UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Relacionando as funções trigonométricas com música

Michelangelo dos Santos Rodrigues

Recife, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Relacionando as funções trigonométricas com música

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, polo UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática, Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos

Recife, 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

R696r Rodrigues, Michelangelo dos Santos
Relacionando as funções trigonométricas com música / Michelangelo dos Santos Rodrigues. – 2017.
88 f.: il.

Orientador: Marcelo Pedro dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Educação Matemática 2. Música 3. Série de Fourier 4. Octave I. Santos, Marcelo Pedro dos, orient. II. Título

CDD 510

Michelangelo dos Santos Rodrigues

Relacionando as funções trigonométricas com música

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática -PROFMAT do Departamento de Matemática de UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 24/08/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Orientador(a)) - UFRPE

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão - DMAT-UFPE

Prof. Dra. Yane Lísley Ramos Araújo - DM-UFRPE

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente - PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho a minha irmã Sintya Rafaela dos Santos Rodrigues (in Memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois foi o meu refúgio e a luz do meu caminho, em mais uma etapa alcançada, estendo os agradecimentos a todos que colaboraram com a execução deste trabalho, especialmente:

- à minha esposa, Maria Valquira, pelo apoio, companheirismo, paciência em todos os momentos;
- à minha família, por me incentivar e acreditar nos meus sonhos;
- ao professor Dr. Marcelo Pedro dos Santos, meu orientador. Agradeço pelo apoio, estímulo e orientação;
- aos meus colegas de turma, em especial a Bruno Lopes, pela partilha do conhecimento, e apoio no decorrer do curso;
- aos amigos Sostenes Júnior e Antônio França, por inúmeras vezes terem ajudado com o transporte na volta para casa;
- aos professores do PROFMAT – UFRPE, por dividir conhecimento através das disciplinas oferecidas no decorrer do curso.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.
ALBERT EINSTEIN

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de investigação acerca de um aspecto – dentre vários possíveis – envolvendo a intrínseca relação dos estudos matemáticos com a música, tendo como ponto de apoio o seguinte tripé analítico: ondas sonoras, escalas musicais e funções trigonométricas. A pesquisa objetiva averiguar, por meio da utilização de um conjunto de atividades sequenciais, a relevância da aplicação e do uso de ferramentas de construção de sentido no âmbito do ensino-aprendizagem da matemática nas aulas da referenciada disciplina. Tal estudo envereda-se nos moldes de uma pesquisa-ação, desenvolvida tendo como base a confecção de oficinas de matemática realizadas numa turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual, no município de Panelas-PE. Como referenciais teóricos da pesquisa, utilizamos, entre outros, principalmente os postulados de Benson (2006), Kammeler (2000), Wright (2009) e Rousseau e Saint (2015), no intuito de promover e, também, de reavivar uma discussão sobre a relação envolvendo os processos e/ou mecanismos temáticos de interação supracitados. Assim sendo, os resultados da pesquisa serviram para demonstrar que, por meio da aplicação das oficinas de matemática focadas na conjunção dos procedimentos matemáticos aqui verificados, faz-se possível aproximar o aluno dos ensinamentos da matemática. Ficou constatado, portanto, que, com o contato mediado pelo professor tendo em vista a congruência matemático-musical em sala de aula, o aluno pode ser estimulado a ter uma melhor compreensão acerca das interações existentes entre funções trigonométricas, ondas sonoras, escalas musicais e, mais especificamente, a Série de Fourier, vivenciando, assim, e com satisfatórias percepções de usufruto prático, o desenvolvimento de uma melhor consciência matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Música, Série de Fourier, Octave.

Abstract

This paper presents a research proposal about one aspect – among several possible – involving the intrinsic relation of mathematical studies with music, having as support point the following analytical tripod: sound waves, musical scales and trigonometric functions. The objective of this research is to investigate the relevance of the application and the use of tools for the construction of meaning in the teaching-learning of mathematics in the classes of the referred discipline. This study is modeled after an action research, developed based on the making of mathematical workshops held in a 3rd year high school class of a school of the state public network, in the municipality of Panelas-PE. As theoretical references of the research, we use, among others, mainly the postulates of Benson (2006), Kammeler (2000), Wright (2009) and Rousseau and Saint (2015), in order to promote and also revive a discussion about The relation involving the processes and / or thematic mechanisms of interaction mentioned above. Thus, the results of the research served to demonstrate that, through the application of mathematical workshops focused on the conjunction of mathematical procedures verified here, it is possible to bring the student closer to the teachings of mathematics. It was verified, therefore, that with the teacher-mediated contact for mathematical-musical congruence in the classroom, the student can be stimulated to have a better understanding of the interactions between trigonometric functions, sound waves, musical scales and, more specifically, the Fourier Series, thus experiencing and with satisfactory perceptions of practical usufruct, the development of a better mathematical awareness.

Key-word: Education Mathematics, Music, Fourier Series, Octave.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Matemática e Música, apesar de serem duas áreas díspares do conhecimento humano, na realidade possuem uma relação muito íntima. A aproximação que existe entre essas duas maneiras de se pensar o mundo são antiquíssimas, remetendo-nos aos gregos, ali ainda nos idos do século VI antes do nascimento de Cristo. Eles, os gregos, e depois outros povos também, consideravam que por dentro da engrenagem musical havia sempre uma espécie de engrenagem matemática a ser desvendada, mesmo que ainda muito enigmática e de difícil esclarecimento.

Os anos se passaram e tanto a música quanto a matemática chegaram ao ambiente escolar enquanto disciplinas e/ou complementos de formação estudantil. A partir de um olhar sobre a realidade dessa constatação, percebe-se facilmente que hoje se tem uma enorme carência em termos de estrutura e de material humano nesse aspecto, bem como de diversos suportes e de práticas voltadas diretamente para a aplicação e para o estudo de elementos disciplinares que unem matemática e música na rede estadual de educação da cidade de Panelas-PE – que, sabemos, não é um problema somente desta localidade, mas de grande parte do território nacional. E tal constatação, por mais infeliz que seja, serviu de ponto de partida para o início da produção desta pesquisa.

