
Figura 88 – Torre de Hanoi restrita - movimento 1



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, precisamos de mais um movimento para transferir o disco maior da haste  $A$  para  $B$ .

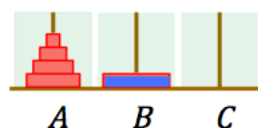
Figura 89 – Torre de Hanoi restrita - movimento 2



Fonte: Elaborada pelo autor

Na sequência, mais  $T_k$  movimentos para transferir os  $k$  menores discos da haste  $C$  para  $A$

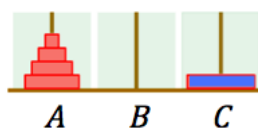
Figura 90 – Torre de Hanoi restrita - movimento 3



Fonte: Elaborada pelo autor

e mais um movimento para transferir o disco maior da haste  $B$  para  $C$ .

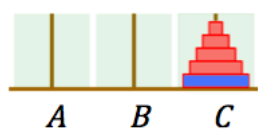
Figura 91 – Torre de Hanoi restrita - movimento 4



Fonte: Elaborada pelo autor

Finalmente precisamos de mais  $T_k$  movimentos para transferir os  $k$  menores discos da haste  $A$  para  $C$ .

Figura 92 – Torre de Hanoi restrita - movimento 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, o número de movimentos para transferir os  $k + 1$  discos da haste  $A$  para  $C$  é dado por

$$T_{k+1} = T_k + 1 + T_k + 1 + T_k = 3T_k + 2.$$

Então, concluímos que o número mínimo de movimentos é dado por

$$T_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ 3 \cdot T_{n-1} + 2 & \text{se } n \text{ natural e } n > 1 \end{cases}$$

Para encontrar uma expressão para  $T_n$  em função de  $n$ , dividimos  $T_n = 3 \cdot T_{n-1} + 2$  por  $3^n$ , obtendo

$$\frac{T_n}{3^n} = \frac{3T_{n-1}}{3^n} + \frac{2}{3^n} \Rightarrow \frac{T_n}{3^n} = \frac{T_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$$

observe que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{T_1}{3} = \frac{2}{3} \\ \frac{T_2}{3^2} = \frac{T_1}{3} + \frac{2}{3^2} \\ \frac{T_3}{3^3} = \frac{T_2}{3^2} + \frac{2}{3^3} \\ \dots \\ \frac{T_{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{T_{n-2}}{3^{n-2}} + \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{T_n}{3^n} = \frac{T_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \end{array} \right\} \text{somando as equações}$$

$$\frac{T_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n}$$

usando que a soma dos termos de uma progressão geométrica finita de primeiro termo  $a_1$  e razão  $q$  é  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ , temos

$$\frac{T_n}{3^n} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{T_n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

$$T_n = 3^n - 1.$$

A expressão acima pode ser comprovada por indução.

Após a aplicação desta variação do problema da torre de Hanoi, o professor pode apresentar o **Problema em Aberto 41** da Seção 3.5.

Na sequência, vamos trabalhar algumas aplicações da sequência de *Fibonacci*, definida, recursivamente, por:



Seja  $F_n$  uma sequência de números naturais tal que

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ se } n \text{ natural e } n > 2 \end{cases}$$

Esta maneira de definir um conjunto recursivamente é uma aplicação do Princípio da Indução Matemática.

**Aplicação 3:** *Uma escada tem  $n$  degraus. De quantas maneiras podemos chegar ao topo, subindo um ou dois degraus de cada vez?*

Considerando  $a_n$  o número de maneiras de subir uma escada de  $n$  degraus note que:

- $a_1 = 1$ , pois se a escada tem um único degrau só podemos subir um degrau;
- $a_2 = 2$ , pois podemos subir o primeiro degrau e depois o segundo ou subir os dois degraus de uma única vez;
- Se  $n \geq 3$ , então para se chegar ao degrau  $n$  é possível vir do degrau  $n - 2$  ou do degrau  $n - 1$ , portanto  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

Assim, o número de maneiras de se chegar ao topo subindo um ou dois degraus é

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ se } n \text{ natural e } n \geq 3 \end{cases}$$

Note que a sequência acima é a sequência de *Fibonacci* com  $a_1 = F_2$  e  $a_2 = F_3$ , portanto  $a_n = F_{n+1}$ .

**Aplicação 4:** *Imagine que um prédio de  $n$  andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio?*

Sendo  $x_n$  o número de maneiras de se pintar um prédio de  $n$  andares, temos:

- $x_1 = 2$ , pois se o prédio tiver um único andar este poderá ser verde ou amarelo;
- $x_2 = 3$ , pois se o primeiro for verde o segundo poderá ser verde ou amarelo e se o primeiro andar for amarelo o segundo só poderá ser verde;
- Para  $n \geq 3$  se o último andar for verde o penúltimo andar pode ser verde ou amarelo e temos  $x_{n-1}$  maneiras, e se o último andar for amarelo o penúltimo deve ser verde e temos  $x_{n-2}$  maneiras. Portanto,  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ .

Assim, o número de maneiras de se pintar o prédio é

$$x_n = \begin{cases} x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \text{ se } n \text{ natural e } n \geq 3 \end{cases}$$

Note que a sequência acima é a sequência de *Fibonacci* com  $x_1 = F_3$  e  $x_2 = F_4$ , portanto  $x_n = F_{n+2}$ .

Após trabalhar estas aplicações, o professor pode apresentar aos alunos o **Problema em Aberto 2** sobre o período de Pisano da Seção 2.1.

### Questões Propostas

**Questão 1 (Indução Matemática - Abramo Hefez - 2009):** *Uma vitória-régia encontra-se em um tanque de água. Sabendo que ela dobra de área a cada dia, e que, no final de 20 dias, ela ocupa toda a superfície do tanque, em qual dia ela ocupará a metade da superfície do tanque?*

**Resolução:** Se no final de 20 dias o tanque está ocupado no dia anterior estava a metade ocupado, ou seja, 19 dias.

**Questão 2 (UFPE - matemática 2 - 1998):** *Traçando-se 10 cordas em um círculo, qual o número máximo de regiões em que o círculo fica dividido?*

**Resolução:** Sendo  $R_n$  o número máximo de regiões em que o círculo fica dividido traçando-se  $n$  cordas, temos  $R_1 = 2$  e  $R_n = R_{n-1} + n$ , para  $n \geq 2$ . É possível encontrar uma expressão para o número de regiões em função de  $n$  dada por  $R_n = 1 + \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n$ , portanto  $R_{10} = 56$ .

**Questão 3 (UNESP 1999):** *Considere a sequência  $(a_n) = (3^{2n} - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

a) *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , mostre  $a_{n+1} = a_n + 8 \cdot 3^{2n}$ .*

b) *Demonstre, por indução sobre  $n$ , que  $a_n$  é divisível por 8, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Resolução:**

a)  $a_{n+1} = 3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1 = 3^{2n} - 1 + 8 \cdot 3^{2n} = a_n + 8 \cdot 3^{2n}$ .

b) Usando o princípio da indução matemática, temos

1. Para  $n = 1$ , temos:  $a_1 = 3^2 - 1 = 8$  que é divisível por 8;

2. Supondo  $a_k$  divisível por 8 devemos provar que  $a_{k+1}$  também é divisível por 8.

Usando o que foi provado no item a),

$$a_{k+1} = a_k + 8 \cdot 3^{2k}$$

mas por hipótese de indução  $a_k = 8t$  com  $t$  natural,

$$a_{k+1} = 8t + 8 \cdot 3^{2k}$$

$$a_{k+1} = 8 \cdot (t + 3^{2k})$$

provando que  $a_n$  é divisível por 8, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Questão 4 (OBMEP - Banco de questões 2016):** *A sequência de Fibonacci começa com  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja,*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para } n \geq 0.$$

*Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:*

$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a) *Verifique que  $F_{n+3} < 5F_n$  para todo  $n \geq 3$ .*

b) *Seja  $n$  um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de  $n$  existe no máximo  $n$  números de Fibonacci.*

**Resolução:**

a) Como a sequência de Fibonacci é crescente, temos

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$$

$$F_{n+3} = 2 \cdot F_{n+1} + F_n$$

$$F_{n+3} = 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_{n-1}$$

$$F_{n+3} < 3 \cdot F_n + 2 \cdot F_n$$

$$F_{n+3} < 5 \cdot F_n$$

b) Suponha que existam mais que  $n$  números de Fibonacci entre  $n^k$  e  $n^{k+1}$ . Denotemos as  $n + 1$  primeiras delas por  $F_l, F_{l+1}, \dots, F_{l+n}$ . Assim, como  $F_l$  e  $F_{l+1}$  são maiores que  $n^k$ , temos

$$\begin{aligned}
 F_{l+2} &= F_{l+1} + F_l > n^k + n^k = 2 \cdot n^k \\
 F_{l+3} &= F_{l+2} + F_{l+1} > 2 \cdot n^k + n^k = 3 \cdot n^k \\
 F_{l+4} &= F_{l+3} + F_{l+2} > 3 \cdot n^k + n^k = 4 \cdot n^k \\
 &\dots \\
 F_{l+n} &= F_{l+n-1} + F_{l+n-2} > (n-1) \cdot n^k + n^k = n^{k+1}
 \end{aligned}$$

Isto é um absurdo, pois  $F_{l+n} < n^{k+1}$ .

**Observação:** É possível mostrar que  $F_{n+l} = F_{n1} \cdot F_l + F_{nl+1}$ .

**Questão 5 (Unicamp - 2012):** O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de

$$\frac{x+1}{x} = x$$

- a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.  
 b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo  $n$ -ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \text{ ou } 2; \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

**Resolução:**

- a) Considerando a raiz positiva, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x} &= x \\
 x^2 - x - 1 &= 0 \\
 x &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

- b)

$$f(10) = f(9) + f(8) = f(8) + f(7) + f(8) = 21 + 13 + 21 = 55,$$

$$f(11) = f(10) + f(9) = f(10) + f(8) + f(7) = 55 + 21 + 13 = 89 \text{ e}$$

$$\frac{f(11)}{f(10)} = \frac{89}{55} \equiv 1,6.$$

## 5.2 Quadrados Mágicos e Progressões Aritméticas

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de aplicação das propriedades de progressões aritméticas nos quadrados mágicos.

