

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

**O uso de polinômios na racionalização de
denominadores**

Pedro José da Silva Pessoa

Dissertação de Mestrado

RECIFE/PE
Agosto 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pedro José da Silva Pessoa

O uso de polinômios na racionalização de denominadores

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves*

RECIFE/PE
Agosto 2013

Comissão Julgadora

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves - DM UFRPE
Presidente (orientador)

Prof. Dra. Bárbara Costa da Silva - DM UFRPE
Membro

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva - DM UFRPE
Membro

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araújo - DMat UFPE
Membro

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pedro José da Silva Pessoa

O uso de polinômios na racionalização de denominadores

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves*

RECIFE/PE
Agosto 2013

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada seria possível; aos meus familiares pela dedicação e compreensão, em todos os momentos da minha vida; e aos meus amigos PROFMAT que muito me alegraram e motivaram durante toda caminhada do curso.

Agradecimentos

Aos professores do PROFMAT pelo empenho e motivação na transmissão das aulas que enriqueceram a minha formação e prática como educador, em especial, ao amigo e professor Rodrigo Gondim Neves pela grandiosa paciência, aplicação e atenção que me motivaram na busca de conhecimentos e que foram fundamentais para a conclusão do curso de Mestrado Profissional. Agradeço a todos os amigos de curso pelo apoio e amizade que sempre foram presentes durante todo curso e que continuarão a fazer parte de minha vida.

Sábio é aquele que conhece os limites da própria ignorância.
—SÓCRATES

Resumo

Este trabalho visa apresentar técnica operatória que auxilie os estudos das racionalizações de denominadores de frações, sobretudo aquelas cuja racionalização difere das estudadas no nono ano do ensino fundamental. Tais racionalizações se baseiam num método para a obtenção do máximo divisor comum (mdc) de dois polinômios. A ideia central desse processo de racionalização passa pela busca de dois polinômios: um primeiro, cujo valor numérico associado a um dado número real α , equivale ao denominador da fração a ser racionalizada e um segundo, que seja mínimo de α . De posse desses polinômios, busca-se o mdc a ambos os polinômios e uma combinação desses polinômios que represente o próprio mdc. Neste trabalho, prova-se que o mdc encontrado é igual a 1. Aplicando o número real α a tal combinação, chega-se a um produto de dois números reais que equivale a 1, onde um deles é o denominador da fração. Desta forma, o outro número real do produto obtido é a racionalização da fração.

Palavras-chave: algoritmo, Euclides, polinômios, racionalização.

Abstract

This paper presents the operative technique that helps studies of rationalization of denominators of fractions, especially those whose rationalization studied differs from the ninth year of elementary school. Such a rationalization based method for obtaining the greatest common divisor (mdc) of two polynomials. The central idea of this rationalization process involves the pursuit of two polynomials: a first, whose numerical value associated with a given real number α , is equal to the denominator of the fraction to be rationalized and a second, which is at least α . With these polynomials, we seek the mdc both polynomials and a combination of these polynomials representing himself mdc. In this work proves that the gcd is found equal to 1. Applying real number α such combination, comes to a product of two real numbers is equivalent to 1, where one is the denominator of the fraction. Thus, another real number of the product is the rationalization of the fraction.

Keywords: algorithm, Euclids, polynomials, rationalization

Sumário

1	Outra forma de racionalizar	3
1.1	Inverso do irracional $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$	5
2	Polinômios	8
2.1	Algoritmo de Euclides para polinômios	11
3	Orientações metodológicas	26
4	Problemas Propostos	28

Introdução

O domínio das operações entre números reais é de suma importância para a compreensão das áreas de Estudo da Matemática. As operações de números irracionais, que se inicia no oitavo ano do ensino fundamental, estão entre as que mais amedrontam os alunos, inclusive aquelas que envolverem raízes não-exatas. Quando o estudante alcança o nono ano do ensino fundamental, tanto na Álgebra quanto na Geometria, ele se depara com situações como:

* Qual o valor aproximado de $\sqrt{648} + \sqrt{128}$?

* Como escrever $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8}$?

* Qual o número racional, com quatro casas decimais, que mais se aproxima de $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

Nos dois primeiros casos é natural pensar em utilizar as propriedades da radiciação estudadas no oitavo ano do ensino fundamental, quer seja para reduzir os radicais a um radical comum ou para tornar radicais de índices distintos num mesmo índice, ou até mesmo, estimar potências de racionais, com poucas casas decimais, que sirvam de aproximação para o que se deseja. Porém, na última situação, ao adotar 1,4142 como aproximação para $\sqrt{2}$, percebe-se uma maior dificuldade em efetuar a divisão em relação às demais operações envolvendo radicais. Mas ao utilizar a igualdade

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

se deixa de efetuar a divisão $1 \div 1,4142$ como uma aproximação de $1 \div \sqrt{2}$, para efetuar a divisão $1,4142 \div 2$ como uma aproximação de $\sqrt{2} \div 2$. Ou seja, deixa-se de efetuar uma divisão cujo divisor é um irracional para efetuar uma divisão em que o divisor é um racional, o que torna mais prático efetuar a operação de divisão. Em geral, uma fração está na forma racionalizada quando seu denominador for racional.

De modo geral, sendo $\frac{1}{\sqrt{a}}$, onde $0 < a \in \mathbb{Q}$, tem-se $\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$.

Observe que na fração $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, com $0 < a, b \in \mathbb{Q}$ e $a \neq b$, não mais é possível aplicar a mesma técnica empregada na fração anterior, usa-se o produto notável $(a + b) \cdot (a - b) = (a^2 - b^2)$ estudado no 8º ano do ensino fundamental:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Note que para racionalizar $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, basta considerar $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + (-\sqrt{b})}$.

Observe que nas racionalizações realizadas acima se tem a sensação que o uso de equações parece ser mais trabalhoso, contudo, geralmente se dá preferência ao uso de propriedades da radiciação, no universo dos números reais, e (ou) os principais produtos notáveis estudados no 8º ano do ensino fundamental como:

i) $\sqrt[n]{a^{n-m}} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^n} = a$, com n, m naturais;

ii) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$;

iii) $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;

iv) $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Desta maneira, consegue-se racionalizar denominadores semelhantes aos das frações a seguir:

$$\begin{aligned} \text{I) } \frac{17}{\sqrt[3]{17} + 3} &= \frac{17}{\sqrt[3]{17} + 3} \cdot \frac{(\sqrt[3]{17})^2 - \sqrt[3]{17} + 3^2}{(\sqrt[3]{17})^2 - \sqrt[3]{17} + 3^2} = \frac{17(\sqrt[3]{289} - 3\sqrt[3]{17} + 9)}{17 + 27} = \\ &= \frac{17}{44} \cdot (\sqrt[3]{289} - 3\sqrt[3]{17} + 9); \end{aligned}$$

$$\text{II) } \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{1 - (\sqrt[3]{2})^3} = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{1 - 2} = 1 - \sqrt[3]{2}.$$

CAPÍTULO 1

Outra forma de racionalizar

Em geral, é fácil racionalizar denominadores nos casos em que é possível utilizar algum produto notável. Nas duas últimas frações racionalizadas da seção anterior, a fatoração da soma de dois cubos e da diferença de dois cubos. Porém, há uma infinidade de frações cujo denominador não se adapta aos produtos notáveis estudados tratados no ensino fundamental e médio.