A proposta deste trabalho é, justamente, a de demonstrar uma proposta de investigação e, também, de intervenção no processo de ensino-aprendizagem da matemática na Educação Básica e que, por prioridade, também esteja atrelada a uma espécie de confluência de saberes para com a teoria musical e seu posterior campo de aplicabilidade prática. Para isso, buscamos nos apoiar na análise interconjugal temática que termina por envolver os princípios das ondas sonoras, das escalas musicais e das funções trigonométricas numa abrangência que desemboca na Série de Fourier.

A presente pesquisa é assim germinada, então, e já como explicitado nos parágrafos acima, é oriunda de inquietações de uma conduta prática pedagógica baseada na educação básica já adentrada em bons anos e, talvez, o que nela parece ser mais inovador seja mesmo a iniciativa de se usar e de se perceber a nada distinta relação entre os conceitos matemáticos e alguma das inúmeras nuances da música.

Por meio da utilização de um conjunto de atividades sequenciadas e aos moldes de oficinas, tal estratégia de estudo conseguiu se enveredar nos âmbitos de uma pesquisa-ação e, concomitantemente, apresentou-se inteiramente capaz de desenvolver uma nova perspectiva de promoção do debate e, também, de um reavivamento acerca de discussões mais amplas sobre a relação de proximidade que existe entre os processos matemáticos e musicais dentro do ambiente da escola.

Para a facilitação das práticas matemáticas, tendo como ponto de perspectiva a participação do professor da área, espera-se que esta pesquisa, estando ela na busca incessante por um formato possível de realização de procedimentos escolares com base no engendramento dessas duas formas de conhecimento e, principalmente, ao que se refere à atividade de ensino de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio, objetivo maior deste programa de mestrado, possa se confirmar não como mais um objeto que visa tratar apenas e somente de um recorte estratégico nesta problemática, pois não tem esta proposta e para tal não foi conduzida, mas que de uma ou outra maneira seja capaz o bastante para simbolizar uma renovada possibilidade de intervenção diante de contextos escolares diversificados, e hoje repleto de “impossibilidades” as mais diversas, possibilitando ao aluno um contato mais significativo com a matemática e, por conseguinte, com a música também, num movimento pleno de descobertas perante os desafios do mundo.

Dessa forma, os resultados da pesquisa possibilitaram demonstrar que, por meio da aplicação das oficinas de matemática focadas na junção dos procedimentos matemáticos aqui postulados, torna-se possível aproximar o estudante dos ensinamentos da matemática. Como consequência, ficou claro que, com todo esse aprimoramento técnico-científico de ordem matemático-musical em sala de aula, o aluno e também o professor tenderão, sempre, a atingir um progresso mais eficaz dentro do panorama geral dos ensinamentos e das aprendizagens básicas do e no universo da matemática; o que é, sem dúvida, um real sinal de avanço.

1 Som e Escalas Musicais

Neste capítulo, apresentaremos as qualidades do som, as relações entre matemática e música, as características das ondas sonoras e a translação de gráficos. O mesmo é dedicado aos estudantes e professores que desejem ter uma noção das relações presentes entre a matemática e a música.

1.1 O som

O som consiste em vibrações das moléculas de ar, essas vibrações resultam na criação de regiões de alta pressão intercaladas com regiões de baixa pressão, formando assim as ondas mecânicas denominadas ondas sonoras.

Uma onda apresenta as seguintes características: Amplitude, Comprimento de onda, Período e Frequência.

- Amplitude é a distância entre o eixo de propagação da onda e a crista, ou entre o eixo de propagação e o vale.
- O Comprimento da onda é a distância entre duas cristas ou entre dois vales consecutivos. A Figura 1 ilustra tais conceitos:

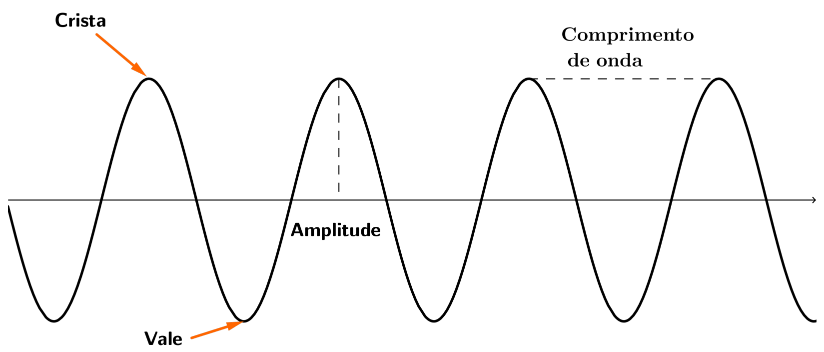


Figura 1 – Amplitude e Comprimento de onda

- O Período é o tempo que a onda leva para executar uma oscilação completa. Sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades é o Segundo (veja a Figura 2).
- A Frequência é o número de oscilações completas que ocorre em uma unidade de tempo. Sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades é chamada Hertz(Hz), que significa ciclos por segundo. Essa unidade foi criada em homenagem ao físico alemão

Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894). Observe que na Figura 2 a onda apresenta três oscilações completas em um segundo, logo a frequência é 3 Hz.

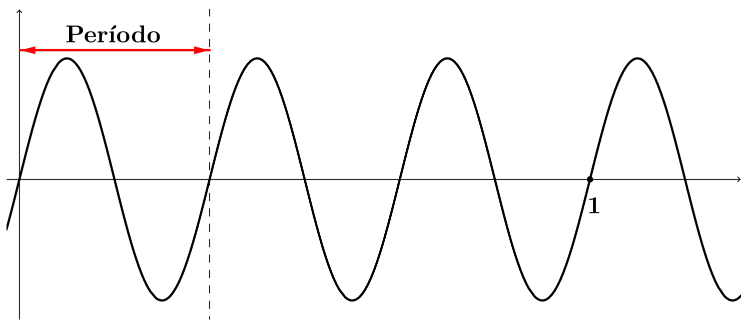


Figura 2 – Período de uma onda

Quando uma orquestra toca, o ouvido humano distingue as seguintes qualidades do som: Altura, Timbre e Intensidade.

- Altura

Para analisar essa qualidade do som, comparemos, por exemplo, a voz do ser humano, em geral, a voz do homem é “grossa”, istó é, grave, e a de uma mulher é “fina”, ou melhor, aguda. Portanto, a altura de um som é a qualidade que permite diferenciar um som agudo de um som grave.