**Tema:** Quadrados Mágicos

**Objetivos:** Estudar propriedades das progressões aritméticas com o uso quadrados mágicos.

**Conteúdos Relacionados:** Progressão aritmética e matrizes.

**Público alvo:** Estudantes da segunda série do ensino médio.

**Metodologia:** Aula expositiva apresentando definição e propriedades das progressões aritméticas aplicadas aos quadrados mágicos.

Inicialmente é preciso trabalhar os conteúdos de Progressões Aritméticas e Matrizes, desenvolvendo os seguintes tópicos:

**Progressão Aritmética:** Uma **progressão aritmética**, denotada por **PA**, é toda sequência numérica  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ , na qual a diferença entre cada termo e o seu antecedente é uma constante  $r$  chamada razão da **PA**.

$$a_i - a_{i-1} = r, \text{ para todo } i \text{ natural maior que } 1.$$

**Termo Geral da PA:** Se  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$  é uma progressão aritmética de razão  $r$ , então o termo de ordem  $n$  é dado por  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ , para todo  $n$  natural, tal que  $n \geq 1$ .

**Três termos consecutivos de uma PA:** Em toda PA, cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre o antecedente e o conseqüente.

Considerando  $a, b$  e  $c$ , três termos consecutivos de um PA, temos

$$b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a + c}{2} \blacksquare$$

**Termos Equidistantes dos Extremos:** Dois termos de uma sequência finita são **equidistantes dos extremos** quando o número de termos que precede um deles é igual ao número de termos que sucede ao outro. Assim, na sequência

$$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_i)}_{i \text{ termos}}, a_{i+1}, \dots, a_{n-i}, \underbrace{(a_{n-i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n)}_{i \text{ termos}}$$

os termos  $a_{i+1}$  e  $a_{n-i}$  são equidistantes dos extremos. Observe que dois termos  $a_k$  e  $a_p$  serão equidistantes dos extremos se  $k + p = n + 1$ . Por exemplo,  $a_4$  e  $a_{n-3}$  são termos equidistantes dos extremos de uma PA de  $n$  termos.

**Propriedade:** Em toda **PA** finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Sabemos que os termos  $a_{i+1}$  e  $a_{n-i}$  são equidistantes dos extremos, aplicando a expressão do termo geral, temos

$$\begin{aligned} a_{i+1} + a_{n-i} &= a_1 + (n - i - 1) \cdot r + a_1 + (n - n + i) \cdot r \\ &= a_1 + a_1 + (n - i - 1 + n - n + i) \cdot r \\ &= a_1 + a_1 + (n - 1) \cdot r \\ &= a_1 + a_n \blacksquare \end{aligned}$$

**Termo Central de uma PA:** Em toda PA finita, com número ímpar de termos, o termo central é média aritmética dos extremos ou de dois termos equidistantes dos extremos.

Seja uma PA com  $2n + 1$  termos

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$$

O termo central é  $a_{n+1}$ . Note que  $a_n, a_{n+1}$  e  $a_{n+2}$  são termos consecutivos da PA, portanto

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

como  $a_n$  e  $a_{n+2}$  são termos equidistantes dos extremos  $a_1$  e  $a_{2n+1}$ , temos

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} \blacksquare$$

**Soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA:** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA é dada por

$$S_n = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n.$$

Considerando os  $n$  primeiros termos de uma PA, pode mos escrever

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad (2)$$

Adicionando membro a membro as equações (1) e (2), segue que

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

o segundo membro da equação acima é composto por parcelas que são somas de termos equidistantes dos extremos, portanto

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n \\ S_n &= \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n \blacksquare \end{aligned}$$

**Matriz Quadrada:** Uma **matriz quadrada** de ordem  $n$  ou  $n \times n$  é uma tabela de números dispostos em  $n$  linhas e  $n$  colunas, onde  $a_{i,j}$  representam os elementos que se localizam na linha  $i$  e coluna  $j$

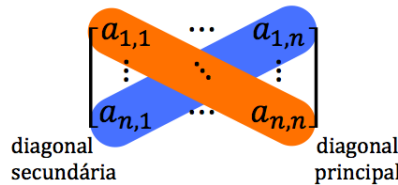
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

com  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Diagonal Principal:** Numa matriz quadrada de ordem  $n$ , a **diagonal principal** é formada pelos elementos  $a_{i,j}$  tais que  $i = j$ , ou seja,  $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ .

**Diagonal Secundária:** Numa matriz quadrada de ordem  $n$ , a **diagonal secundária** é formada pelos elementos  $a_{i,j}$  tais que  $i + j = n + 1$ , ou seja,  $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$ .

Figura 93 – Diagonais de uma matriz quadrada



Fonte: Elaborada pelo autor

**Quadrado Mágico:** Um **quadrado mágico** é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , com  $a_{i,j}$  distintos e  $1 \leq i, j \leq n$ , onde a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre igual a uma constante  $k$ , chamada constante mágica.

Após trabalhar os tópicos acima e apresentar a definição de **quadrados mágicos**, mostrar exemplos e propor aos alunos encontrarem um quadrado mágico de ordem 3 com números de 1 a 9.

Figura 94 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de 1 a 9

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fonte: Elaborada pelo autor

Na sequência, orientar os alunos que façam as seguintes transformações, em seus quadrados mágicos:

- **Somar uma constante:** Adicionando uma constante  $a$  qualquer a todos os termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

*Qualquer sequência de nove números consecutivos pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3;*

Figura 95 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de  $a+1$  a  $a+9$

$a+2$	$a+7$	$a+6$
$a+9$	$a+5$	$a+1$
$a+4$	$a+3$	$a+8$

Fonte: Elaborada pelo autor

- **Multiplicar por uma constante:** Multiplicando por constante  $s$  qualquer todos os termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

*Qualquer sequência de nove múltiplos consecutivos de um número inteiro pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3;*

Figura 96 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de  $r$  a  $9r$

$2r$	$7r$	$6r$
$9r$	$5r$	$r$
$4r$	$3r$	$8r$

Fonte: Elaborada pelo autor

- **Multiplicando e somando:** Multiplicando por uma constante  $r$  e depois adicionando uma outra constante  $a$  a cada um dos termos do quadrado mágico de ordem 3, numerado de 1 a 9, percebemos que:

*Qualquer progressão aritmética de nove números pode ser termos de um quadrado mágico de ordem 3 ;*



Figura 97 – Quadrado mágico de ordem 3 numerado de  $a + r$  a  $a + 9r$ 

$a+2r$	$a+7r$	$a+6r$
$a+9r$	$a+5r$	$a+r$
$a+4r$	$a+3r$	$a+8r$

Fonte: Elaborada pelo autor

É possível arranjar termos de progressões aritméticas em quadrados mágicos de ordem maior que 3. Por exemplo, num quadrado mágico de ordem 4, podemos colocar os 16 termos da seguinte progressão aritmética:

$$(a, a + r, a + 2r, \dots, a + 14r, a + 15r)$$

com  $a$  e  $r$  naturais, da seguinte forma

Tabela 13 – Quadrado mágico de ordem 4 com números em  $PA$ 

$a$	$a + 14r$	$a + 13r$	$a + 3r$	$4a + 30r$
$a + 11r$	$a + 5r$	$a + 6r$	$a + 8r$	$4a + 30r$
$a + 7r$	$a + 9r$	$a + 10r$	$a + 4r$	$4a + 30r$
$a + 12r$	$a + 2r$	$a + r$	$a + 15r$	$4a + 30r$
$4a + 30r$	$4a + 30r$	$4a + 30r$	$4a + 30r$	

Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que os 16 termos da progressão aritmética foram arranjados formando um quadrado mágico cuja constante mágica é  $4a + 30r$ .

Existe uma outra relação entre os quadrados mágicos e as progressões aritméticas, como veremos a seguir:

**A Constante Mágica:** Considerando um quadrado mágico de ordem  $n$ , numerado de 1 a  $n^2$ ,

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

com  $1 \leq i, j \leq n$  e  $a_{i,j} \in \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ , a soma  $S$  de todos os números do quadrado mágico de ordem  $n$  pode ser encontrada usando a soma dos  $i$  primeiros termos de uma progressão aritmética, então

$$S = 1 + 2 + \dots + n^2 = \left( \frac{a_1 + a_i}{2} \right) \cdot i = \left( \frac{1 + n^2}{2} \right) \cdot n^2$$

e a constante mágica  $k$ , soma de cada linha, coluna ou diagonal, é  $k = \frac{S}{n}$ , ou seja,

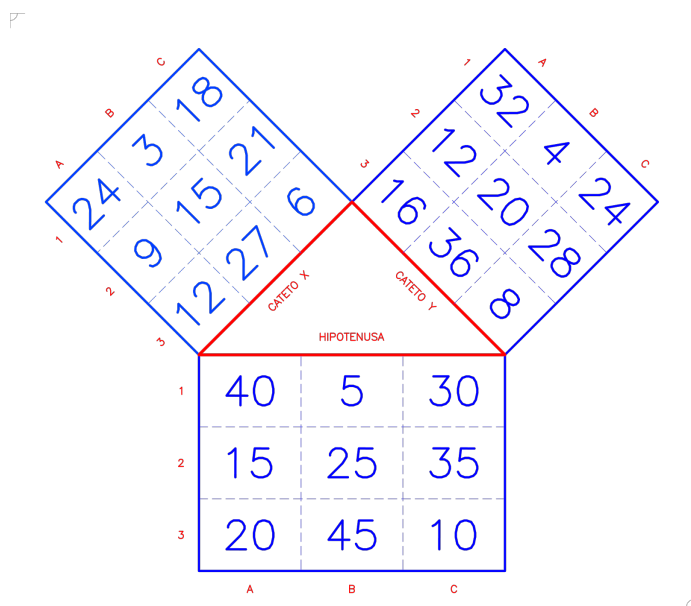
$$k = \left( \frac{1 + n^2}{2} \right) \cdot n.$$

Após trabalhar estas aplicações, o professor pode apresentar os problemas em aberto sobre quadrados mágicos da Seção 3.3.

Uma outra aplicação interessante, abordada na Subseção 3.3.2, é procurar quadrados mágicos formados por números primos que pode ser feito usando o fato de que progressões aritméticas fornecem números para os quadrados mágicos e o Teorema de Green e Tao que garante a existência de progressões aritméticas de números primos de tamanho arbitrário.