Uma situação que se encaixa neste contexto foi proposta na prova de matemática do vestibular de ingresso para a UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e para a UFRPE (Universidade Federal Rural de Pernambuco) realizado pela COVEST- COPSET (Comissão de Processos Seletivos e Treinamentos) no ano de 1999 em sua fase 2, problema 03.

"Considerando $\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, com $a, b, c \in \mathbb{Q}$, determine $41(a + 2b + c)$ ".

É natural tentar associar uma técnica que envolva algum dos produtos notáveis estudados no ensino fundamental no intuito de transformar $1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ num número racional, o que não será possível uma vez que aparece a parcela $3\sqrt[3]{2}$ e não simplesmente $\sqrt[3]{2}$. Uma forma possível é estabelecer condições aos racionais a, b e c de modo que:

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \cdot (1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 1 \quad (*)$$

Como $1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é irracional e na igualdade acima há um produto de dois reais que equivale a 1, então $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ é também irracional pois, do contrário, ocorreria um produto de um racional não-nulo com um irracional que equivaleria a um racional, o que não é possível. Observe:

Seja $\alpha \neq 0 \in \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{I}$.

Suponha que $\alpha = \frac{p_1}{q_1}$ onde $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ e $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, ambos não nulos, de modo que $\alpha \cdot \beta = \frac{p}{q}$, então

$$\alpha \cdot \beta = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p_1}{q_1} \cdot \beta = \frac{p}{q} \Rightarrow \beta = \frac{p}{q} \cdot \frac{q_1}{p_1} \Rightarrow \beta = \frac{p \cdot q_1}{q \cdot p_1}$$

Como $p \cdot q_1$ e $q \cdot p_1$ representam produtos de inteiros, então são inteiros. Assim, β é racional. Uma contradição, logo o produto de um racional não-nulo por um irracional é irracional.

Assim para determinar os valores de a, b e c , aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em (*) obtendo

$$(a + 2b + 6c) + (3a + b + 2c)\sqrt[3]{2} + (a + 3b + c)\sqrt[3]{4} = 1.$$

Observe que sendo a, b, c são racionais tais que $a \cdot b \cdot c \neq 0$ e que a soma do lado esquerdo da igualdade acima é igual a $1 \in \mathbb{Q}$, então $(3a + b + 2c)\sqrt[3]{2} + (a + 3b + c)\sqrt[3]{4}$ deve ser racional. Porém a soma de dois irracionais só é racional se somarem zero, ou seja,

$$(3a + b + 2c)\sqrt[3]{2} = -(a + 3b + c)\sqrt[3]{4}. \text{ Multiplicando por } \sqrt[3]{2}, \text{ tem-se}$$

$$(3a + b + 2c)\sqrt[3]{4} = -2 \cdot (a + 3b + c).$$

$$\text{Porém, } (3a + b + 2c)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{I} \text{ e } -2 \cdot (a + 3b + c) \in \mathbb{Q}.$$

Desta maneira, para que se tenha $(3a + b + 2c)\sqrt[3]{2} + (a + 3b + c)\sqrt[3]{4} = 0$, é necessário que $(3a + b + 2c) = (a + 3b + c) = 0$. Assim,

$$\begin{cases} a + 2b + 6c = 1 \\ 3a + b + 2c = 0 \\ a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b - 6c \\ 5b + 16c = 3 \\ b - 5c = -1 \end{cases}$$

tomando $b = 5c - 1$ na primeira equação do último sistema acima, obtém-se $5(5c - 1) + 16c = 3$, ou seja, $c = \frac{8}{41}$. Logo, $b = -\frac{1}{41}$ e $a = -\frac{5}{41}$. Desta forma, o vestibulando encontrará o valor pedido no problema.

Porém, dependendo da expressão que se tenha no denominador da fração apresentada, sobretudo no índice da raiz, pode-se ter uma complexidade no sistema de equações lineares obtido.

1.1 Inverso do irracional $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$

Na situação anterior no qual buscou-se encontrar a, b e c tais que

$$\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

sugere a seguinte pergunta:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$, sempre existem $x, y, z \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) \cdot (x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}) = 1?$$

Esta foi uma problemática proposta na III Olimpíada Iberoamericana de Matemática (1988, prob. no 5)

"Considere as expressões da forma $x + yt + zt^2$ com x, y, z racionais e $t^3 = 2$. Demonstre que: Se $x + yt + zt^2 \neq 0$, então existem u, v, w racionais tais que $(x + yt + zt^2) \cdot (u + vt + wt^2) = 1$ ".

Para demonstrar a igualdade acima note que $(x + yt + zt^2) \cdot (u + vt + wt^2) = 1$ equivale a $(xu + 2yw + 2zv) + (xv + yu + 2zw)t + (xw + yv + zu)t^2 = 1$.

O que significa dizer que se deve encontrar u, v, w racionais tais que

$$\begin{cases} xu + 2zv + 2yw = 1 \\ yu + xv + 2zw = 0 \\ zu + yv + xw = 0 \end{cases}, \text{ ou de modo equivalente, } \begin{bmatrix} x & 2z & 2y \\ y & x & 2z \\ z & y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mas a regra de Cramer utilizada para obter solução de um sistema de equações lineares garante que o sistema acima só terá solução única (x, y, z) se o determinante abaixo for não nulo.

$$\det \left(\begin{bmatrix} x & 2z & 2y \\ y & x & 2z \\ z & y & x \end{bmatrix} \right) = x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \neq 0$$

De fato tal determinante não se anula, pois do contrário, tomando $x = \frac{x_1}{q}, y = \frac{y_1}{q}, z = \frac{z_1}{q}$, com x_1, y_1, z_1, q inteiros de modo que $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$, obtém-se

$$\frac{x_1^3}{q^3} + 2\frac{y_1^3}{q^3} + 4\frac{z_1^3}{q^3} - 6\frac{x_1y_1z_1}{q^3} = 0, \text{ ou seja, } x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 - 6x_1y_1z_1 = 0.$$

O que significa que (x_1, y_1, z_1) também é solução de $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$.

Desta forma, se há solução racional, existe também solução inteira.

Note ainda que sendo $d = \text{mdc}(x_1, y_1, z_1)$, com $x_1 = dx_2$, $y_1 = dy_2$ e $z_1 = dz_2$, para únicos inteiros x_2, y_2, z_2 e $1 = \text{mdc}(x_2, y_2, z_2)$, tem-se

$$d^3x_2^3 + 2d^3y_2^3 + 4d^3z_2^3 - 6d^3x_2y_2z_2 = 0, \text{ isto é, } x_2^3 + 2y_2^3 + 4z_2^3 - 6x_2y_2z_2 = 0.$$

Ou seja, (x_2, y_2, z_2) também é solução da equação $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$.

Por outro lado, como $x_2^3 = -2y_2^3 - 4z_2^3 + 6x_2y_2z_2$, então x_2^3 é par e, conseqüentemente, x_2 é par também.

Fazendo $x_2 = 2x_3$ na última igualdade acima, chega-se a

$$8x_3^3 = -2y_2^3 - 4z_2^3 + 12x_3y_2z_2, \text{ isto é, } y_2^3 = 2z_2^3 - 6x_3y_2z_2 + 4x_3^3.$$

Logo, y_2 é par. Sendo $y_2 = 2y_3$ na última igualdade acima, tem-se

$$8y_3^3 = 2z_2^3 - 12x_3y_3z_2 + 4x_3^3, \text{ ou seja, } z_2^3 = 8y_3^3 + 6x_3y_3z_2 - 2x_3^3, \text{ o que quer dizer que } z_2 \text{ também é par. Uma contradição ao fato de que } \text{mdc}(x_2, y_2, z_2) = 1.$$

Assim, $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$ não admite raiz racional. Assegurando a existência de x, y, z , racionais.