Nos termos musicais, o som grave é baixo e o som agudo é alto. A altura do som depende apenas da sua frequência. Quanto maior a frequência sonora, mais agudo é o som e, portanto, mais alto. Quanto menor a frequência, mais grave é o som. Essas frequências sonoras perceptíveis pelo ser humano variam de 20 Hz a 20000 Hz.

A altura do som caracteriza as notas musicais. As diferentes notas musicais diferem entre si apenas nas suas frequências. A escala igualmente temperada consiste em 12 notas: *dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#* e *si*. O símbolo *“#”* significa sustenido. A Tabela 1 apresenta as notas musicais e suas respectivas frequências:

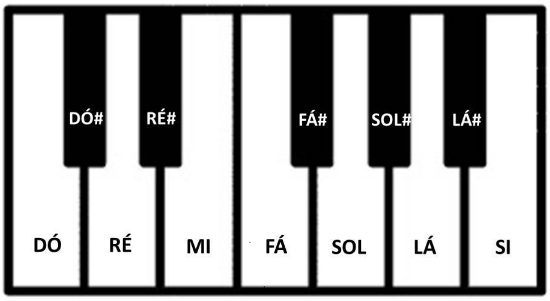
Tabela 1 – Frequência das notas musicais na escala igualmente temperada (Hz)

Nota	Frequência
dó	$261,6$
dó #	$277,2$
ré	$293,7$
ré #	$311,1$
mi	$329,6$
fá	$349,2$
fá #	370
sol	392
sol #	$415,3$
lá	440
lá #	$466,2$
si	$493,9$

Fonte: Adaptado de http://www.amattos.eng.br/Public/INSTRUMENTOS_MUSICAIS/Textos/Div/notas.htm

No teclado de um piano moderno, encontramos as notas *dó, ré, mi, fá, sol, lá* e *si*, nas teclas brancas, e as notas *dó #, ré #, fá #, sol #* e *lá #*, nas teclas pretas, caindo entre aquelas (veja a Figura 3).

Figura 3 – Parte do teclado de um piano moderno



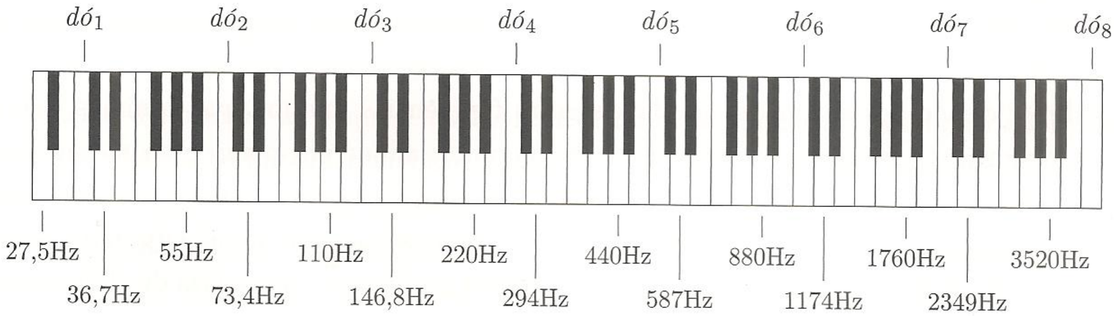
Fonte: Disponível em http://diaryofmonny.blogspot.com.br/2013/08/teoria-musical-basica-aula-de-teclado.html

Se a música tiver uma variedade maior de sons de diferentes frequências e, portanto, mais do que doze notas musicais, o que fazer? Como a escala igualmente temperada é composta apenas por doze notas musicais, a partir da décima terceira nota a escala se repete. Assim, dizemos que a mesma nota se repete “uma oitava acima” ou “uma oitava abaixo”. Por exemplo, quando tocamos uma nota *lá* com uma frequência de $440,0$ Hz, a próxima nota *lá* terá $880,0$ Hz. Dizemos que a nota *lá* de $880,0$ Hz está uma oitava acima da primeira nota. Por outro lado, a nota com $220,0$ Hz também é uma nota *lá*, só que uma oitava abaixo.

Um teclado moderno tem sete conjuntos dessas 12 notas. Um último dó é adicionado no extremo direito, e algumas notas são adicionadas ao extremo esquerdo. Ao todo, são 88 teclas[1] (veja a Figura 4).

[1] Retirado do livro Matemática e Atualidade Volume 2, p. 30

Figura 4 – Um teclado de um piano moderno. As oito teclas de *dó* estão indicadas, assim como as frequências para cada uma das notas *ré* e *lá*.



Fonte: Retirado do livro Matemática e Atualidade Volume 2, p. 31

- Timbre

O timbre é a qualidade que nos permite distinguir dois sons de mesma altura e mesma intensidade, emitidos por fontes diferentes. Por exemplo, a nota *dó* produzida por um violino soa diferente da nota *dó* produzida por um piano devido a diferença em seu timbre. Isso acontece devido ao fato de todas as outras partes do instrumento vibrarem. Por exemplo, ao tocar as cordas do violão, todas as outras partes vibram (o ar dentro do violão, a madeira, as outras cordas).

- Intensidade do som

A intensidade do som é a taxa média com que a energia é transportada em uma onda sonora. É através dessa qualidade do som que podemos caracterizar se um som é forte ou fraco. Ela depende da amplitude de vibração. Quanto maior é a amplitude, maior é a quantidade de energia transportada. O ser humano é capaz de perceber uma ampla escala de intensidade sonora; por isso, é mais conveniente o uso de uma grandeza. A unidade de medida de intensidade sonora é o decibel (dB), em homenagem ao cientista Alexander Graham Bell (1847-1922).

A Tabela 2 apresenta uma lista de sons comuns e ruídos com suas intensidades típicas na escala decibel.