**Curiosidade:** Considerando um triângulo retângulo, podemos construir sobre os seus lados três quadrados mágicos, como na Figura 97, onde as constantes mágicas são 45 para o cateto  $X$ , 60 para o cateto  $Y$  e 75 para a hipotenusa. Esta construção exemplifica o conhecido teorema o *Pitágoras* em diversas relações entre os três quadrados mágicos. Por exemplo, o quadrado de qualquer número do quadrado mágico sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos números correspondentes nos quadrados mágicos sobre os catetos. Por exemplo, se considerarmos o número localizado no canto superior direito de cada quadrado mágico, temos  $30^2 = 18^2 + 24^2$  (HEATH, 1953).

Figura 98 – Quadrados mágicos pitagóricos



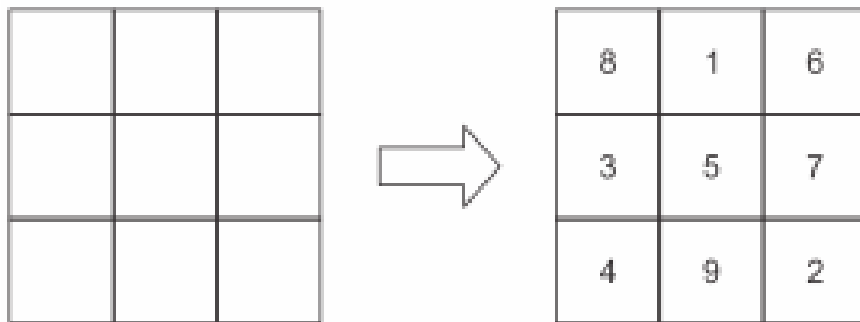
Fonte: <http://mathluiz.blogspot.com.br/2014/10/supremo-quadrado-magico-pitagorico.html>

Na sequência, sugerimos uma lista de exercícios sobre quadrados mágicos para ser aplicada após trabalhar esta atividade.

### Questões Propostas

**Questão 1 (Colégio Pedro II - 2017):** O Quadrado Mágico é uma tabela quadrada composta por números inteiros consecutivos a partir do 1, em que a soma de cada coluna, de cada linha e de cada diagonal são iguais. Essa soma é chamada de número mágico.

Aprenda a encontrar o número mágico de um quadrado  $3 \times 3$  como o da figura.



O quadrado mágico  $3 \times 3$  possui 9 posições, portanto deve ser preenchido com os números de 1 até 9 sem repetição.

O número mágico pode ser encontrado seguindo dois passos.

**Passo 1** – Encontrar a soma total dos números.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

**Passo 2** – Dividir a soma encontrada pelo número de colunas existentes no quadrado. No caso do quadrado mágico  $3 \times 3$  os 9 números estão agrupados em 3 colunas. Logo o número mágico será  $45 : 3 = 15$ .

Em condições semelhantes, o número mágico de um quadrado  $4 \times 4$  será

- a) 16.
- b) 24.
- c) 34.
- d) 64.
- e) 136.

**Resolução:** Do enunciado, o número mágico de um quadrado  $4 \times 4$  é dado por:

$$\frac{1 + 2 + \dots + 16}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1 + 16}{2} \right) \cdot 16 = 34$$

**Questão 2 (UPE - 2012):** O quadrado mágico abaixo foi construído de maneira que os números em cada linha formam uma progressão aritmética de razão  $x$ , e, em cada coluna, uma progressão aritmética de razão  $y$ , como indicado pelas setas.

		5		
				15
10				
			N	

Sendo  $x$  e  $y$  positivos, qual o valor de  $N$ ?

- a) 14   b) 19   c) 20   d) 23   e) 25

**Resolução:** Cada linha forma uma progressão aritmética de razão  $x = 2$ . Cada coluna, uma progressão aritmética de razão  $y = 3$ .

Portanto, temos:

→	1	3	5	7	9
	4	6	8	10	12
	7	9	11	13	15
	10	12	14	16	18
	13	15	17	19	21

**Questão 3 (UFTM - 2012):** O quadrado mágico multiplicativo indicado na figura é composto apenas por números inteiros positivos. Nesse quadrado mágico, o produto dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais principais dá sempre o mesmo resultado.

50	2	x
y	10	50
10	z	w

Nas condições dadas,  $x + y + z + w$  é igual a

- a) 56.   b) 58.   c) 60.   d) 64.   e) 66.

**Resolução:** Temos que

$$100x = 500y = 10zw = 500w = 20z = 50xw \Rightarrow x = 10, y = 2, z = 50 \text{ e } w = 2$$

Portanto,  $x + y + z = 64$ .

**Questão 4 (Profmat MA21 - 2015):** Dado  $n \in \mathbb{N}$  par, pode existir um quadrado  $n \times n$  que é preenchido pelos  $n^2$  primeiros números primos?

**Resolução:** A resposta é não, e a razão é uma obstrução de paridade, baseada no fato que 2 é o único primo par.

Suponha, por absurdo, que existe um quadrado mágico como estipulado acima. Observe que a linha que contém 2 tem um elemento par e  $n - 1$  ímpares; como  $n - 1$  é ímpar, isto quer dizer que a soma dos números na linha é ímpar. Por outro lado, uma linha que não contém 2 tem de ter soma par (estamos somando  $n$  números ímpares e  $n$  é par!). Mas, então, temos duas linhas com somas distintas, absurdo!

**Questão 5 (PUCPR - 2005):** Um quadrado mágico é um arranjo quadrado de números tais que a soma dos números em cada fila (linha ou coluna) e nas duas diagonais é o mesmo. Os nove números  $n, n + 3, n + 6, \dots, n + 24$ , em que  $n$  é um número inteiro positivo, podem ser usados para construir um quadrado mágico de três por três.

A soma dos números de uma fila deste quadrado vale:

- a)  $3n + 6$
- b)  $3n + 36$
- c)  $3n$
- d)  $3n + 24$
- e)  $3n + 12$

**Resolução:** Os 9 números  $n, n + 3, n + 6, \dots, n + 24$  estão em PA cuja soma é  $S$

$$S = \left( \frac{n + n + 24}{2} \right) \cdot 9 = (n + 12) \cdot 9$$

e a soma dos elementos de uma fila é

$$\frac{S}{3} = \frac{(n + 12) \cdot 9}{3} = 3n + 36$$

### 5.3 Empacotamento de Latas

Nesta seção, apresentaremos uma atividade para que os alunos aprendam a melhor maneira de se embalar 6 latas cilíndricas.

**Tema:** Empacotamento de latas

**Objetivos:** Estudar conceitos de geometria aplicados a um problema de empacotamento.

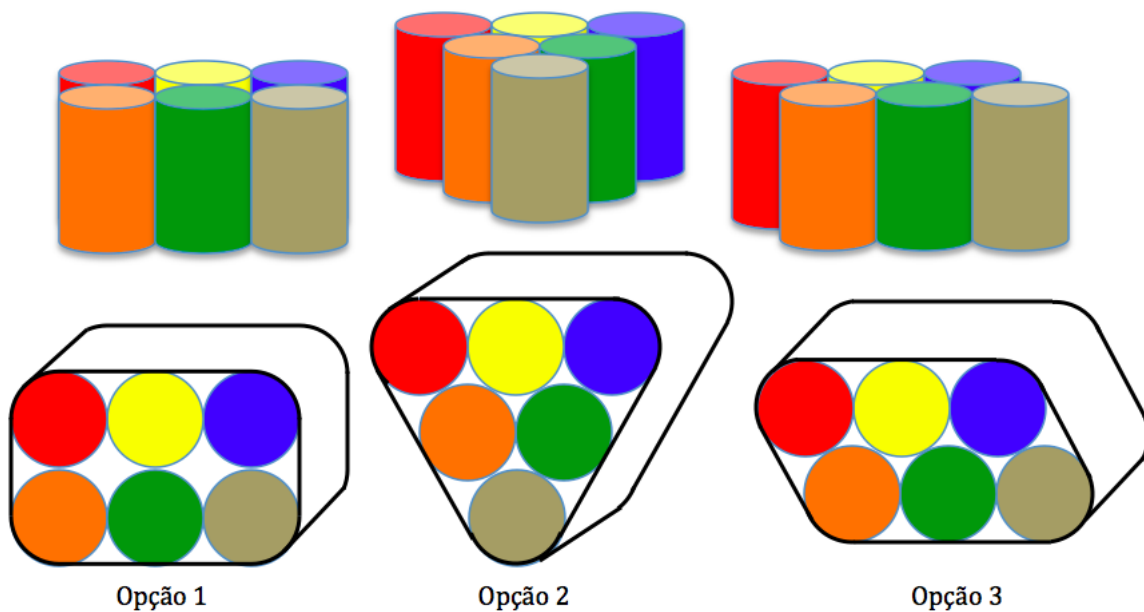
**Conteúdos Relacionados:** Áreas das figuras planas.

**Público alvo:** Estudantes da segunda série do ensino médio.

**Metodologia:** Dividir os alunos em grupos para calcularem a embalagem de menor custo para 6 latas cilíndricas.

**Atividade:** Suponha que você tenha que embalar, conjuntamente, 6 latas na forma de cilindro circular reto com 10 cm de diâmetro da base e 15 cm de altura.

Envolvendo as seis latas com uma superfície plástica, que se molda à forma de arranjar as latas, conforme mostra a figura abaixo, qual das opções seguintes requer um menor gasto de material plástico?



O professor pode orientar os alunos no cálculo das superfícies, revisando conceitos geométricos. Após calcular as áreas das superfícies das 3 opções, o aluno irá perceber que as opções 2 e 3 são equivalentes e melhores que a opção 1.

Um fato interessante é que as embalagens que envolvem as latas cilíndricas, em todas as opções, têm a mesma área lateral, mas a opção 1 possui maior área em suas bases, devido à forma de arranjar que deixa mais espaços vazios entre as latas.

Na sequência, o professor pode mencionar resultados e os problemas em aberto sobre empacotamento da Seção 4.5.

### Questões Propostas

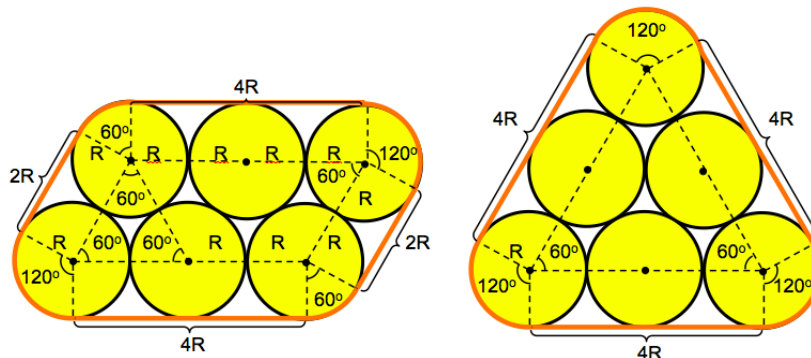
**Questão 1 (Canguru - 2016):** José quer juntar seis tubos cilíndricos de diâmetro 2 cm cada um com uma fita elástica. Ele considerou apenas as duas opções abaixo:



O que podemos afirmar sobre as duas fitas enquanto estão envolvendo os cilindros?