Observe que a problemática apresentada pela III Olimpíada Iberoamericana de Matemática (1988. no 5), parte do princípio de que o inverso multiplicativo de $x + y\sqrt[3]{2} + z(\sqrt[3]{2})^2$, com x, y, z racionais, é também do mesmo tipo. O que provoca encontrar respostas para as seguintes perguntas:

1) Admitindo x_i e y_i racionais, com $0 \leq i \leq n$, pode-se generalizar

$$(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_nt^n) \cdot (y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_nt^n) = 1$$

onde $t^n = 2$, ou ainda $t^n = a$ com $a \in \mathbb{Q}$?

2) Que tipo de expressão tem inverso multiplicativo do mesmo tipo?

3) A forma de resolução escolhida é a mais adequada na busca de inverso multiplicativo de uma expressão irracional?

Em geral é difícil caracterizar o inverso multiplicativo de expressões dadas. Porém se a expressão for do tipo "algébrica" veremos no próximo capítulo que sempre é possível racionalizá-la por um processo algébrico.

CAPÍTULO 2

Polinômios

No que segue, quando uma propriedade for válida para todos os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , denotaremos, por simplicidade, apenas por \mathbb{K} . Do contrário ou por conveniência, será especificado algum (ou mais de um) entre os conjuntos: \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Definição 2.0.1. *Um polinômio com coeficientes em \mathbb{K} é uma expressão $f(x)$ do tipo*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

onde $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma seqüência de elementos em \mathbb{K} , de modo que existe algum $m \in \mathbb{N}$, para o qual $a_j = 0$ para todo $j > m$.

Todo $f(x)$ que satisfaz a definição acima pertence a $\mathbb{K}[x]$. Cada elemento $a_i \in \mathbb{K}$ é chamado de coeficiente de $f(x)$.

Para um $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ em $\mathbb{K}[x]$, convencionou-se o seguinte:

i) Se $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$, a_n é dito coeficiente líder ou dominante e $f(x)$ é polinômio de grau n (denotado por $\partial f(x) = n$) e ;

ii) Se $a_n = 1$, $a_j = 0$ para todo $j > n$, $f(x)$ é dito polinômio mônico;

iii) Se $a_0 \neq 0$ então a_0 é dito termo independente;

iv) Se $a_0 \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i \geq 1$, $f(x)$ é dito polinômio constante;

v) Se $a_0 = 1$ e $a_i = 0$ para todo $i \geq 1$, indica-se simplesmente por 1;

vi) Se $a_m = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$, isto é, $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots = \sum_{i \geq 0} 0x^i$ é dito de polinômio identicamente nulo. Sempre que não houver confusão, pode-se indicar o polinômio

nulo por 0.

Usualmente, consideraremos $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre \mathbb{K} , de modo que $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$.

Observação 2.0.2. Sempre que for conveniente, pode-se indicar por f quando se referir a um polinômio qualquer $f(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Definição 2.0.3. Sejam $f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{j \geq 0} a_j x^j$ polinômios em $\mathbb{K}[x]$, definimos as seguintes operações:

$$i) \text{ Soma de } f(x) \text{ e } g(x): (f + g)(x) = \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) x^k;$$

$$ii) \text{ Produto de } f(x) \text{ e } g(x): (f \cdot g)(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k, \text{ onde } c_k = \sum_{l \leq k} (a_{k-l} \cdot b_l)$$

As operações de adição e multiplicação de polinômios em $\mathbb{K}[x]$ gozam das propriedades:

$$i) \text{ Comutatividade: } f, g \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow f + g = g + f \text{ e } f \cdot g = g \cdot f;$$

$$ii) \text{ Associatividade: } f, g, h \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow (f + g) + h = f + (g + h) \text{ e } (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h);$$

$$iii) \text{ Distributividade: } f, g, h \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h;$$

iv) Elemento Neutro:

$$iv.i) \text{ Aditivo: } 0 \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow f + 0 = 0 + f = f;$$

$$iv.ii) \text{ Multiplicativo: } 0 \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow f \cdot 1 = 1 \cdot f = f.$$

Proposição 2.0.4. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$, então:

$$i) \partial(f + g) \leq \max\{\partial f, \partial g\};$$

$$ii) \partial(f \cdot g) = \partial(f) + \partial(g).$$

Prova: Sejam $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ onde $a_n \neq 0$ e

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$ com $b_m \neq 0$ (supor $n \geq m$).

i) Se $n > m$, então

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{(m+1)}x^{m+1} + \dots + a_nx^n$$

Logo, $\partial(f + g) = n$.

Suponha agora que $n = m$.

Se $a_n + b_m = a_n + b_m = 0$, então $\partial(f + g) < n$. Caso $a_n + b_m \neq 0$, obtém-se $\partial(f + g) = n$. Assim, $\partial(f + g) \leq \max\{\partial(f), \partial(g)\}$.

ii) Provando por indução em $n = \partial(f)$: Sejam $f(x) = (\sum_{i=0}^n a_ix^i)$ e $g(x) = (\sum_{j=0}^m b_jx^j)$.

$$\text{Para } n = 1, f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1x) \cdot (\sum_{j=0}^m b_jx^j) = a_0 \cdot (\sum_{j=0}^m b_jx^j) + a_1x \cdot (\sum_{j=0}^m b_jx^j).$$

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum_{j=0}^m a_0b_jx^j) + (\sum_{j=0}^m a_1b_jx^{j+1}), \text{ e pelo item i), tem-se } \partial(f(x) \cdot g(x)) = m + 1.$$

Suponha que seja válido para certo natural n , deve-se chegar a validade para $n + 1$. Assim,

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum_{i=0}^{n+1} a_ix^i) \cdot (\sum_{j=0}^m b_jx^j) = (a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{i=0}^n a_ix^i) \cdot \sum_{j=0}^m b_jx^j$$

isto é,

$$f(x) \cdot g(x) = a_{n+1}x^{n+1} \cdot \sum_{j=0}^m b_jx^j + \sum_{i=0}^n a_ix^i \cdot \sum_{j=0}^m b_jx^j$$

Pela hipótese da indução, $\partial(\sum_{i=0}^n a_ix^i \cdot \sum_{j=0}^m b_jx^j) = \partial(\sum_{i=0}^n a_ix^i) \cdot \partial(\sum_{j=0}^m b_jx^j) = n + m$, por outro

lado, tem-se que $\partial(a_{n+1}x^{n+1} \cdot \sum_{j=0}^m b_jx^j) = (n + 1) \cdot m$, então

$$\partial(f(x) \cdot g(x)) = (n + 1) \cdot m.$$

Logo, o resultado segue por indução.

Definição 2.0.5. *Divisibilidade de polinômios*

Dados dois polinômios f e $g \in \mathbb{K}[x]$, ambos não nulos e não constantes, diz-se que f divide g (indicando por $f|g$) quando existe um polinômio $h \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $g = f \cdot h$. Neste caso, f é dito divisor de g ou ainda, que g é múltiplo de f .

Proposição 2.0.6. *Sejam f, g e h em $\mathbb{K}[x]$ ambos não-nulos e não-constantes. Tem-se que:*

- i) $f|f$ e $f|0$;
- ii) Se $f|g$ e $g|h$, então $f|h$;
- iii) Se $f|g$ e $f|h$, então $f|(g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h})$ para todo $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{K}[x]$.