Tabela 2 – Várias fontes de som e suas intensidades

Som	Intensidade em W/m^2	Intensidade em dB
limite audível	10^{-12}	0dB
agitar das folhas de uma árvore	10^{-11}	10dB
cochicho	10^{-10}	20dB
conversação normal	10^{-6}	60dB
rua movimentada	10^{-5}	70dB
aspirador de pó	10^{-4}	80dB
grande orquestra	$6,3 \cdot 10^{-3}$	98dB
fone de ouvido no volume máximo	10^{-2}	100dB
concerto de rock (perto do palco)	10^{-1}	110dB
limite de dor	10^{+1}	130dB
jato militar decolando	10^{+2}	140dB
perduração do tímpano	10^{+3}	160dB

Fonte: Retirado do livro Matemática e Atualidade Volume 2, p. 45

1.2 Matemática e Música

O meio para transmissão da música é o som. Ouvimos os sons porque as ondas no ar, causadas por uma variação da pressão, chegam aos nossos ouvidos e fazem os tímpanos vibrarem. As vibrações são transformadas em impulsos nervosos, levadas até o cérebro e decodificadas.

Uma nota musical é um som cuja vibração encontra-se dentro de um intervalo perceptível pelo ouvido humano e a música é a combinação, sob as mais diversas formas, de uma sequência de notas em diferentes intervalos. Diversos povos organizaram as escalas musicais de maneira diferente.

A civilização grega foi bem sucedida nesse processo. Através dos Pitagóricos e um instrumento chamado monocórdio, também desenvolvido por eles, os gregos conseguiram uma relação íntima entre sons e aritmética. O intervalo entre duas notas consecutivas com o mesmo nome é chamado de oitava, Pitágoras descobriu isso "brincando" com uma corda esticada (Figura 5).

Figura 5 – Corda esticada

Fonte: Disponivel em http://www.descomplicandoamusica.com/matematica-na-musica/

Pitágoras esticou uma corda e analisou o som produzido através de sua vibração. Ele decidiu dividir essa corda em duas partes, como ilustrado na Figura 6 e tocou cada extremidade novamente, a tonalidade do som era a mesma da produzida com a corda solta, mas uma oitava acima, ou seja com o som mais agudo.

Figura 6 – Corda dividida em duas partes

Fonte: Disponivel em http://www.descomplicandoamusica.com/matematica-na-musica/

O filósofo decidiu experimentar como ficaria o som se a corda fosse dividida em três partes (Figura 7):

Figura 7 – Corda dividida em três partes

Fonte: Disponivel em http://www.descomplicandoamusica.com/matematica-na-musica/

Ele reparou que um novo som surgiu, diferente do anterior. Dessa vez, não era a mesma nota uma oitava acima, mas uma nota diferente, que precisava receber outro nome. A partir desta experiência, a relação entre música e matemática ficou muito mais próxima e passou a ser uma forma de descrever a natureza e de desenvolvimento da ciência.

O intervalo musical[2] de uma quinta corresponde a uma taxa de frequência de $\frac{3}{2}$, já o intervalo musical de uma quarta corresponde a uma taxa de frequência de $\frac{4}{3}$, enquanto o intervalo musical de uma oitava corresponde a uma taxa de frequência de $\frac{2}{1}$. Pitágoras concluiu que uma escala convincente poderia ser construída usando apenas essas razões. Escalas de música grega da escola pitagórica são construídas usando apenas estes intervalos, embora outras proporções de pequenos inteiros desempenharam um papel nas escalas do grego clássico.

Assim, por exemplo, se, por simplicidade de notação, definirmos a frequência da nota *dó* como 1, sua oitava é dada pela frequências 2. Pode-se formar a escala pitagórica da seguinte forma:

- Quinta acima de *dó* é um *sol*: $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$;
- Subindo uma quarta a partir de *dó* temos um *fá*: $1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$;
- Baixando uma quarta a partir de *sol* chega-se a *ré*: $\frac{3}{2}/\frac{4}{3} = \frac{9}{8}$;
- Quinta acima de *ré* nos dá *lá*: $\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$;
- Quarta abaixo de *lá* temos um *mi*: $\frac{27}{16}/\frac{4}{3} = \frac{81}{64}$;

2 Intervalo Musical é a razão entre dois sons, ou duas notas musicais.

- Quinta acima de *mi* chega-se a *si*: $\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$;

O que agora chamamos de escala Pitagórica é o obtido por afinação de uma sequência de quartas e quintas.

dó, ré, mi, fá, sol, lá, si

Isto nos dá a Tabela 3 de relações de frequência para uma escala maior:

Tabela 3 – Escala Pitagórica

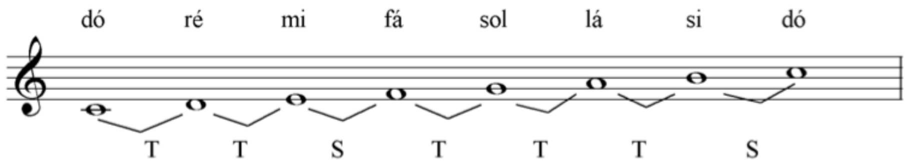
nota	*dó*	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*dó*
razão	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Fonte: Retirado do livro Music: A Mathematical Offering, p. 154

Um problema na escala pitagórica é o intervalo musical, que nem sempre é igual. Duas notas musicais consecutivas não possuem sempre a mesma relação de altura entre si. A razão de altura de algumas notas em relação às suas notas vizinhas é menor do que a de outras. Por exemplo, o intervalo musical entre as notas *dó* e *ré* é $\frac{9}{8}$, já o intervalo entre as notas *mi* e *fá* é de $\frac{256}{243}$ ou $\frac{2^8}{3^5}$.

O intervalo musical de $\frac{9}{8}$ é chamado de tom, enquanto o intervalo de $\frac{2^8}{3^5}$ é chamado de semitom. Se calcularmos os intervalos entre todas as notas musicais da escala pitagórica, teremos apenas esses dois valores. Veja na Figura 8 a sequência de tons e semitons da escala pitagórica.

Figura 8 – Intervalo musical entre as notas sucessivas (T = tom e S = semitom)



Fonte: Disponível em <http://igortrombone.blogspot.com.br/2015/12/teoria-musical-3-tom-e-semitom-acidentes.html>

Nesse sistema, o semitom não é metade de um tom, pois dois semitons dão uma frequência de $\frac{2^{16}}{3^{10}}$ em vez de $\frac{9}{8}$. Observe que esses valores são quase iguais:

$$\begin{aligned} 2^{16}/3^{10} &= 1,1098579146... \\ 9/8 &= 1,125 \end{aligned}$$

Essa pequena diferença entre alguns intervalos foi objeto de estudo por parte de músicos por séculos, até que no final do século XVII, o Ocidente criou um tipo de escala que se tornou padrão por séculos, a chamada escala igualmente temperada ou, simplesmente, escala temperada.