- a) A da figura à esquerda é  $\pi$  cm mais curta. b) A da figura à esquerda é 4 cm mais curta.  
 c) A da figura à direita é  $\pi$  cm mais curta. d) A da figura à direita é 4 cm mais curta.  
 e) As duas têm o mesmo comprimento.

**Resolução:** Observe que na figura da esquerda, o comprimento é dado pelas medidas de 4 segmentos de reta que somam  $12R$  e 4 arcos de circunferência, com medidas que somam  $360^\circ$  e comprimento  $2\pi R$ , ou seja,  $12R + 2\pi R$ . Na figura da direita, o comprimento é dado pelas medidas de três segmentos de reta que somam  $12R$  e três arcos de circunferência que somam  $360^\circ$  e comprimento  $2\pi R$ , portanto nas duas figuras as fitas que envolvem os cilindros têm o mesmo comprimento.



**Questão 2 (Enem - 2017):** A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

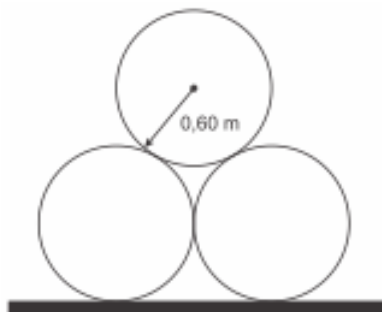
***Caminhão entala em viaduto no Centro***

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: [www.caminhoes-e-carretas.com](http://www.caminhoes-e-carretas.com).  
Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja  $r$  e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a  $2r$  do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo,  $0,50$  m menor do que a altura do vão do viaduto.

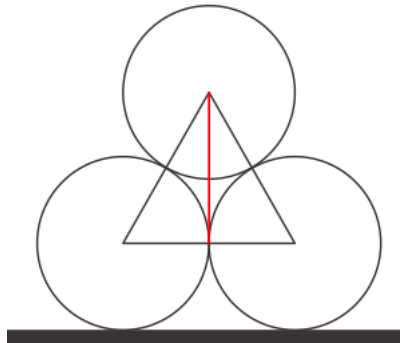
Considere  $1,7$  como aproximação para  $\sqrt{3}$

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- a) 2,82
- b) 3,52
- c) 3,70
- d) 4,02
- e) 4,20



**Resolução** Unindo-se os centros dos círculos, tem-se um triângulo equilátero (com altura  $h$  destacada em vermelho) de lado igual a  $2r$  conforme a figura a seguir:

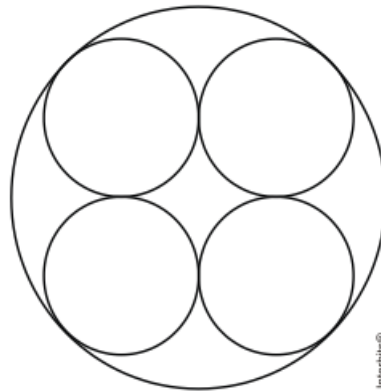


A altura total dos canos será igual a:

$$H_{\text{canos}} = h + 2r \quad \text{mas } r = 0,6 \quad \text{e } h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = 1,02, \quad \text{então}$$

$$H_{\text{canos}} = 1,02 + 1,2 = 2,22 \quad \text{e } H_{\text{viaduto}} = 1,3 + 0,5 + 2,22 = 4,02\text{m.}$$

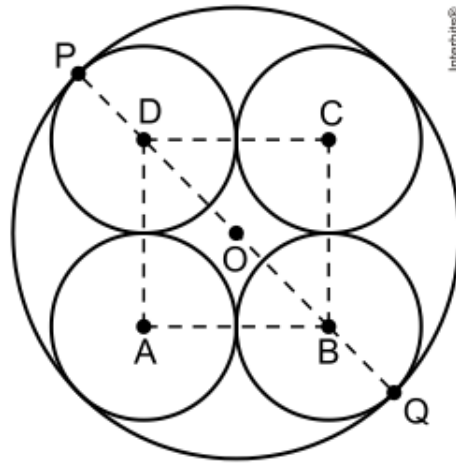
**Questão 3 (Enem - 2010):** *Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior*



*Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a*

- a) 12 cm
- b)  $12\sqrt{2}$  cm
- c)  $24\sqrt{2}$  cm
- d)  $6(1 + \sqrt{2})$  cm
- e)  $12(1 + \sqrt{2})$  cm

**Resolução:** Considere a figura, em que  $O$  é o centro da base do cilindro cujo raio queremos calcular.

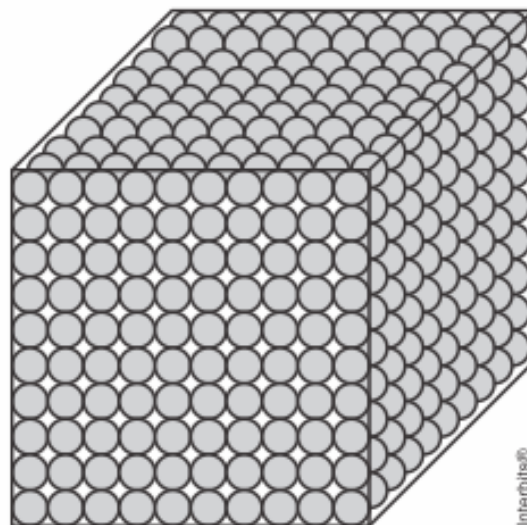


O lado do quadrado  $ABCD$  é igual ao diâmetro da base dos cilindros menores. Logo,  $\overline{AB} = 2 \cdot 6 = 12$  cm. Além disso, como  $\overline{OB} = \frac{\overline{BD}}{2}$ , segue que  $\overline{OB} = \frac{\overline{AB} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ . Portanto, o raio da base do cilindro maior é dado por

$$\overline{OQ} = \overline{OB} + \overline{BQ} = 6\sqrt{2} + 6 = 6(\sqrt{2} + 1) \text{ cm.}$$

### TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Observe na(s) questão(ões) o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com de aresta.

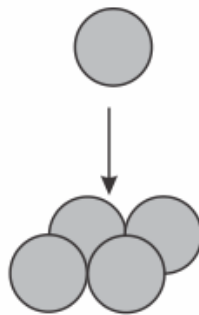


**Questão 4 (Enem - 1998):** Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:

- a) 100 bolinhas.
- b) 300 bolinhas.
- c) 1000 bolinhas.
- d) 2000 bolinhas.
- e) 10000 bolinhas.

**Resolução:** Total de bolinhas =  $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ .

**Questão 5 (Enem - 1998):** Uma segunda pessoa procurou encontrar uma maneira de arrumar as bolas na caixa, achando que seria uma boa ideia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura. Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:



- a) 729 bolinhas.
- b) 984 bolinhas.
- c) 1000 bolinhas.
- d) 1086 bolinhas.
- e) 1200 bolinhas.

**Resolução:** Note que 100 existem bolinhas na primeira camada, 81 bolinhas na segunda camada, 100 bolinhas na terceira camada, 81 bolinhas na quarta camada e assim alternadamente. Total de bolinhas em 12 camadas é  $6 \cdot 100 + 6 \cdot 81 = 1086$ .

## 5.4 Questões que Citam Problemas em Aberto

Nesta seção, apresentaremos questões que fazem referência a algum problema em aberto trabalhado nos capítulos anteriores. Tais questões foram selecionadas com o objetivo de servir como fonte de consulta para professores que desejam fazer uso de problemas em aberto em suas aulas, como também servir de lista de exercícios para o estudante que quer se aprofundar em matemática.

Esta lista constata que os problemas em aberto são mencionados com frequência nas provas de vestibulares e, principalmente, nas competições olímpicas de matemáticas.

As questões apresentadas nesta seção não são acompanhadas de suas respectivas soluções, como nas seções anteriores, mas em seus enunciados constam a fonte e o ano para auxiliar o leitor interessado na busca de suas soluções.

**Questão 1 (SSA 2 UPE - 2018):** Considere a função  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ , definida por:

$$f(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{se } n = 1 \text{ é ímpar;} \\ n \\ \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Na conjectura conhecida como problema de Collatz (1910-1990), se uma pessoa aplicar a função  $f$  sobre qualquer número natural não nulo e repetir sobre cada resultado obtido, em algum momento chegará a 1 como resultado.

Considere, agora, a sequência numérica  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  definida por  $a_1 = 12$  e  $a_n = f(a_{n-1})$ .

Em relação a essa sequência, analise as afirmativas seguintes:

- i. A soma de seus quatro primeiros termos é igual a 43.
- ii. O seu décimo termo é igual a 1.
- iii. É uma sequência crescente.
- iv. A subsequência finita  $(a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$  cujos termos ordenados são da sequência  $(a_n)$  é uma progressão geométrica de razão 0,5.

Estão **CORRETAS** apenas

- a) i, iii e iv.
- b) i e iv.
- c) ii e iii
- d) ii e iv.
- e) ii, iii e iv.

**Questão 2 (OPM-2013):** *Existem muitos problemas (muitos mesmo!) em Matemática cuja solução não é conhecida até hoje, são os chamados Problemas em Aberto, os quais normalmente envolvem Conjecturas (suposições não confirmadas). Nessa questão vamos explorar um desses problemas em aberto. Tome a soma dos divisores positivos próprios de um inteiro positivo  $n$ , ou seja, a soma dos inteiros positivos que são divisores de  $n$  e menores do que  $n$ . Por exemplo, a soma dos divisores positivos próprios de 12 é  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 12$ . Agora considere a soma dos divisores próprios do valor obtido e assim sucessivamente. Começando por 12 teremos a sequência divisores positivos próprios. Vejamos outros exemplos:*

- $95 \rightarrow 25 \rightarrow 6 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$  : A sequência fica constante igual a 6 (ciclo de tamanho 1);
- $220 \rightarrow 284 \rightarrow 220 \rightarrow 284 \rightarrow \dots$  : Os números 220 e 284 alternam-se na sequência (ciclo de tamanho 2).