Prova:

- i) Decorre de imediato, das igualdades $f = 1 \cdot f$ e $0 = 0 \cdot f$;

ii) Se $f|g$ e $g|h$ então existem polinômios $j, k \in \mathbb{K}[x]$ de modo que $g = f \cdot j$ e $h = g \cdot k$. Substituindo g da primeira igualdade na segunda, tem-se $h = f \cdot j \cdot k = f \cdot (j \cdot k)$, o que assegura que $f|h$;

iii) Se $f|g$ e $f|h$ então existem $g_1, h_1 \in \mathbb{K}[x]$ para o qual $g = f \cdot g_1$ e $h = f \cdot h_1$. Então, $g \cdot \tilde{g} = f \cdot (g_1 \cdot \tilde{g})$ e $h \cdot \tilde{h} = f \cdot (h_1 \cdot \tilde{h})$, para todo $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{K}[x]$.

Desta forma, $g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h} = f \cdot (g_1 \cdot \tilde{g}) + f \cdot (h_1 \cdot \tilde{h})$. Pela propriedade distributiva da multiplicação de polinômios, tem-se

$$g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h} = f \cdot (g_1 \cdot \tilde{g} + h_1 \cdot \tilde{h}), \text{ isto é, } f|(g \cdot \tilde{g} + h \cdot \tilde{h}).$$

2.1 Algoritmo de Euclides para polinômios

O teorema a seguir é conhecido como divisão euclidiana para polinômios e que representa o algoritmo da divisão de polinômios nos mesmos moldes da divisão entre números inteiros.

Teorema 2.1.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x]$, com $g \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $f = g \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial g$.*

Prova: Existência: (Algoritmo de Euclides). Usando indução $n = \partial(f)$, há dois casos a considerar:

(i) $n < \partial(g)$. Então considere quociente $q = 0$ e resto $r = f$ e o algoritmo termina.

(ii) $n \geq \partial(g) = m$.

Seja a_{n+1} o coeficiente líder de $f(x)$ e b o coeficiente líder de $g(x)$.

Faça $q(x) = a_{n+1} \cdot b^{-1} x^{(n+1)-m}$ e encontre $r(x) = f(x) - q(x) \cdot g(x)$.

Note que o termo de maior grau de $q(x) \cdot g(x)$ é a_{n+1} , o mesmo de $f(x)$, ou seja, $\partial(r(x)) \leq n$. Assim, aplicando a hipótese de indução em $r(x)$, existe $\tilde{q}(x)$ e $\tilde{r}(x) = 0$ ou $\tilde{r}(x) < m$ tais que

$$f(x) - a_{n+1} b^{-1} x^{(n+1)-m} g(x) = g(x) \tilde{q}(x) + \tilde{r}(x).$$

ou seja,

$$f(x) = a_{n+1} b^{-1} x^{(n+1)-m} g(x) + g(x) \tilde{q}(x) + \tilde{r}(x).$$

e

$$f(x) = g(x) (a_{n+1} b^{-1} x^{(n+1)-m} + \tilde{q}(x)) + \tilde{r}(x).$$

Unicidade: Suponha que existam, além de q e r , dois polinômios $q_1, r_1 \in \mathbb{K}[x]$, tais que $f = g \cdot q + r = g \cdot q_1 + r_1$, com $r_1 = 0$ ou $0 \leq \partial r_1 < \partial g$.

Desta forma, $g \cdot (q - q_1) = r_1 - r$.

Assim, se $r \neq r_1$, então $\partial(g \cdot [q - q_1]) = \partial(r_1 - r)$ e, pela proposição 2.0.4,

$$\partial g \leq \partial(g \cdot [q - q_1]) = \partial g + \partial(q - q_1) = \partial(r_1 - r) < \partial g$$

Um absurdo. Logo, $r_1 = r$ e $q = q_1$.

Definição 2.1.2. Dados dois polinômios $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$. Um polinômio mônico d em $\mathbb{K}[x] - \{0\}$ é chamado de máximo divisor comum (mdc) de f e g , quando:

i) d é divisor comum de f e de g ;

ii) Se $\tilde{d} \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ é tal que $\tilde{d}|f$ e $\tilde{d}|g$, então $\tilde{d}|d$.

Pela definição decorre de imediato que d é o polinômio mônico de maior grau que divide f e g .

Observação 2.1.3. Denota-se o d por $\text{mdc}(f, g)$ ou simplesmente (f, g) .

Lema 2.1.4. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$, de modo que $\partial(f) > \partial(g)$. Se r é o resto da divisão de f por g , tem-se $(f, g) = (g, r)$.

Mais precisamente, o conjunto dos divisores comuns de f e g coincide com o conjunto dos divisores comuns de g e r .

Prova: O algoritmo da divisão de Euclides assegura que existe únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$, tais que $f = g \cdot q + r$.

Seja D_1 o conjunto dos divisores comuns de f e g e D_2 o conjunto dos divisores comuns de g e r . Se $d \in D_1$, então $d|f$ e $d|g$.

Logo, $d|r = f - g \cdot q$. Desta forma, $d \in D_2$. Reciprocamente, se $d \in D_2$, $d|g$, $d|r$ então $d|f = g \cdot q + r$, ou seja, $d \in D_1$. Assim, $D_1 = D_2$ e $(f, g) = (g, r)$.

Teorema 2.1.5. Algoritmo de Euclides para calcular mdc de polinômios em $\mathbb{K}[x]$.

Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$, com $\partial(f) > \partial(g)$. Existe um algoritmo para obter o (f, g) através de certo número finito de divisões euclidianas.

Prova: Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_{-1} = f$, $r_0 = g$ e $r_1 = r$. Efetuando as divisões sucessivas de r_i por r_{i+1} onde $i = -1, 0, 1, \dots, n$ (onde n é a passagem onde ocorre pela primeira vez o resto zero).

$$r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1} + r_{i+2}.$$

Observe que este processo se encerra num determinado número de divisões uma vez que $\partial(r_i) > \partial(r_{i+1})$. Portanto, $r_{n+1} = 0$ para algum n e $r_{n-1} = r_n \cdot q_n$.

Como o lema 2.1.4 garante que $(r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2})$, onde $i = -1, 0, 1, \dots, n$,

$$(f, g) = (r_i, r_{i+1}) = (r_{i+1}, r_{i+2}) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Corolário 2.1.6. Lema de Bézout para polinômios

Sejam $d, f, g \in \mathbb{K}[x]$, de modo que $d = (f, g)$, então existem $h, \tilde{h} \in \mathbb{K}[x]$ tais que

$$f \cdot h + g \cdot \tilde{h} = d.$$

Prova: Algoritmo de Euclides (estendido):

Seja $f = g \cdot q + r$, com $q, r \in \mathbb{K}[x]$. Considere $r_0 = f$, $r_1 = g$ e $r_2 = r$.