Nessa escala, todas as notas deveriam ter a mesma distância umas das outras. E essa distância deveria ser o intervalo que havia entre *dó* e *si* (um semitom). Por isso, era interessante colocar algumas notas a mais na escala para dar conta desses espaços desiguais. Foi o que ocorreu: entre o *dó* e o *ré* foi inserida uma nota chamada *dó #*, entre o *ré* e o *mi* foi inserida uma nota chamada *ré #*, entre o *fá* e o *sol* foi inserida uma nota chamada *fá #*, entre o *sol* e o *lá* foi inserida uma nota chamada *sol #* e, finalmente, entre o *lá* e o *si* foi inserida uma nota chamada *lá #*.

As sete notas da escala agora se tornariam doze, com a inclusão de cinco notas colocadas entre algumas das sete. Assim, a oitava se divide em doze intervalos iguais, ou seja, o intervalo entre duas notas consecutivas quaisquer tem sempre a mesma relação matemática, que é igual a raiz duodécima de 2 (ou seja $\sqrt[12]{2}$).

Esse é o fator de proporção entre as notas consecutivas na escala temperada. Portanto, para encontrar a frequência da nota um semitom acima (resp. um semitom abaixo) basta multiplicar a frequência da nota atual por $\sqrt[12]{2}$ (resp. dividir a frequência da nota atual por $\sqrt[12]{2}$). Assim, podemos deduzir qualquer frequência a partir de uma frequência inicial. Por exemplo, a frequência da nota $lá_4$ é 440 Hz, para se obter da nota mi_5, que está sete semitons acima, basta multiplicar o valor de $lá_4$ por $(\sqrt[12]{2})^7$. Obtendo-se: $(\sqrt[12]{2})^7 \cdot 440\text{Hz} \approx 659,26\text{Hz}$.

A partir dessa relação, os compositores estavam livres para passar de uma escala para outra sem perder afinação.

Num teclado de piano moderno (veja a Figura 4), um semitom é a menor distância entre duas teclas. Se existe uma tecla entre duas teclas quaisquer, então a distância entre estas duas notas é chamada de tom, donde se conclui que um tom equivale a dois semitons. Uma quinta é um intervalo de sete notas consecutivas no teclado, contando a última, mas não a primeira, enquanto a oitava é o intervalo separado por doze teclas, não contando a nota inicial.

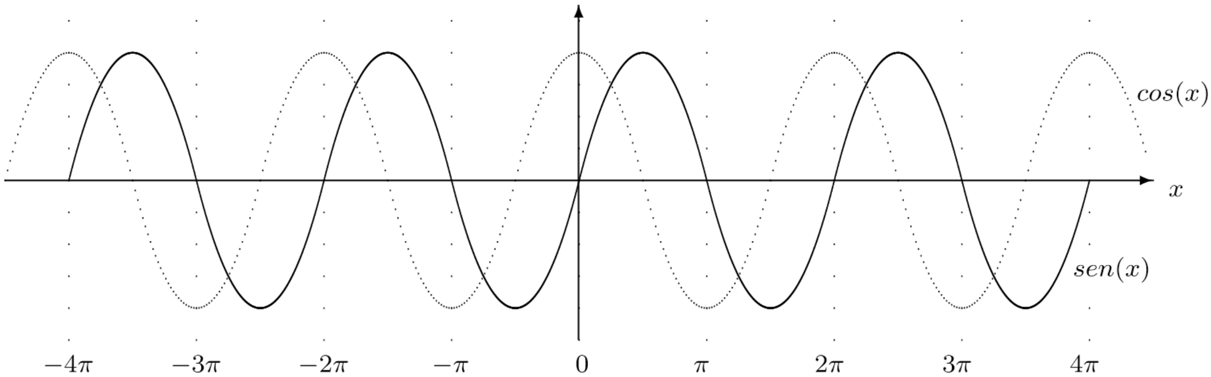
1.3 Ondas Sonoras

Uma onda sonora pura de certa nota musical é uma onda senoidal perfeita, com a frequência exata da nota. Por exemplo, se uma nota tem uma frequência de 30Hz, isso quer dizer que ela é uma senoide que varia 30 vezes por segundo.

A função cosseno também é considerada uma senoide, visto que seu gráfico possui o mesmo formato da onda seno, porém está defasada em relação ao eixo horizontal (veja a Figura 9). Isso ocorre porque o seno e cosseno têm a relação:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x).$$

Figura 9 – Gráfico das funções seno e cosseno



Fonte: Retirado da referência [9], p.3

A onda senoidal pode ser entendida como um movimento circular que se propaga ao longo de um eixo. Observe a Figura 10.

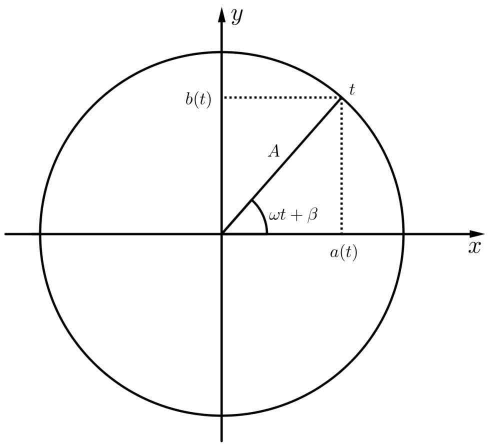


Figura 10 – Senoide

Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\cos(\omega \mathrm{t} + \beta) = \frac{\mathrm{a(t)}}{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{a(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t} + \beta)$$
$$\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \beta) = \frac{\mathrm{b(t)}}{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{b(t)} = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\omega \mathrm{t} + \beta)$$

Onde:

- O raio A do círculo é a amplitude;
- O parâmetro ω é a frequência;
- O ângulo β é chamado de fase.