*Essas sequências são chamadas Sequências Alíquota.*

*Em 1888, Eugéne Catalan conjecturou que todas as sequências alíquota terminam em 1 ou em algum ciclo. Surpreendentemente, não é sabido até hoje se isso ocorre mesmo para sequências iniciadas por números “pequenos” como 276.*

*a) Verifique que a sequência alíquota iniciada pelo número 30 satisfaz a conjectura de Catalan. Algumas sequências alíquota satisfazem a conjectura de Catalan, porem “demoram” para chegar no 1 ou em um ciclo. Por exemplo, a sequência*

$$936 \rightarrow 1794 \rightarrow 2238 \rightarrow 2250 \rightarrow \dots \rightarrow 74 \rightarrow 40 \rightarrow 50 \rightarrow 43 \rightarrow 1$$

*tem 189 termos sendo o maior deles  $33.289.162.091.526!$  Isso leva a outro problema em aberto: existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em 1?*

*b) Mostre que o penúltimo termo de uma sequência terminada em 1 sempre é um número primo.*

*c) Exiba uma sequência alíquota com 10 termos terminada em  $9 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  cujos demais seis termos sejam produtos de dois primos distintos.*

*d) Como foi dito no início do enunciado, os problemas em aberto são muitos. E muitas vezes possuem conexões interessantes. Considere o problema em aberto: todo número par maior do que 6 é a soma de dois primos distintos? Suponha que alguém tenha demonstrado que, de fato, isso ocorre. Prove que, então, pode-se concluir que existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em 1.*

**Questão 3 (UFG - 2006):** *O maior número primo conhecido foi descoberto no ano passado por Martin Nowak. Ele é dado por  $2^{25964951} - 1$ .*

*Considerando o algoritmo de Euclides para a divisão por 8 desse número, pode-se escrever a equação  $2^{25964951} - 1 = 8k + r$ . Então o resto  $r$  da divisão por 8 do maior primo conhecido é:*

- a) 0      b) 2      c) 5      d) 6      e) 7

**Questão 4 (Colégio Pedro II - 2010):** Na Matemática, os números primos sempre foram objeto de especial atenção. Em 1742, na correspondência entre o matemático prussiano Christian Goldbach e o famoso matemático suíço Leonard Euler, foi formulada a seguinte questão, conhecida por “Conjectura de Goldbach”:

**Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.**

Esta suposição tornou-se um dos problemas mais intrigantes da Matemática e não foi resolvido até os dias de hoje.

Verifique você também a validade desta afirmação!

a) Há quantos anos os matemáticos tentam resolver o problema citado no texto acima? Escreva a sua resposta em notação científica.

b) Escreva todos os números primos menores que 28.

c) Escreva todas as formas de representar o número 28 como soma de dois números primos.

**Questão 5 (UNB - 2011):** Em 1772, o matemático Euler observou que, ao se inserir os números inteiros de 0 a 39 na fórmula  $x^2 + x + 41$ , obtém-se uma lista de 40 números primos. No plano de coordenadas cartesianas  $xOy$ , considerando  $y = g(x) = x^2 + x + 41$ , conclui-se que os pares  $(N, g(N))$ , para  $0 \leq N \leq 39$ , pertencem a uma parábola que

a) intercepta o eixo das ordenadas em um número composto.

b) ilustra uma função crescente no intervalo  $[0, 39]$ .

c) intercepta o eixo das abscissas em dois números primos.

d) tem vértice em um dos pares ordenados obtidos por Euler.

**Questão 6 (Banco de questões OBMEP - 2007):** Neste problema, iremos estudar quantos fatores 2 aparecem na fatoração de números da forma  $5^{2^n} - 1$ .

(a) Sejam  $x$  e  $y$  dois números inteiros ímpares. Prove que  $x^2 + y^2$  possui exatamente um fator 2 em sua fatoração em primos.

(b) Usando a fatoração  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , determine quantos fatores 2 o número  $5^4 - 1$  possui.

(c) O número  $N = 5^{2^{2017}} - 1$  possui quantos fatores 2?

(d) Sabendo que o número  $5^{20}$  possui 14 algarismos. Prove que  $5^{2^{18}+20}$  possui 6 zeros consecutivos em sua representação decimal.

**Questão 7 (OBMEP - 2007):** Paula escreveu os números  $1, 2, 3, \dots$  em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Os números que aparecem ao longo da flecha forma a sequência  $1, 3, 13, 31, \dots$  qual é o 30º termo dessa sequência?

									...
								...	
37	36	35	34	33	32	31			
38	17	16	15	14	13	30			
39	18	5	4	3	12	29			
40	19	6	1	2	11	28	...		
41	20	7	8	9	10	27	...		
42	21	22	23	24	25	26	51		
43	44	45	46	47	48	49	50		

- a) 3301
- b) 3303
- c) 3307
- d) 3309
- e) 3313

**Questão 8 (Banco de questões OBMEP - 2008): Palíndromos** - O ano 2002 é palíndromo porque é o mesmo quando lido da direita para a esquerda.

- (a) Qual será o próximo ano palíndromo depois de 2002?
- (b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?
- (c) O último ano palíndromo primo ocorreu há mais de 1000 anos, em 929. Quando ocorrerá o próximo ano palíndromo primo?

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

O conceito de número primo, um número natural maior que 1, divisível apenas por 1 e por ele mesmo, remonta aos matemáticos da Grécia Antiga. Por volta de 350 a.C., Euclides provou que qualquer número inteiro maior que 1 ou é primo ou pode ser escrito como o produto de números primos de forma única, exceto pela ordem em que os primos são escritos. Essa propriedade, que é formalizada por meio do teorema fundamental da aritmética, pode ser transposta à química, estabelecendo uma comparação entre números primos e átomos: blocos fundamentais a partir dos quais os números/estruturas moleculares são construídos. Assim como conhecer a estrutura molecular única de uma substância pode nos dizer muito sobre suas propriedades, conhecer a decomposição única de um número em fatores primos pode nos dizer muito sobre suas propriedades matemáticas.

Euclides provou indiretamente que existem infinitos números primos ao mostrar que não existe o maior número primo. Supondo que existisse tal número e representando-o pela letra  $P$ , Euclides provou que, ao se multiplicar todos os números primos de 2 a  $P$ , incluindo estes, e acrescentando-se 1 ao resultado, obtém-se um novo número primo, naturalmente maior que  $P$ . Outro fato importante é que, à medida que se consideram números cada vez maiores, os primos parecem escassear. Enquanto existem 4 primos menores que 10, existem apenas 25 menores que 100, só 168 menores que 1.000 e 1.229 menores que 10.000. Podemos considerar esses dados como a taxa média segundo a qual os primos surgem: 0,4 abaixo de 10; 0,25 abaixo de 100; 0,168 abaixo de 1.000; e 0,1229 abaixo de 10.000. Essas quantidades podem ser tomadas como “densidades” ( $D_N$ ) dos primos menores ou iguais ao número natural  $N$ , calculadas assim:

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

em que  $P(N)$  é o total de primos menores ou iguais a  $N$ . Assim, ficam as perguntas:  $D_N$  diminui à medida que  $N$  aumenta, ou chega-se a um ponto em que a situação se inverte e encontram-se agrupamentos de primos? Existe algum tipo de padrão para a maneira como os primos se localizam no conjunto dos números naturais, ou eles se distribuem de maneira caótica?

Em 1791, quando tinha apenas 14 anos de idade, Gauss percebeu que a densidade dos primos é aproximadamente igual a

$$\frac{1}{\ln(N)},$$

em que  $\ln(N)$  é o logaritmo natural de  $N$ . De acordo com Gauss, quanto maior for  $N$ , melhor será essa aproximação.

Fonte: Keith J. Devlin. Os problemas do milênio. Rio de Janeiro: Record, 2004, p. 34-49 (com adaptações).



**Questão 9 (UNB - 2011):** De acordo com o texto, julgue os itens a seguir.

- a) Se os pares  $(N, P(N))$  forem representados em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, então esses pares ordenados pertencerão a uma mesma reta.
- b) Para todo número inteiro  $N$  maior que 1, vale a desigualdade  $P(N) < N$ .
- c) Para a densidade  $D_N$  definida no texto, é válida a relação  $D_N = D_{N^2} + D_{N^3}$ .
- d) Se  $P(N + 1) - P(N) \neq 0$ , então  $N + 1$  é um número primo.
- e) Escolhendo-se ao acaso um número natural de 1 a 1.000, a probabilidade de ele ser primo é menor que  $\frac{1}{4}$  da probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo mês em uma sala que tenha 6 indivíduos, assumindo-se que não há gêmeos, que o mês tem 30 dias e que as datas de aniversários são equiprováveis.
- f) Sabendo-se que de 1 a 10.000.000 existem 664.579 números primos, há chance de, aproximadamente, 1 em cada 15 números com sete algarismos ser primo.
- g) Infere-se do texto que, em 1791, Gauss percebeu que, entre os números naturais de 1 a  $N$ , aproximadamente 1 em cada  $\ln(N)$  números é primo.
- h) Se  $G(N) = \frac{N}{\ln(N)}$ , com  $N > 1$ , então  $e^{\frac{1}{G(N)}} = N^{\frac{1}{N}}$  em que  $e$  é a base do logaritmo natural.

**Questão 10 (UNB - 2011):** De acordo com o texto, Euclides provou de maneira indireta que a quantidade de números primos existentes é infinita. Um fato fundamental utilizado por ele para chegar a essa conclusão é que

- a) o produto de números primos distintos maiores que um número natural  $P$  fixado resulta em um número primo.
- b) as potências inteiras de um número primo acrescidas de uma unidade resultam em um número primo.
- c) o produto de números primos distintos acrescido de uma unidade pode gerar um número primo.
- d) o acréscimo de uma unidade a um número infinitamente grande resulta em um número primo.

**Questão 11 (OBM – 2007):** Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar, inventou um processo conhecido como Operação de Kaprekar. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma seqüência. Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será  $7200 - 0027 = 7173$ . O terceiro será  $7731 - 1377 = 6354$ . Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da seqüência?