Suponha que $\partial f > \partial g$. O algoritmo de Euclides pode ser escrito do seguinte modo:

Divida r_0 por r_1 obtendo assim $r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$ e os coloque no diagrama a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c} & q_1 & \\ \hline r_0 & r_1 & \\ \hline & r_2 & \end{array}$$

Na segunda etapa, divida r_1 por r_2 , obtendo $r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$ e os coloque na coluna da direita do diagrama acima, construindo a formação a seguir:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & q_1 & q_2 & \\ \hline r_0 & r_1 & r_2 & \\ \hline & r_2 & r_3 & \end{array}$$

Note que $r_2 = r_0 + (-q_1) \cdot r_1$ e $r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot r_2$, ou seja,

$$r_3 = r_1 + (-q_2) \cdot (r_0 - q_1 \cdot r_1) = (-q_2) \cdot r_0 + (1 + q_2 \cdot q_1) \cdot r_1$$

Continuando o processo de divisões sucessivas, obtém-se, na i -ésima primeira divisão, a seguinte disposição:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & q_1 & \dots & & q_i & \\ \hline r_0 & r_1 & \dots & r_{i-1} & r_i & \\ \hline & r_2 & \dots & & r_{i+1} & \end{array}$$

$$\text{onde } \begin{cases} r_i = r_{i-2} - q_{i-1}r_{i-1}, \\ r_{i-1} = r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}, \\ \dots \\ r_3 = r_1 - q_2r_2, \\ r_2 = r_0 - q_1r_1. \end{cases}$$

Substituindo r_{i-1} por $r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}$ na primeira equação, tem-se

$$r_i = r_{i-2} - q_{i-1}(r_{i-3} - q_{i-2}r_{i-2}), \text{ isto é, } r_i = (-q_{i-1})r_{i-3} + (1 + q_{i-2}q_{i-1})r_{i-2}$$

Fazendo $t_1 = -q_{i-1}$ e $\tilde{t}_1 = 1 + q_{i-2}q_{i-1}$, obtém-se $r_i = t_1r_{i-3} + \tilde{t}_1r_{i-2}$. (*)

Agora faça $r_{i-2} = r_{i-4} - q_{i-3}r_{i-3}$ em (*) e encontre $r_i = t_1r_{i-4} + (\tilde{t}_1 - t_1q_{i-3})r_{i-3}$.
Seja $t_1 = t_2$ e $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 - t_1q_{i-3}$. Assim, $r_i = t_2 \cdot r_{i-4} + \tilde{t}_2r_{i-3}$.

Continue o processo e obterá t e \tilde{t} tais que $r_i = t \cdot r_0 + \tilde{t} \cdot r_1$.

Suponha que as substituições possíveis de ser efetuadas no sistema acima forneçam $h_i, h_{i-1}, \tilde{h}_i, \tilde{h}_{i-1}$ de modo que

$$\begin{cases} r_{i-1} = h_{i-1} \cdot r_0 + \tilde{h}_{i-1} \cdot r_1 \\ r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_1 \end{cases}$$

sendo $r_{i+1} = r_{i-1} - q_i r_i$, então $r_{i+1} = (h_{i-1}r_0 + \tilde{h}_{i-1}r_1) + (h_i r_0 + \tilde{h}_i r_1)(-q_i)$ ou seja,

$$r_{i+1} = (h_{i-1} - q_i h_i)r_0 + (\tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i)r_1, \text{ onde } h_{i+1} = h_{i-1} - q_i h_i \text{ e } \tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i.$$

Ainda analisando o esquema do algoritmo estendido em que:

	q_i	
r_{i-1}	r_i	
	r_{i+1}	

Suponha que $r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+1}$, ou seja, $r_{i+2} = 0$. Pelo exposto anteriormente,

$$r_{i+1} = \text{mdc}(r_0, r_1).$$

Pode-se dispor na seguinte formação tabelar, o algoritmo para obter o valor r_i seguindo as seguintes etapas:

1. Deve-ser preencher nas duas primeiras linhas, os valores que permitam obter as combinações r_0 e r_1 ;
2. Coloca-se na primeira coluna, a partir da segunda linha, os inversos aditivos dos polinômios quocientes, ou seja, $-q_1, -q_2, \dots, -q_i$;
3. Para obter h_i , com $i \geq 1$, faz-se $h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$;
4. Para obter \tilde{h}_i , faz-se $\tilde{h}_{i-2} - q_{i-1} \cdot \tilde{h}_{i-1}$;

$-q_i$	h_i	\tilde{h}_i	$r_i = h_i \cdot r_0 + \tilde{h}_i \cdot r_i$
	$h_{-2} = 1$	$\tilde{h}_{-2} = 0$	r_0
$-q_1$	$h_{-1} = 0$	$\tilde{h}_{-1} = 1$	r_1
$-q_2$	$h_2 = h_0 - q_1 \cdot h_1$	$\tilde{h}_1 = \tilde{h}_0 - q_1 \tilde{h}_1$	r_2
$-q_3$	$h_3 = h_1 - q_2 \cdot h_2$	$\tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 - q_2 \tilde{h}_2$	r_3
...
$-q_{i-1}$	$h_{i-1} = h_{i-3} - q_{i-2} \cdot h_{i-2}$	$\tilde{h}_{i-1} = \tilde{h}_{i-3} - q_{i-2} \tilde{h}_{i-2}$	r_{i-1}
$-q_i$	$h_i = h_{i-2} - q_{i-1} \cdot h_{i-1}$	$\tilde{h}_i = \tilde{h}_{i-2} - q_{i-1} \tilde{h}_{i-1}$	r_i
$-q_{i+1}$	$h_{i+1} = h_{i-1} - q_i \cdot h_i$	$\tilde{h}_{i+1} = \tilde{h}_{i-1} - q_i \tilde{h}_i$	$r_{i+1} = d = (r_0, r_1)$

5. Na última coluna e na mesma linha que está localizado h_i e \tilde{h}_i , coloca-se r_i .

Veja o processo acima descrito nos seguintes casos:

(1) Obtenha o *m.d.c.* de 240 e 56. Em seguida, escreva-o como combinação desses números.

Solução:

Buscando o *m.d.c.* de 240 e 56:

	4	3	2
240	56	16	8
	16	8	0

Desta forma, 8 é o *m.d.c.* de 240 e 56.

Obtendo a combinação:

$-q$	h	\tilde{h}	$240 \cdot h + 56 \cdot \tilde{h}$
	1	0	240
-4	0	1	56
-3	1	-4	16
	-3	13	8

Assim, $240 \cdot (-3) + 56 \cdot 13 = 8$

(2) Obtenha o *m.d.c.* de $2x^3 - 8$ e $4x^2 - 16$. Em seguida, escreva-o como combinação desses polinômios.

Buscando o *m.d.c.*:

	$\frac{x}{4}$	$x + 2$	
$x^3 - 8$	$4x^2 - 16$	$4x - 8$	
	$4x - 8$	0	

Assim, tem-se $4x - 8$. Desta maneira $x - 2$ é o polinômio mônico em \mathbb{Q} que representa o m.d.c.

Obtendo a combinação:

$-q$	h	\tilde{h}	$(x^3 - 8) \cdot h + (4x^2 - 16) \cdot \tilde{h}$
	1	0	$x^3 - 8$
$-\frac{x}{4}$	0	1	$4x^2 - 16$
$-x - 2$	1	$-\frac{x}{4}$	$4x - 8$

Logo, $(x^3 - 8) \cdot 1 + (4x^2 - 16) \cdot (-\frac{x}{4}) = 4x - 8$, ou seja,

$$(x^3 - 8) \cdot \frac{1}{4} + (4x^2 - 16) \cdot (-\frac{x}{16}) = x - 2.$$

Definição 2.1.7. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{K}$ é raiz de $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, se $f(\alpha) = 0$. Se $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tiver k raízes iguais a α , diz-se que α é raiz de multiplicidade k .