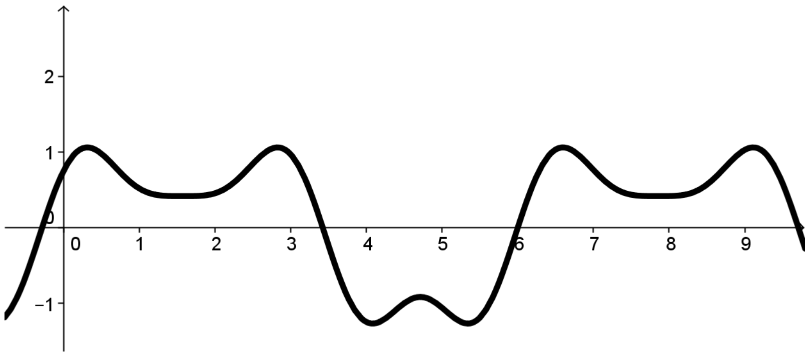


Figura 11 – Gráfico de f(x)

O gráfico de uma onda pode ser bem mais complicado que uma senoide. Veja o gráfico de uma função mostrada na Figura 11. Como achar a função matemática que descreva uma curva como essa?

O matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) demonstrou, no século XIX, que qualquer forma de onda pode ser representada por uma soma de senoides de diferentes frequências, amplitudes e fases.

No livro "Théorie Analytique de la Chaleur", que significa Teoria Analítica do Calor, escrito em 1822, ele introduziu o conceito conhecido atualmente como Série de Fourier, que é muito utilizado nas ciências em geral, principalmente nas áreas envolvidas com: Matemática, Engenharia, Computação, Música, Ondulatória, Sinais Digitais, Processamento de Imagens, etc.

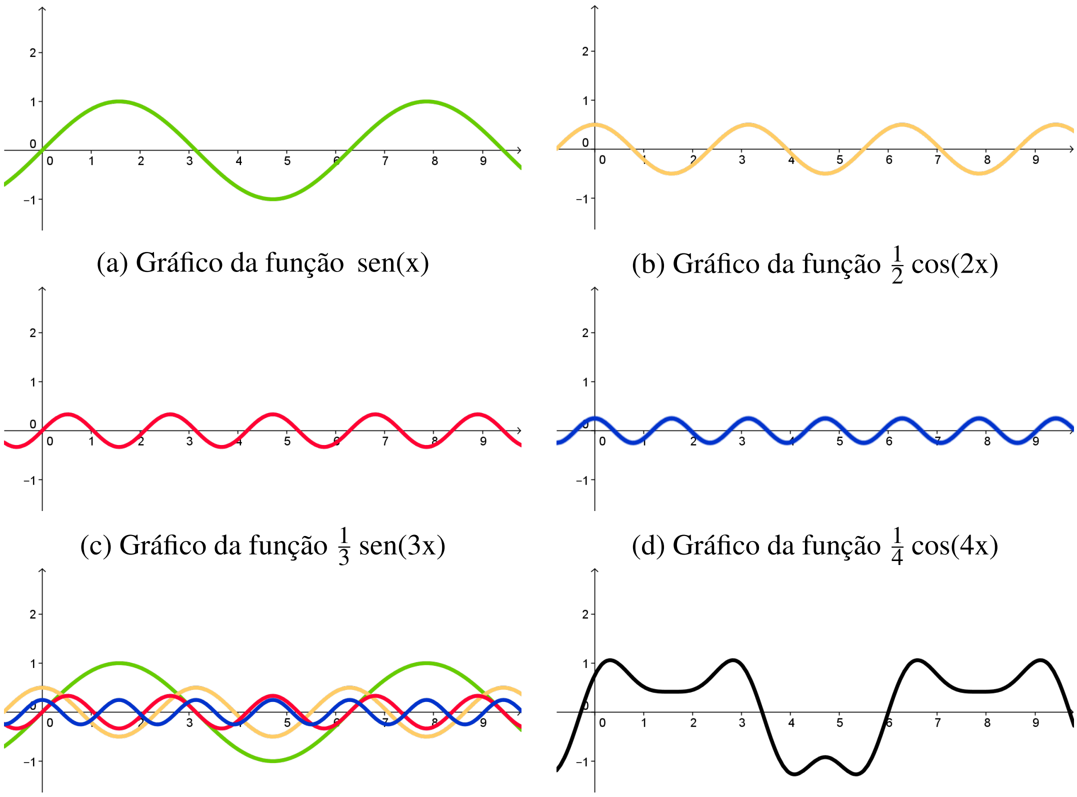
As ondas sonoras geradas por um instrumento musical, por mais complexas que elas sejam, sempre poderão ser representadas por uma Série de Fourier, composta das notas fundamentais e da série de harmônicos ou sobretons, cada um com a sua amplitude e fase escolhidos convenientemente.

A Figura 12 mostra a construção da Figura 11 somando duas funções seno e duas funções cosseno. A onda original é a soma dessas quatro funções.

Matematicamente, a decomposição da função f(x) da onda mostrada na Figura 11 é a seguinte:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{4}\cos(4x)$$

O gráfico das amplitudes das ondas senoidais que formam uma onda complexa é chamado de espectro de Fourier, e cada onda senoidal recebe o nome de componente de Fourier.



(a) Gráfico da função sen(x)

(b) Gráfico da função $\frac{1}{2}$ cos(2x)

(c) Gráfico da função $\frac{1}{3}$ sen(3x)

(d) Gráfico da função $\frac{1}{4}$ cos(4x)

(e) Gráfico das quatro funções individuais

(f) Soma das quatro funções

Figura 12 – Construção do gráfico de f(x)

1.4 Translação de gráficos

Podemos estudar os fenômenos ondulatórios em sua forma mais simples, para se ganhar um entendimento dos seus constituintes mais básicos. A forma mais simples de onda sonora tem um modelo matemático muito simples, funções que possuem uma característica periódica, isto é, repetem-se em um certo intervalo de tempo.

Tomemos uma função T que a cada ponto (x, y) do plano cartesiano associa o ponto $(x + 8, y)$.