**Questão 12 (UEL - 2007):** O "Sudoku" é um jogo de desafio lógico inventado pelo Matemático Leonhard Euler (1707- 1783). Na década de 70, este jogo foi redescoberto pelos japoneses que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado "número sozinho". É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. Folha de Londrina, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8	○	1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada com O no quadro a seguir é:

- a) 2
- b) 3
- c) 5
- d) 7
- e) 9

**Questão 13 (Banco de questões OBMEP - 2006):** *Quadrados Mágicos* - Complete as casas em branco da tabela abaixo com frações de modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das duas diagonais seja sempre a mesma.

		$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{2}$	
0,4	0,5	

**Questão 14 (Banco de questões OBMEP - 2015): Quadrados Mágicos**

a) João descobriu uma maneira de arrranjar os numeros  $1, 2, 3, \dots, 16$  em um tabuleiro  $4 \times 4$  de modo que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre as mesmas. Uma das possibilidades está no exemplo abaixo.

4	6	9	15
13	11	8	2
16	10	5	3
1	7	12	14

Encontre outro exemplo de distribuição desses 16 números satisfazendo as mesmas condições.

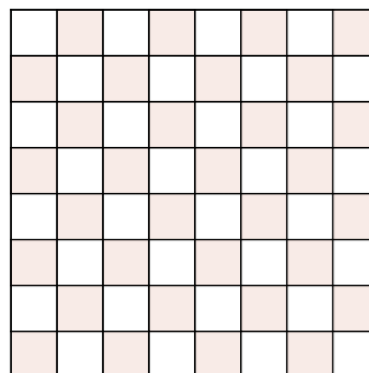
b) Verifique que em qualquer distribuição possível, sempre a soma dos números de cada linha e coluna é 34.

c) João fez agora um novo tipo de tabuleiro com outros números positivos. O produto dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre os mesmos. Quanto vale o número  $4H$  ?

$1/2$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

**Questão 15 (Banco de questões OBMEP - 2017): Ataques de torres de xadrez**

- Um tabuleiro de xadrez e um quadrado  $8 \times 8$  em que as casinhas estão distribuídas em 8 linhas e 8 colunas.



Uma torre em um tabuleiro de xadrez ataca todas as peças que estejam na sua linha ou na sua coluna. Sabendo disso, determine:

- a) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que não haja duas se atacando?
- b) Qual o número máximo de torres que podemos colocar num tabuleiro de xadrez de modo que cada torre seja ameaçada de ataque por no máximo uma das outras torre?

**Questão 16 (OBMEP - 2009): Tabuleiro de xadrez** - De quantas maneiras podemos colocar dois bispos num tabuleiro de xadrez em filas, colunas e casas de cores distintas?

**Questão 17 (Banco de questões OBMEP - 2015): Números em sequência que se repetem** - Uma propriedade interessante do número 2013 é que 3 é o último dígito da soma  $2 + 0 + 1$ . Repetindo-se esse processo, isto é, escrevendo-se à direita o último dígito da soma dos três dígitos anteriores, teremos uma sequência:

$$2, 0, 1, 3, 4, 8, 5, 7, \dots$$

- a) Prove que começando com a sequência  $2, 0, 1$ , nessa ordem, podemos também encontrar os três números consecutivos  $1, 2, 2$ , nessa ordem.
- b) Observe que se uma sequência de três números consecutivos aparecer novamente na mesma ordem, então toda a sequência se “repetirá” sucessivamente. Por exemplo, a sequência abaixo **não é a sequência do enunciado**, mas se repete a cada quatro números

$$\dots \underline{1243}12431243\dots 12431243\dots$$

Verifique que alguma sequência de três dígitos se repete na sequência do enunciado.

- c) Suponha que na primeira aparição de "a, b, c" na sequência, o número imediatamente anterior seja  $x$ , e que na sua segunda aparição seja  $y$ , ou seja, na sequência iremos encontrar os números na seguinte ordem:

$$\dots, x, a, b, c, \dots, y, a, b, c, \dots$$

Mostre que  $x = y$ .

- d) Dado que  $1, 2, 2$  apareceu na sequência, nessa ordem, mostre que eventualmente aparecerá novamente a sequência de dígitos  $2, 0, 1$ , também nessa ordem.

**Questão 18 (Banco de questões OBMEP - 2017): A sequência de Conway**

a) Na sucessão de 9 linhas com algarismos apresentada abaixo, cada sequência de dígitos em uma linha é obtida da linha anterior através de uma regra.

1,  
 11,  
 21,  
 1211,  
 111221,  
 312211, 13112221, 1113213211, 31131211131221 ...

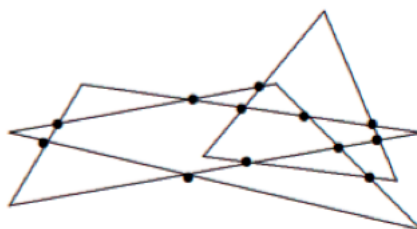
Determine os algarismos da décima linha.

b) Na sucessão de linhas abaixo, foi aplicada a mesma regra do item anterior, entretanto, o primeiro algarismo  $d \in \{0,1,2,\dots,9\}$  é diferente de 1.

$d$ ,  
 $1d$ ,  
 $111d$   
 ...

Qual a sequência de algarismos escritos na sétima linha?

**Questão 19 (Banco de questões OBMEP - 2010): Interseção de triângulos** - Os 3 triângulos da figura se cortam em 12 pontos diferentes. Qual é o número máximo de pontos de intersecção de 3 triângulos?



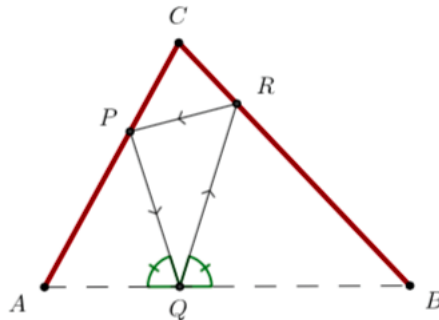
**Questão 20 (Banco de questões OBMEP - 2010): Frações egípcias** - Determine todos os números inteiros positivos distintos  $x$  e  $y$  tais que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{7}.$$

**Questão 21 (Banco de questões OBMEP - 2010):** *Retângulo com dimensões inteiras* - As diagonais de um retângulo medem  $\sqrt{1993}$  cm. Quais são suas dimensões, sabendo que elas são números inteiros?

**Questão 22 (Banco de questões OBMEP - 2011):** *Pés das Perpendiculares* - Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com alturas  $BD$  e  $CE$ . Os pontos  $F$  e  $G$  são os pés das perpendiculares  $BF$  e  $CG$  a reta  $DE$ . Prove que  $EF = DG$ .

**Questão 23 (OPEMAT - 2017):** *Um garoto se posiciona em um ponto  $Q$  localizado entre os pontos  $A$  e  $B$  (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por  $BC$ , seguindo até a parede  $AC$  e volta precisamente ao ponto  $Q$  de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que  $\angle AQP = \angle BQR$ . Mostre que o ponto  $Q$  é pé da altura relativa ao lado  $AB$  no triângulo  $ABC$ .*



**Questão 24 (Banco de questões OBMEP - 2015):** *Formando triângulos obtusângulos* - Dado um triângulo de lados  $a \geq b \geq c$ , pela lei dos cossenos temos:

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

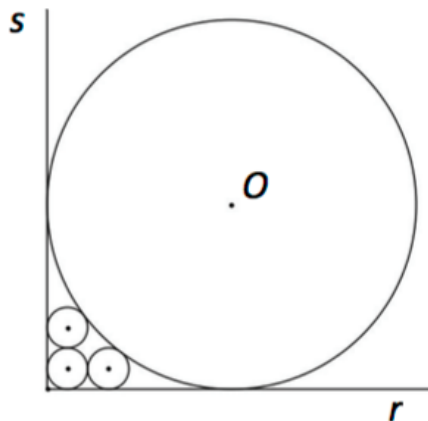
Se o ângulo  $\hat{C}$  é obtuso,  $\cos \hat{C} < 0$ . Como  $2ab$  é positivo, isso é o mesmo que  $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ . Portanto, para um triângulo ser obtusângulo, o maior lado elevado ao quadrado é maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados. Além disso, pela desigualdade triangular, sabemos que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. Podemos resumir essas duas informações através das desigualdades

$$a^2 + b^2 < c^2 < (a + b)^2.$$

Quantos triângulos obtusângulos podemos formar com lados inteiros positivos menores que 7?

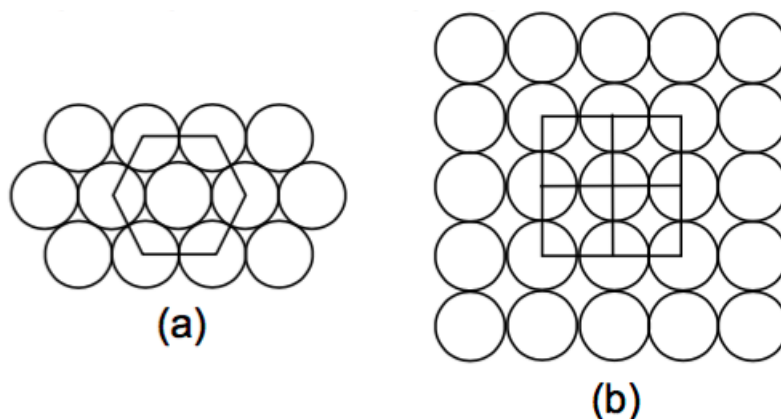
*Observação:* Considere que dois triângulos com os mesmos comprimentos de lado mas em ordens diferentes representam o mesmo triângulo.

**Questão 25 (Profmat MA13 - 2012/2):** A figura abaixo mostra as semirretas perpendiculares  $r$  e  $s$ , três circunferências pequenas cada uma com raio igual a 1 e uma circunferência grande de centro  $O$ . Uma das circunferências pequenas é tangente a  $r$  e a  $s$ , cada uma das outras duas é tangente a ela e a uma das semirretas, e a circunferência grande é tangente às semirretas e a duas das circunferências pequenas.



Calcule o raio da circunferência grande.

**Questão 26 (OBF 2a fase - 2014):** O empacotamento de partículas constituintes de um cristal: deseja-se empacotar esferas rígidas de mesmo tamanho. Para simplificarmos o problema tratado por Kepler, vamos supor que ao invés de esferas tenhamos discos idênticos como, por exemplo, moedas, e desejamos colocar os discos uns ao lado dos outros de modo a se obter a máxima densidade possível. A figura mostra dois arranjos diferentes.