Observação 2.1.8. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ é raiz do polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ cujo coeficiente líder $a_n \neq 0$, α também é raiz do polinômio mônico $\hat{f}(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\hat{f}(x) = \frac{1}{a_n} \cdot f(x)$.

De fato. Pois se $f(\alpha) = 0$ com $a_n \neq 0$, então $\frac{1}{a_n} \cdot f(\alpha) = 0$. Logo, $\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{a_n} \cdot f(\alpha) = 0$.

Proposição 2.1.9. Seja $f \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então:

(i) α em \mathbb{K} é raiz de $f(x) \Leftrightarrow x - \alpha$ divide $f(x)$ em $\mathbb{K}[x]$;

(ii) Se $\alpha_i \in \mathbb{K}$ com $i = 1, 2, \dots, m$ de modo que $f(\alpha_i) = 0$, então

$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)q(x)$, com $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ quando $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Em particular, se α é raiz de multiplicidade m , então $(x - \alpha)^m$ divide $f(x)$ e que $m \leq \partial f(x)$.

Prova: (i) Através do algoritmo da divisão de $f(x)$ por $x - \alpha$, tem-se

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r(x), \text{ com } q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x] \text{ e } \partial r(x) = 0 \text{ ou } r(x) = 0.$$

Se $r(x) = 0$, não resta o que fazer.

Suponha que $r(x) = c$, $c \in \mathbb{K}$. Assim, $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + c$ e como α é raiz de $f(x)$, então $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) + c = 0$, ou seja, $c = 0$.

O que assegura que $x - \alpha$ divide $f(x)$.

Reciprocamente, se $x - \alpha$ divide $f(x)$, então $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ com $q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Como $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) = 0$, então α é raiz de $f(x)$.

(ii) Aplicando indução em m , temos que se $m = 1$, α_1 é raiz de $f(x)$. Pelo item (i), temos que $x - \alpha_1$ divide $f(x)$, isto é, $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot q_1(x)$, onde $q_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ é o quociente da divisão de $f(x)$ por $x - \alpha_1$.

Suponha que o resultado seja válido para $m - 1$ e que $f(x)$ tenha m raízes distintas.

De acordo com o anterior, $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{m-1}) \cdot q_{m-1}(x)$ onde $q_{m-1}(x) \in \mathbb{K}[x]$ é o quociente da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{m-1})$.

Como α_m é raiz de $f(x)$, tem-se

$$0 = f(\alpha_m) = (\alpha_m - \alpha_1)(\alpha_m - \alpha_2) \dots (\alpha_m - \alpha_{m-1}) \cdot q(\alpha_m), \text{ onde } \alpha_m \neq \alpha_i \text{ e } 1 \leq i \leq m - 1$$

Logo $q_m(\alpha_m) = 0$. Decorre do item anterior que $x - \alpha_m$ divide $q_m(x)$.

Portanto $x - \alpha_m$ divide $f(x)$.

$$\text{Assim, } f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m) \cdot q(x).$$

Ademais, se α é raiz de multiplicidade m , então $\alpha_i = \alpha_j$ para todo i e j , logo

$f(x) = (x - \alpha_i)(x - \alpha_i) \dots (x - \alpha_i)q(x) = (x - \alpha_i)^m \cdot q(x)$, ou seja, $(x - \alpha_i)^m$ divide $f(x)$ e pelo algoritmo da divisão, $m \leq \partial f(x)$.

Definição 2.1.10. Um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ é dito irredutível sobre \mathbb{K} quando não for possível escrevê-lo como um produto de dois polinômios sobre \mathbb{K} , ambos com grau maior ou igual a 1.

Definição 2.1.11. Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é dito algébrico quando existe $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, com $f(x) \neq 0$ de modo que $f(\alpha) = 0$.

Definição 2.1.12. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico e $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$. Se $f(x)$ é o polinômio mônico de menor grau possível tal que $f(\alpha) = 0$, $f(x)$ é dito polinômio mínimo de α .

Observação 2.1.13. Se $\alpha \neq 0$, então o polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de α tem termo independente não nulo. Pois, do contrário,

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = x \cdot (a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}).$$

O que implicaria dizer que $\alpha \neq 0$ é raiz de $a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, contradizendo o fato de $f(x)$ ser mínimo.

Outro aspecto importante é que sendo $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$ então

$$a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = -a_0, \text{ isto é, } \frac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n}{-a_0} = 1.$$

Desta forma,

$$\frac{a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n}{-a_0} = \frac{f(0) - f(\alpha)}{a_0\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ou seja do ponto de vista teórico a problemática da racionalização foi resolvida. Basta que se tenha obtido o polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x] - \{0\}$ de α que se tem α^{-1} .

Veja o que acontece nos casos seguintes:

(1) Achar o inverso de $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ de modo que não haja raiz não exata no denominador de uma fração.

Se $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, então $\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ isto é,

$$\alpha^2 = 10 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}) \text{ logo, } \alpha^2 - 10 = 2(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}).$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última igualdade, tem-se

$$(\alpha^2 - 10)^2 = 4 \cdot (6 + 10 + 15 + 2\sqrt{60} + 2\sqrt{90} + 2\sqrt{150}) \text{ isto é,}$$

$$(\alpha^2 - 10)^2 = 124 + 8\sqrt{30} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}). \text{ Como } \alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \text{ então}$$

$$(\alpha^2 - 10)^2 = 124 + 8\sqrt{30}\alpha, \text{ ou seja, } \alpha^4 - 20\alpha^2 - 8\sqrt{30}\alpha - 24 = 0.$$

$$\text{Dividindo por } 24\alpha, \text{ obtém-se } \frac{\alpha^3 - 20\alpha - 8\sqrt{30}}{24} = \frac{1}{\alpha}.$$

Fazendo $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ em $\frac{\alpha^3 - 20\alpha - 8\sqrt{30}}{24}$ se encontra o número inverso desejado.

Observe que sendo $(\alpha^2 - 10)^2 = 124 + 8\sqrt{30}\alpha$, então $[(\alpha^2 - 10)^2 - 124]^2 = 1920\alpha^2$, ou seja,

$$[\alpha^4 - 20\alpha^2 - 24]^2 = 1920\alpha^2, \text{ isto é, } \alpha^8 + 400\alpha^4 + 576 - 40\alpha^6 - 48\alpha^4 + 960\alpha^2 = 1920\alpha^2.$$

$$\text{Assim, } [\alpha^8 - 40\alpha^6 + 352\alpha^4 - 960\alpha^2 + 576 = 0$$

Em outras palavras, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ tem polinômio mínimo

$$f(x) = x^8 - 40 \cdot x^6 + 352 \cdot x^4 - 960 \cdot x^2 + 576.$$

(2) Seja $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Encontre α^{-1} de modo que não haja raiz não exata no denominador de uma fração.

Sendo $\alpha = 1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, então $(\alpha - 1)^3 = [\sqrt[3]{2} \cdot (3 + \sqrt[3]{2})]^3$.

Desenvolvendo esta última igualdade, tem-se $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 2(29 + 27\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{4})$, ou seja,

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}).$$

Substituindo $\alpha - 1 = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ na última igualdade tem-se

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha = 59 + 18(\alpha - 1), \text{ isto é, } \alpha^3 - 3\alpha^2 - 15\alpha = 41.$$

O que assegura que α é raiz de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15x - 41$.