Representando por A', B', C', D' E' e F' os pontos imagens correspondentes aos vértices do Hexágono ABCDEF.

$$
\begin{aligned}
T(A) &= T(3,0) = (11,0) = A' \\
T(B) &= T(5,1) = (13,1) = B' \\
T(C) &= T(5,4) = (13,4) = C' \\
T(D) &= T(2,6) = (10,6) = D' \\
T(E) &= T(1,4) = (9,4) = E' \\
T(F) &= T(1,1) = (9,1) = F'
\end{aligned}
$$

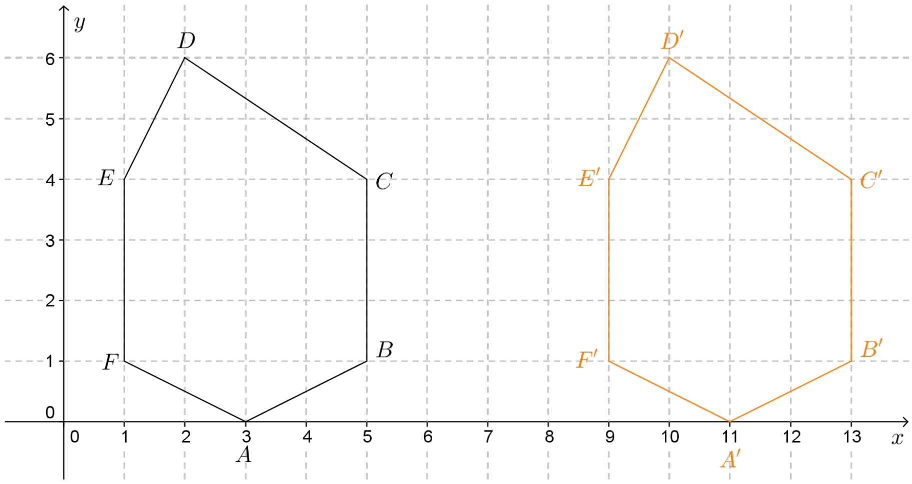


Figura 13 – Translação do polígono ABCDEF no sentido positivo do eixo Ox

Como podemos ver na figura 13, a função T transforma o polígono ABCDEF no polígono A′B′C′D′E′F′, congruente ao anterior, mas que se encontra deslocado 8 unidades no sentido positivo do eixo Ox. A abscissa de cada ponto do hexágono A′B′C′D′E′F′ é a abscissa do respectivo ponto do hexágono ABCDEF acrecida em 8 unidades já as ordenadas, são mantidas.

Quais modificações ocorreriam com o polígono ABCDEF se a ele aplicássemos a transformação R(x, y) = (x, y – 4)?

O polígono ficaria deslocado em 4 unidades para baixo, no sentido negativo do eixo Oy. (Figura 14).

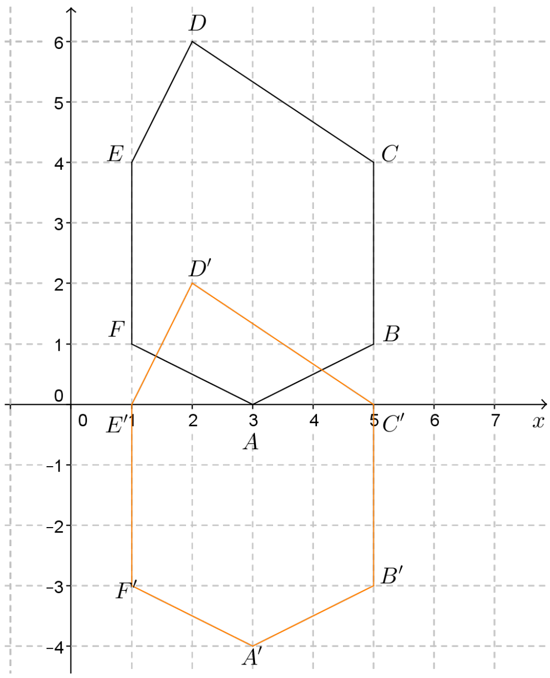


Figura 14 – Translação do polígono ABCDEF no sentido negativo do eixo Oy

As funções T e R são exemplos de **translações**. No primeiro caso, a função foi transladada no sentido positivo do eixo Ox e, no segundo, no sentido negativo do eixo Oy.

As translações podem ser usadas para construir gráficos de funções a partir dos gráficos já obtidos de outras funções mais elementares. Vamos entender o que isso significa construindo o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$ com base no de $g(x) = x^2$.

Sendo $(x, g(x))$ um ponto do gráfico de $g(x) = x^2$, então $(x, g(x) + 3)$ é ponto do gráfico de $f(x)$.

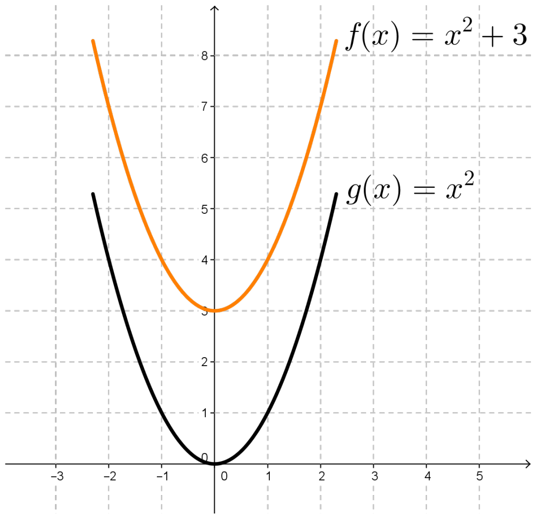


Figura 15 – Construção do gráfico da função f(x) a partir do gráfico de g(x)

Portanto, o gráfico de f(x) é obtido transladando o gráfico de g(x) em 3 unidades no sentido positivo do eixo Oy.

De um modo geral, dado o gráfico de uma função f(x), definida por sua respectiva expressão ou lei de formação, que alterações acontecem no gráfico ao inserirmos constantes aditivas à expressão de f(x)?