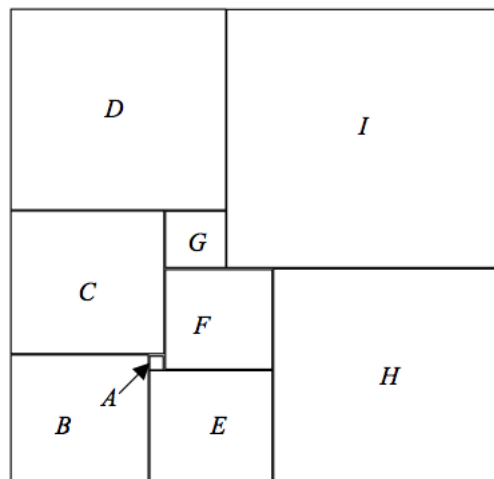
O empacotamento mostrado em (a) é chamado empacotamento hexagonal e em (b) empacotamento quadrado. Em cada um dos casos mostrados determine a densidade de empacotamento - fração de área ocupada pelos discos.

**Questão 27 (OBMEP - 2010):** *Um número perfeito* - Um número natural  $n$  é dito perfeito se a soma de todos os seus divisores próprios, isto é, divisores diferentes de  $n$ , é igual a  $n$ . Por exemplo, 6 e 28 são perfeitos, pois  $6=1+2+3$  e  $28=1+2+4+7+14$ . Sabendo que  $2^{31} - 1$  é um número primo, mostre que  $2^{30}(2^{31} - 1)$  é um número perfeito.

**Questão 28 (Banco de questões OBMEP - 2017):** *Cevianas no triângulo* - Um triângulo  $ABC$  tem lados de comprimentos  $AB = 50$  cm,  $BC = 20$  cm, e  $AC = 40$  cm. Sejam  $M$  e  $N$  pontos no lado  $AB$  tais que  $CM$  é a bissetriz relativa ao ângulo  $\angle ACB$  e  $CN$  é a altura relativa ao lado  $AB$ . Qual a medida, em centímetros, de  $MN$ ?

**Questão 29 (Geometria Elementar - Marista):** *Mostre que em todo paralelepípedo, a soma dos quadrados das quatro diagonais é igual a soma dos quadrados das 12 arestas.*

**Questão 30 (OBM 2000):** *O retângulo abaixo está dividido em 9 quadrados, A, B, C, D, E, F, G, H e I. O quadrado A tem lado 1. Qual é o lado do quadrado I?*





## 6 CONCLUSÃO

O estudo mostrou-se relevante à medida que traz uma reflexão sobre a importância do uso de problemas em aberto no ensino da matemática, de forma a promover mudanças no modo de ensinar e iniciar o aluno da educação básica na pesquisa científica em matemática.

A aplicação de problemas em aberto no ensino médio pode motivar os alunos deste nível a aprender matemática, deixando-os surpresos com a possibilidade de entender a afirmação de um problema não resolvido e como problemas aparentemente simples como a Conjectura de Collatz não estão resolvidos.

O trabalho mostra que existem vários problemas em aberto cujos enunciados estão no nível de matemática da educação básica, como também afasta dos alunos a mentalidade de que todos os problemas têm respostas conhecidas e que seus professores podem encontrar a resposta a todos os problemas. Apesar de não resolver nenhum dos problemas em aberto o texto produzido apresenta avanços e soluções parciais para a maioria dos problemas, promovendo um aprofundamento de conteúdos matemáticos da educação básica e acrescentando conteúdos que normalmente não são trabalhados neste nível escolar, por exemplo o Princípio da Indução Matemática que é extremamente útil para um aprendizado mais consistente.

É muito importante o uso de atividades investigativas nas aulas de matemática e os problemas em aberto podem promover uma mudança na maneira de ensinar proporcionando uma maior interação entre o professor e os seus alunos, gerando um ambiente investigativo para a construção do conhecimento, mas não para assimilação de algo que está pronto e acabado. Além de desenvolver várias habilidades na resolução de problemas e promover atividades investigativas e algumas vezes lúdicas, como os Cubos de Langford, este trabalho permite aprimorar a maneira correta de se escrever matemática, pois as demonstrações e resoluções se apresentam de forma lógico-dedutiva em linguagem formal.

Vale ressaltar que o propósito deste trabalho é mudar a concepção na maneira de se fazer matemática na educação básica, mostrando a importância da utilização de problemas em aberto, e que, como professor, mudei a maneira de ensinar com o uso de problemas em aberto, deixando de lado o caráter mais expositivo e passando a ser mais interativo, promovendo discussões e fazendo reflexões com aulas mais interessantes e produtivas.

Desenvolvemos um texto muito enriquecedor contemplando várias áreas da matemática com foco nos problemas em aberto sobre Teoria dos Números, Combinatória e Geometria. Além de toda diversidade matemática este trabalho tem múltiplas fun-

ções, pois qualquer leitor interessado com nível básico de conhecimento matemático pode entendê-lo, estudantes do ensino médio podem se aprofundar nos conteúdos escolares e desfrutar das resoluções de várias questões e pesquisadores podem usá-lo como manual de consulta de problemas em aberto. Mas a todos estes que de alguma forma tiverem acesso à este trabalho, que o mesmo demonstre a importância da utilização de problemas em aberto no ensino de matemática.

Em um processo de aprendizagem ativa o aluno deve ser protagonista de seu aprendizado, em uma relação interativa com o professor, criando uma via de mão dupla em que ambos aprendem e se desenvolvem. É fato que o uso de atividades investigativas proporciona essa aprendizagem ativa, colocando o professor como orientador que ajuda o aluno a ir além de onde conseguiria ir sozinho. Acreditamos que o uso dos problemas matemáticos em aberto podem promover a investigação, mas durante a elaboração deste material surgiram os seguintes questionamentos:

1. Qual a melhor forma de se propor um problema matemático em aberto a um estudante do ensino médio? Mencionar ou não que se trata de um problema em aberto?
2. O conhecimento prévio pelo estudante do ensino médio de que um problema matemático está em aberto gera motivação ou desestímulo para tentar respondê-lo?
3. Se um problema matemático em aberto gerar uma motivação num estudante do ensino médio para tentar respondê-lo, será apenas por um curto espaço de tempo e logo desistirá após algumas tentativas de resolução?
4. Os problemas matemáticos em aberto motivam apenas alunos do ensino médio com alto potencial em matemática ou podem motivar os que têm dificuldade?
5. A motivação gerada por um problema matemático em aberto pode causar dependência e viciação, prejudicando pedagogicamente o estudante do ensino médio nos seus estudos regulares?

Assim, pretendemos dar continuidade nesta pesquisa em um projeto de doutorado em educação matemática com aplicação deste material para coletar dados que permitam analisar o comportamento dos estudantes do ensino médio diante dos problemas em aberto e, conseqüentemente, elaborar uma proposta curricular de matemática para o ensino médio incentivando atividades investigativas através de problemas em aberto.

# REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M.. **As provas estão n'ó Livro**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2002. Tradução de: Marcos Botelho e Elza F. Gomide.

ANDERSEN, Jens Kruse. **Primes in Arithmetic Progression Records**. 2017. Disponível em: <<http://primerecords.dk/aprecords.htm>>. Acesso em: 11 fev. 2018.

BACHRAOUI, M. El. Prime in the Interval  $[2n, 3n]$ . **International Journal Of Contemporary Mathematical Sciences**, Morocco, v. 1, n. 13, p.617-621, 2006.

BAEZ, John. **A Packing Pessimization Problem**. 2014. Disponível em: [https://golem.ph.utexas.edu/category/2014/09/a\\_packing\\_pessimization\\_proble.html](https://golem.ph.utexas.edu/category/2014/09/a_packing_pessimization_proble.html). Acesso em: 25 jan. 2018.

BANQUEIRO oferece US\$ 1 milhão por solução de problema matemático. 2013. Disponível em: <<http://g1.globo.com/planeta-bizarro/noticia/2013/06/banqueiro-oferece-us-1-milhao-por-solucao-de-problema-matematico.html>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

BARBOSA, João Paulo Carneiro; ASSIS NETO, Fernando Raul de. Pierre Laurent Wantzel: O Último Capítulo de Dois dos Três. In: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracaju. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática**. São Paulo: Sbh, 2011. p. 1 - 9.

BARNETT, Jeffrey A.. **Permutation Strings**. Disponível em: <<http://www.notatt.com/permutations.pdf>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

BERRY, Nick. **Langford's Sequences**. 2014. Disponível em: <<http://datagenetics.com/blog/october32014/index.html>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

BOYER, C. B. **Historia da Matematica**. Trad. Elza Gomide. 2a ed. Sao Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BOYER, Christian. Some notes on the magic squares of problem. **The Mathematical Intelligencer**, [s.l.], v. 27, n. 2, p.52-64, 2005.

BRASIL, Bbc. **Por que um problema simples é um dos buracos negros da matemática**. 2016. Disponível em: <<http://www.bbc.com/portuguese/geral-36702054>>. Acesso em: 10 out. 2016.

BUCHHOLZ, Ralph H.. **On Triangles with rational altitudes, angle bisectors or medians**. 1989. 108 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, University Of Newcastle, Reino Unido, 1989.

BUCHHOLZ, Ralph H.; RATHBUN, Randall L.. An Infinite Set of Heron Triangles with Two Rational Medians. **The American Mathematical Monthly**, [s.l.], v. 104, n. 2, p.107-115, fev. 1997. JSTOR. <http://dx.doi.org/10.2307/2974977>.

CALDWELL, Chris K.; GALLOT, Yves. ON THE PRIMALITY OF  $n! \pm 1$  AND  $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p \pm 1$ . **Mathematics Of Computation**, S.l., v. 71, n. 237, p.441-448, 11 maio 2001. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/mcom/2002-71-237/S0025-5718-01-01315-1/S0025-5718-01-01315-1.pdf>>. Acesso em: 22 dez. 2017

CHEN, Elizabeth R.; ENGEL, Michael; GLOTZER, Sharon C.. Dense Crystalline Dimer Packings of Regular Tetrahedra. **Discrete Computational Geometry**, [s.l.], v. 44, n. 2, p.253-280, 17 jul. 2010. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-010-9273-0>.

D'AMBROSIO, Beatriz S.. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p.35-41, mar. 1993.

DUBNER, H. et al. Ten consecutive primes in arithmetic progression. **Mathematics Of Computation**, [s.l.], v. 71, n. 239, p.1323-1328, 28 nov. 2001. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/mcom/2002-71-239/S0025-5718-01-01374-6/S0025-5718-01-01374-6.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2018.