Assim,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 15}{41}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{(1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^2 - 3(1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - 15}{41} = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}.$$

Nas situações 1 e 2 acima foi possível substituir, numa determinada passagem, certa expressão destacada em parênteses pelo número α permitindo obter uma expressão mais viável. Em geral não se pode garantir efetuar tal substituição ou alguma ferramenta de cálculo que minimize todo o trabalho na obtenção do polinômio mínimo, por exemplo, se $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{4}$. Em geral, dado α um número algébrico é difícil obter o polinômio mínimo.

Proposição 2.1.14. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrico então polinômio mínimo de α é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.*

Prova: Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Suponha, por absurdo, que $f(x)$ seja redutível em $\mathbb{Q}[x]$. Neste caso, existem $q, q_1 \in \mathbb{Q}[x]$ tais que $f(x) = q(x) \cdot q_1(x)$. Como, por hipótese, $f(\alpha) = 0$, então $f(\alpha) = q(\alpha) \cdot q_1(\alpha) = 0$. Desta forma, tem-se $q(\alpha) = 0$ ou $q_1(\alpha) = 0$. Uma contradição à minimalidade de $f(x)$.

Segue que todo polinômio mínimo é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

O teorema a seguir, bem como seus corolários, representa a ideia central da racionalização de denominadores através do uso do m.d.c. de dois polinômios: um $f(x) \in \mathbb{Q}$ que seja mínimo de um dado número algébrico α e outro $g(x) \in \mathbb{Q}$ de modo que $g(\alpha)$ represente o denominador de tipo "algébrico" da fração a ser racionalizada. Este teorema indica que se alcança a racionalização através da combinação obtida para o m.d.c.. A vantagem desta técnica em relação à utilizada nas duas últimas racionalizações apresentadas no qual se buscou o polinômio mínimo de $g(\alpha)$, é que será bem mais simples obter o polinômio mínimo de α .

Teorema 2.1.15. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Seja $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $g(\alpha) \neq 0$, então existem $h, \tilde{h} \in \mathbb{Q}[x]$ tais que*

$$gh + f\tilde{h} = 1.$$

Prova: Inicialmente, tem-se $(f, g) = 1$ uma vez que, pela proposição 2.1.14, f irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, assim, $(f, g) = 1$ ou f .

Agora suponha que $f(x)|g(x)$. Então, existe $d \neq 0$ em $\mathbb{Q}[x]$ tal que $g(x) = f(x) \cdot d(x)$. Como $f(\alpha) = 0$, então $g(\alpha) = f(\alpha) \cdot d(\alpha) = 0$, uma contradição ao fato de que $g(\alpha) \neq 0$. Logo $(f, g) = 1$ e, pelo corolário 2.1.6, existem h e \tilde{h} polinômios em $\mathbb{Q}[x]$ tais que

$$gh + f\tilde{h} = d = 1.$$

Corolário 2.1.16. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico com polinômio mínimo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e seja $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de modo que $g(\alpha) \neq 0$, então existe $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de forma que $g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 1$. Equivalentemente temos $h(\alpha) = \frac{1}{g(\alpha)}$. Pode-se também escolher o polinômio $h(x)$ de modo que $\partial h(x) < \partial f(x)$.*

Prova: Como, pelo o teorema 2.1.15, $gh + f\tilde{h} = 1$, então $g(\alpha)h(\alpha) + f(\alpha)\tilde{h}(\alpha) = 1$.

Porém como $\alpha \in \mathbb{C}$ é tal que $f(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) \neq 0$, tem-se que $g(\alpha)h(\alpha) = 1$, desta forma $h(\alpha) \neq 0$.

Isto é,

$$h(\alpha) = \frac{1}{g(\alpha)}.$$

Pode-se supor que $\partial h < \partial f$, pois do contrário, pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tais que $h = f \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $0 \leq \partial r < \partial f$.

Assim, $gh + f\tilde{h} = g(fq + r) + f\tilde{h} = 1$, ou seja, $g(\alpha)r(\alpha) = 1$ e $r(\alpha) = \frac{1}{g(\alpha)}$.

Corolário 2.1.17. *Sejam $t \in \mathbb{C}$ de modo que $t^n = a$ e $x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_mt^m \neq 0$ onde $a, x_i \in \mathbb{Q}$ e $m \leq n$, então existem $y_i \in \mathbb{Q}$ tais que*

$$(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_mt^m) \cdot (y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_{m_1}t^{m_1}) = 1.$$

Prova: Considere $f(t)$ e $g(t) \in \mathbb{Q}[t]$ em que $f(t) = t^n - a$ é o polinômio mínimo de $\sqrt[n]{a}$ e $g(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_mt^m$ com $g(\sqrt[n]{a}) \neq 0$.

Pelo corolário 2.1.16, existe $h(t) = y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_{m_1}t^{m_1} \neq 0$ tal que $h(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{g(\sqrt[n]{a})} = 1$, ou seja, $h(\sqrt[n]{a}) \cdot g(\sqrt[n]{a}) = 1$.

Como $t^n - a = 0$, então $t = \sqrt[n]{a}$. Segue que $h(t) \cdot g(t) = 1$ e, conseqüentemente,

$$(x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_mt^m) \cdot (y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_{m_1}t^{m_1}) = 1.$$

Veja como se aplica essa técnica de racionalização através do m.d.c. de polinômios no problema 03 da fase 2 do vestibular de 1999 da COVEST (citado anteriormente) no qual se deseja racionalizar a fração $\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$.

Inicialmente, deve-se tomar $f(x)$ e $g(x)$ de modo que sejam, respectivamente, o polinômio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ e o que equivale ao denominador quando calculado seu valor numérico em $\sqrt[3]{2}$.

Assim, $f(x) = x^3 - 2$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

Calculando o mdc de $f(x)$ e $g(x)$:

	$x - 3$	$\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}$	0
$x^3 - 2$	$x^2 + 3x + 1$	$8x + 1$	$\frac{41}{64}$
	$8x + 1$	$\frac{41}{64}$	$\frac{512}{41}x + \frac{64}{41}$

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$f(x)h(x) + g(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	$x^3 - 2$
$-(x - 3)$	0	1	$x^2 + 3x + 1$
$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)$	1	$-(x - 3)$	$8x + 1$
	$-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)$	$\frac{1}{64}(8x^2 - x - 5)$	$\frac{41}{64}$

Ou seja, $-\left(\frac{1}{8}x + \frac{23}{64}\right)(x^3 - 2) + \frac{1}{64}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = \frac{41}{64}$, logo,

$$-\frac{1}{41}(8x + 23)(x^3 - 2) + \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5)(x^2 + 3x + 1) = 1$$

Deste modo, $h(x) = \frac{1}{41}(8x^2 - x - 5) \Rightarrow h(\sqrt[3]{2}) = \frac{8\sqrt[3]{4}}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} - \frac{5}{41}$

Assim, $\frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = -\frac{5}{41} - \frac{\sqrt[3]{2}}{41} + \frac{8\sqrt[3]{4}}{41}$.

Exemplo 2.1.18. Obter a racionalização da fração: $\frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}}$.

Solução: Note que $2\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{4}$, então $\frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}}$.

O polinômio mínimo de $\sqrt[4]{2}$ é $f(x) = x^4 - 2$. Deve-se procurar $g(x)$ de modo que

$$g(\sqrt[4]{2}) = 1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} \neq 0, \text{ ou seja, } g(x) = 1 - x + 2x^2 + x^3.$$

Calculando o *mdc* de $f(x)$ e $g(x)$.

	$x - 2$	$\frac{1}{5}x + \frac{13}{25}$	$\frac{125}{14}x - \frac{4175}{196}$	
$x^4 - 2$	$x^3 + 2x^2 - x + 1$	$5x^2 - 3x$	$\frac{14}{25}x + 1$	$\frac{4175}{196}$
				0

Usando o algoritmo estendido, tem-se:

	$h(x)$	$\tilde{h}(x)$	$f(x)h(x) + g(x)\tilde{h}(x)$
	1	0	$x^4 - 2$
$-(x - 2)$	0	1	$x^3 + 2x^2 - x + 1$
$-\left(\frac{1}{5}x + \frac{13}{25}\right)$	1	$-x + 2$	$5x^2 - 3x$
$-\left(\frac{125}{14}x - \frac{4175}{196}\right)$	$-\frac{1}{5}x - \frac{13}{25}$	$\frac{x^2}{5} + \frac{3x}{25} - \frac{1}{25}$	$\frac{14}{25}x + 1$
		$-\frac{25x^3}{14} + \frac{625x^2}{196} + \frac{375x}{196} + \frac{225}{196}$	$\frac{4175}{196}$

Desta maneira

$$(x^3 + 2x^2 - x + 1) \left(-\frac{25x^3}{14} + \frac{625x^2}{196} + \frac{375x}{196} + \frac{225}{196} \right) = \frac{4175}{196}$$

Isto é,

$$\frac{196}{4175} (x^3 + 2x^2 - x + 1) \left(-\frac{25x^3}{14} + \frac{625x^2}{196} + \frac{375x}{196} + \frac{225}{196} \right) = 1$$

Assim, fazendo $x = \sqrt[4]{2}$ e simplificando,

$$\frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{167} \left(-14\sqrt[4]{8} + 25\sqrt[4]{4} + 15\sqrt[4]{2} + 9 \right)$$

Orientações metodológicas

Este material deve ser visto como auxiliar na busca em dá mais significado no ensino de racionalização de frações, calcado nos estudos e pesquisas em Educação Matemática que estão explícitos nos PCNs de Matemática do ensino fundamental e médio, podendo ser desenvolvido no 9º ano do ensino fundamental enfatizando as noções gerais da parte teórica e problemas de menor complexidade, ou no 3º ano do ensino médio tratando os por menores da teoria e os casos de diversos níveis de dificuldade.

No que compete aos objetivos, busca-se desenvolver habilidades numéricas, atribuindo novos significados aos números irracionais, sobretudo ao inverso de um irracional, obter habilidades algébricas, procurando tratar de formas diferentes de calcular m.d.c. de polinômios e polinômio mínimo.

O uso de recursos didáticos tradicionais como: lousa, lápis para lousa e caderno para registros das informações, aliados a recursos auxiliares como: calculadora para a aferição das operações realizadas, áudio visual para a elaboração de notas de aulas mais atrativas e da internet para a busca de sites, fórum de debates sobre a matemática e vídeos, contribuem significativamente, para o maior interesse, socialização dos alunos e aprendizagem.

Antes de sua aplicação se faz necessário detectar conhecimentos prévios dos alunos através de uma sondagem referente aos números irracionais, enfatizando as raízes não exatas e racionalização de denominadores que utilizam produtos notáveis, e das noções elementares polinômios como: grau de polinômio, valor numérico, raiz, operações e cálculo para obter máximo divisor comum (m.d.c.) principalmente como no processo descrito neste trabalho, de modo que se compreendam os conceitos e procedimentos adotados, atribuindo significado ao que está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização.

O docente que pretende desenvolver esta proposta pedagógica deve estar familiarizado as habilidades cognitivas da turma a ser trabalhada, e após a sondagem descrita acima, realizar as seguintes etapas:

* Para uma turma do 9º ano do ensino fundamental:

Etapas 1: Mostrar, através de certos casos mais complicados, que é difícil racionalizar denominadores quando se utiliza os processos descritos nos livros didáticos destinados a esta série. Buscando convencer os alunos da importância de aprender racionalizar utilizando polinômios.

Duração: 45 minutos (1 aula).

Etapa 2: Mostrar, através de exemplos mais simples, que o m.d.c. de dois números naturais bem como o de dois polinômios, pode ser escrito como uma combinação dos mesmos. Deve-se destinar um tempo, cerca de 30 minutos, para que os alunos possam, preferencialmente em grupos, realizar exercícios similares. Duração: 90 minutos (2 aulas).

Etapa 3: Apresentar o teorema 2.1.15 e o corolário 2.1.16, apenas como processo indutivo, e exemplificar o processo de racionalização que envolve polinômios. Destinando 30 minutos para a prática dos alunos (aconselha-se formar grupos). Duração: 90 minutos (2 aulas).

Etapa 4: Esta etapa destina-se a verificação de aprendizagem. Duração: 45 minutos (1 aula).

* Para uma turma do 3º ano do ensino médio:

Para turma que já vivenciaram este trabalho no 9º ano, basta reviver a etapa 3 acima, destinando 3 aulas para que se possa enfatizar problemas mais avançados.

Caso esta turma não tenha vivenciado este trabalho no 9º ano, deve-se seguir as etapas 1, 2, 3 e 4 porém, deve-se acrescentar mais uma aula na etapa 3 para que se possa trabalhar casos mais complicados.

CAPÍTULO 4

Problemas Propostos

Problema 4.1. *Obtenha a fração racionalizada em cada caso:*

$$a) \frac{1}{1 - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}$$

$$b) \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}$$

Problema 4.2. *(Olimpíadas Matemáticas de Moscou - 1982) Simplifique a expressão:*

$$L = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$$

Problema 4.3. *Determine $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$ tais que*

$$\frac{1}{1 + 2\sqrt[5]{2} + 3\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{16}} = a + b\sqrt[5]{2} + c\sqrt[5]{4} + d\sqrt[5]{8} + e\sqrt[5]{16}$$

Problema 4.4. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número algébrico, isto é, existe um polinômio não nulo com coeficientes inteiros que anula α . Seja $\mathbb{Q}[\alpha] = \{(a_1 + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n) \mid a_i \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$. Mostre que $\mathbb{Q}[\alpha]$ é um corpo, isto é, $\beta \in \mathbb{Q}[\alpha]$ e $\beta \neq 0$, então $\beta^{-1} \in \mathbb{Q}[\alpha]$.*

Referências

- [1] Dante, Luiz Roberto. Projeto Teláris: Matemática, vol 8 e 9 1ª edição, Ática, 2012.
- [2] Engel, Arthur. Problem-solving strategies. Springer, 1998.
- [3] Hefez, Abramo. Elementos de Aritmética. Coleção: Textos universitários. SBM, 2011.
- [4] Larson, Loren C. Problem-solving through problems. New York: Springer, 1983.
- [5] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. A matemática do ensino médio. Vol. 1, SBM, 2006.
- [6] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. Temas e Problemas Elementares, SBM, 2006.
- [7] MEC, Secretária de Educação Fundamental. - Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2010
- [8] Miranda, Marcílio. Problemas selecionados de matemática. Vol. 1, VestSeller, 2010.
- [9] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios. Vol. 6, SBM, 2012.
- [10] Muniz Neto, Antonio C. Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números. Vol. 5, SBM, 2012.
- [11] Paiva, Manoel. Matemática Paiva. Vol. 3, Moderna, 2009.
- [12] Wagner, Eduardo; Moreira, Carlos Gustavo Tamm de Araujo. 10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática. FOTOJAE, 1996.