FRIEDMAN, Erich. **Circles in Triangles**. Disponível em: <<http://www2.stetson.edu/efriedma/cirintri/>>. Acesso em: 10 nov. 2016.

GARDNER, M. **The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American**. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984.

GREEN, Benjamin; TAO, Terence. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. **Annals Of Mathematics**, [s.l.], v. 167, n. 2, p.481-547, 1 mar. 2008. Annals of Mathematics, Princeton U. <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2008.167.481>.

HEATH, Royal Vale. **Mathemagic: Magic - Puzzles - Games with Numbers**. [s.l.]: Dover Recreational Math, 1953.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2016. (Coleção Profmat).

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006. (Coleção Textos Universitários).

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática - OBMEP**. 2009. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>>. Acesso em: 02 jan. 2018.

HOUSTON, Robin. **Tackling the Minimal Superpermutation Problem**. 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1408.5108v1>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

JOHNSTON, Nathaniel. Non-uniqueness of minimal superpermutations. **Discrete Mathematics**, Ontario, v. 313, n. 14, p.1553-1557, jul. 2013. Elsevier BV.. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2013.03.024>>. Acesso em: 03 jan. 2013.

LAARHOVEN, Thijs. **The  $3n+1$  conjecture**. 2009. 65 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mathematics, Department Of Mathematics And Computer Science, Eindhoven University Of Technology, Eindhoven, 2009. Disponível em: <<http://www.thijs.com/docs/bsc09-thesis.pdf>>. Acesso em: 12 jan. 2018.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B.. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de m. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p.112-123, 2011.

LEMOS, Manoel. **Criptografia, Números Primos e Algoritmos**. 4. ed. Recife: Impa, 2010. Disponível em: <[https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM\\_04.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/PM_04.pdf)>. Acesso em: 15 jan. 2018.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1997. (Coleção do Professor de Matemática).

LIN, Cong; ZHIPENG, Li. **On Wilson's Theorem and Polignac Conjecture**. 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/math/0408018>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

LOO, Andy. On the Primes in the Interval  $[3n, 4n]$ . **International Journal Of Contemporary Mathematical Sciences**, Hong Kong, v. 6, n. 38, p.1871-1882, 2011.

MACHIAVELO, António. Fracções Egípcias. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, v. 153, n. 2, p.10-11, jul. 2007. Bianual.

MAGELA, Mateus Mendes. QUEBRA-CABEÇA DE LANGFORD UM CONVITE AO PENSAMENTO CRIATIVO MATEMÁTICO. In: IX ENEM, 9., 2013, Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte: Sbem, 2013. p. 1 - 5.

MARIC, Filip; ZIVKOVIC, Miodrag; VUCKOVIC, Bojan. **Formalizing Frankl's Conjecture: FC-families**. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1207.3604v1>>. Acesso em: 02 jan. 2018.

MARTINEZ, Victor Manuel Moreno. **Rational Distances to the Corners of the Unit Square**. 2009. 45 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências, California State University - Channel Islands, California, 2009.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 8. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

MISTRY, Roshni. **Circle Packing, Sphere Packing, and Kepler's Conjecture**. 2016. Disponível em: <http://math.stmarys-ca.edu/wp-content/uploads/2017/07/Roshni-Mistry.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2018.

MUNIZ NETO, Antônio C. **Temas de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana - Volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NISHIYAMA, Yutaka. **The Mysterious Number 6174: One of 30 Amazing Mathematical Topics in Daily Life**. Kioto: Gendai Sugakusha, Co., 2013.

NISHIYAMA, Yutaka. Numerical Palindromes and The 196 Problem. **International Journal Of Pure And Applied Mathematics**, Osaka, v. 80, n. 3, p.375-384, 2012.

OVERHOLT, Marius. The Diophantine Equation  $n!+1 = m^2$ . **Bulletin Of The London Mathematical Society**, London, v. 25, n. 2, p.104-104, mar. 1993. Oxford University Press (OUP). Disponível em: <https://doi.org/10.1112/blms/25.2.104>. Acesso em: 03 jan. 2018.

OWINGS, Jim. Tiling the unit square with squares and rectangles. **Journal Of Combinatorial Theory, Series A**, [s.l.], v. 40, n. 1, p.156-160, set. 1985. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165\(85\)90054-8](http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165(85)90054-8).

PANTOJA, Pedro. Primos gêmeos e outras conjecturas. **Revista Escolar de La Olimpiada Iberoamericana de Matemática**, S.l., n. 45, p.4-14, abr. 2012. Trimestral. Disponível em: [www.oei.es/historico/oim/revista\\_oim/numero45/primos.pdf](http://www.oei.es/historico/oim/revista_oim/numero45/primos.pdf). Acesso em: 21 abr. 2017.

PEIXE, Telmo; BUESCU, Jorge. Recorrências, progressões aritméticas e teoria ergódica: teoremas de van der Waerden e de Green-Tao. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 48-49, n. 1, p.39-51, 2010. Disponível em: [http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n48\\_n49/n48\\_n49\\_Artigo01.pdf](http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n48_n49/n48_n49_Artigo01.pdf). Acesso em: 20 fev. 2018.

PERALTA, Javier. Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución. **Educación Matemática**, Madrid, v. 6, n. 2, p.57-71, ago. 1994.

PEREIRA, Antônio; RODRIGUES, Rosália. O problema das Torres de Hanoi: a lenda, algoritmos e generalizações. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, v. 144, n. 2, p.8-16, jan. 2003. Bianual. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/get?gid=144>. Acesso em: 13 ago. 2017.

- 
- PERUZZO, Jucimar. **O Fascínio dos Números Primos**. Irani: S.n., 2012.
- RAND, Michael. **On the Frame-Stewart Algorithm for the Tower of Hanoi**. Disponível em: <[https://www2.bc.edu/julia-grigsby/Rand\\_Final.pdf](https://www2.bc.edu/julia-grigsby/Rand_Final.pdf)>. Acesso em: 03 jan. 2018.
- RENAULT, Marc. **The Fibonacci Sequence Under Various Moduli**. 1996. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Wake Forest University, North Carolina, 1996. Cap. 3. Disponível em: <<http://webpace.ship.edu/msrenault/fibonacci/FibThesis.pdf>>. Acesso em: 13 jan. 2018.
- RIBENBOIM, Paulo. Existem funções que geram os números primos? **Matemática Universitária**, S.l., v. 15, n. 15, p.1-12, dez. 1993. Disponível em: <<http://nautilus.fis.uc.pt/bspm/revistas/26/005-018.300.pdf>>. Acesso em: 12 jan. 2017.
- RINCON, Maria. **“Conjectura de Kepler”: problema é finalmente solucionado após 400 anos**. Disponível em: <https://www.megacurioso.com.br/matematica-e-estatistica/45295-conjectura-de-kepler-problema-e-finalmente-solucionado-apos-400-anos.htm>. Acesso em: 25 jan. 2018.
- RUBIO, Isabel. **Um milhão de dólares para quem resolver este ‘simples’ enigma de xadrez**. 2017. Disponível em: <[https://brasil.elpais.com/brasil/2017/09/04/ciencia/1504535610\\_082169.html](https://brasil.elpais.com/brasil/2017/09/04/ciencia/1504535610_082169.html)>. Acesso em: 03 jan. 2018.
- SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C.. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. 400 p.
- SARISTÁN, J. G.; GÓMEZ, A. I. P.. **Compreender e transformar o ensino**. São Paulo: Artmed, 1998.
- SCHWARTZ, Richard E. **Obtuse Triangular Billiards II: 100 degrees Worth of Periodic Trajectories**. 2008. Disponível em: <https://www.math.brown.edu/res/Papers/deg100.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2018.
- SHARMA, Ameet. **Rational Distance Problem for the Unit Square**. 2015. Disponível em: <<http://unsolvedproblems.org/S75.pdf>>. Acesso em: 05 out. 2017.
- SHULDHAM, Charles D.. Pandiagonal Prime Number Magic Squares. **The Monist**. Oxford, p. 608-613. out. 1914. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/27900509>>. Acesso em: 11 fev. 2018.
- SIEGEL, M.; BORASI, R.. Demystifyng mathematics education through inquiry. **Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology And Mathematics Education**, London, v. 4, n. 1, p.201-214, 1994.

SILVA FILHO, Antônio Carlos da. **Formulações Alternativas para a Conjectura de Collatz**. Disponível em: <[http://legacy.unifacef.com.br/novo/xi\\_encontro\\_de\\_pesquisadores/Trabalhos/Encontro/Antonio Carlos 2.pdf](http://legacy.unifacef.com.br/novo/xi_encontro_de_pesquisadores/Trabalhos/Encontro/Antonio Carlos 2.pdf)>. Acesso em: 07 set. 2016.

SINGH, Simon. **O último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Record, 2002.

SMARANDACHE, Florentin. **Nine Solved and Open Problems in Elementary Geometry**. 2010. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1003.2153.pdf>>. Acesso em: 23 jul. 2017.

STEIN, M. L.; ULAM, S. M.; WELLS, M. B.. A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes. **The American Mathematical Monthly**, New York, v. 71, n. 5, p.516-520, 1964. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2312588?origin=JSTOR-pdf>>. Acesso em: 03 jan. 2018.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. Tradução de: Diego Alfaro.

STEWART, Ian. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014. Tradução de: George Schlesinger.

STEWART, Ian. **Os mistérios matemáticos do professor Stewart: resolvidos por Hemlock Soames e o dr. Watsup**. Rio de Janeiro: Zahar, 2015. Tradução de: George Schlesinger.

SZPIRO, George. **Newton and the kissing problem**. 2003. Disponível em: <<https://plus.maths.org/content/newton-and-kissing-problem>>. Acesso em: 12 dez. 2017.

TOREZZAN, Cristiano. **Empacotamento de latas**. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1009>>. Acesso em: 21 dez. 2017.

WANG, Y.: **The Goldbach Conjecture, vol. 4**. [S.l.]. World scientific, 2002.

WATANABE, R. G. Uma formula para os numeros primos. **CD da Revista do Professor de Matematica (RPM)**, Sao Paulo: IME USP, 2012.

WELLS, David G.. **Prime numbers: the most mysterious figures in math**. New Jersey: John Wiley Sons, Inc, 2005.

ZHANG, Yitang. **Bounded gaps between primes**. 2013. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.308.998rep=rep1type=pdf>. Acesso em: 02 fev. 2018.