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é:

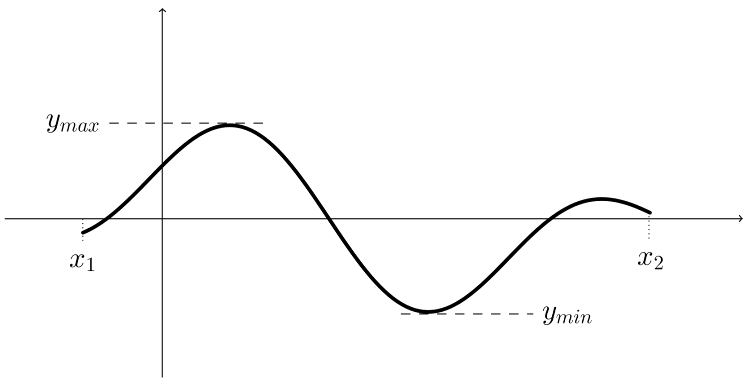


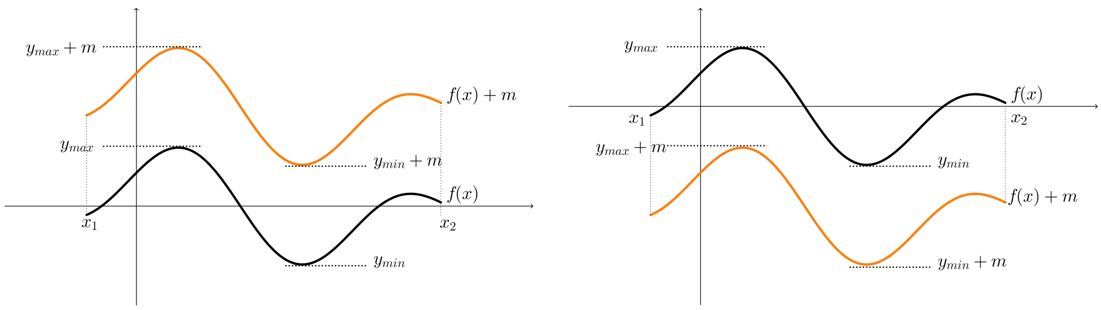
Figura 16 – Gráfico de uma função f(x)

Seja m uma constante $\in \mathbb{R}$, definamos duas funções $\mathrm{g}, \mathrm{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacionadas com a função f da seguinte forma:

$$\mathrm{g(x) = f(x) + m}, \qquad \mathrm{h(x) = f(x + m)}$$

Para calcular o valor de g(x), calcula-se o valor de f(x) e, após, soma-se a constante m. Já para se calcular o valor de h(x), soma-se antes a constante m (à abscissa x) e só então calcula-se o valor da função f no ponto x + m. Logo, no primeiro caso, a constante m atua na ordenada do ponto do gráfico da função f, enquanto que no segundo caso, a constante m opera na abscissa do ponto do gráfico da função f. Analisemos como essa diferença se reflete nos gráficos de g e h.

Partindo do gráfico de f(x) é possível obter o gráfico de g(x) = f(x)+m, para todo m $\in \mathbb{R}$, por meio de uma translação vertical de |m| unidades, ou seja, para a construção do gráfico de g(x) = f(x) + m, basta deslocar o gráfico de f(x) em m unidades para cima (resp. para baixo), se m > 0 (resp. se m < 0), veja a Figura 17.



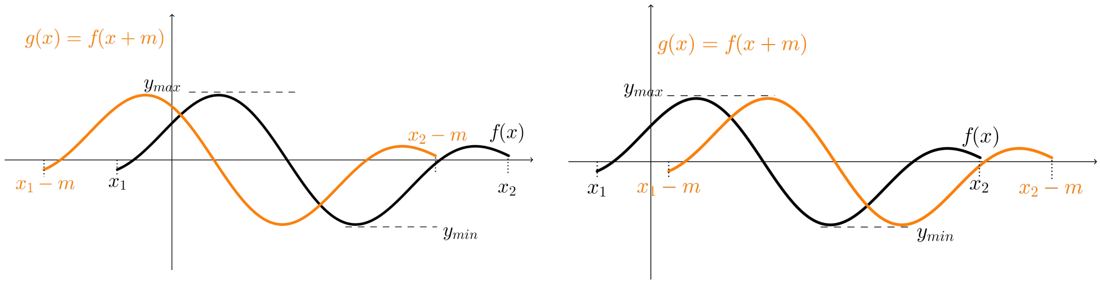
(a) Gráfico de g(x) para m > 0 (b) Gráfico de g(x) para m < 0

Figura 17 – Construção do gráfico da função g(x) a partir do gráfico de f(x)

Logo, o gráfico de g é uma translação vertical do gráfico de f (acima, se m > 0, ou abaixo, se m < 0).

Do mesmo modo, o gráfico da função definida por h(x) = f(x + m) pode ser obtido do gráfico da função f(x) por meio de uma translação horizontal de |m| unidades, ou seja, para a construção do gráfico de h(x) = f(x + m), basta deslocar o gráfico de f(x) em m unidades para esquerda (resp. para a direita), se m > 0 (resp. se m < 0) como mostra a figura 18.

Inicialmente, pode parecer anti-intuitivo o deslocamento horizontal se dar para a esquerda, quando a constante é positiva, ou para a direita, quando é negativa. No entanto, analizando com um pouco mais de cuidado, pode-se entender o que está acontecendo. Tomemos uma função h(x) = f(x + m), com m > 0, esta função pode ser reescrita da seguinte forma h(x – m) = f(x). Assim, o ponto de abscissa x do gráfico de f corresponde ao ponto de abscissa x – m do gráfico de h, o qual está mais à esquerda de x. Assim, se o ponto do gráfico de h está mais à esquerda do seu correspondente no gráfico de f, este último estará mais à direita. Isso



(a) Gráfico de h(x) para m > 0

(b) Gráfico de h(x) para m < 0

Figura 18 – Construção do gráfico da função h(x) a partir do gráfico de f(x)

explica por que, nesse caso, o gráfico de h é um deslocamento à esquerda. Uma situação análoga ocorre quando m < 0, produzindo uma translação horizontal à direita.

Potanto, o gráfico de h é obtido por uma translação horizontal do gráfico de f (à esquerda, se m > 0, ou à direita, se m < 0).

1.4.1 Homotetias

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é:

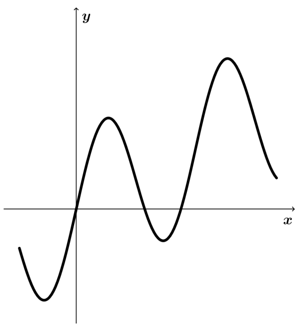


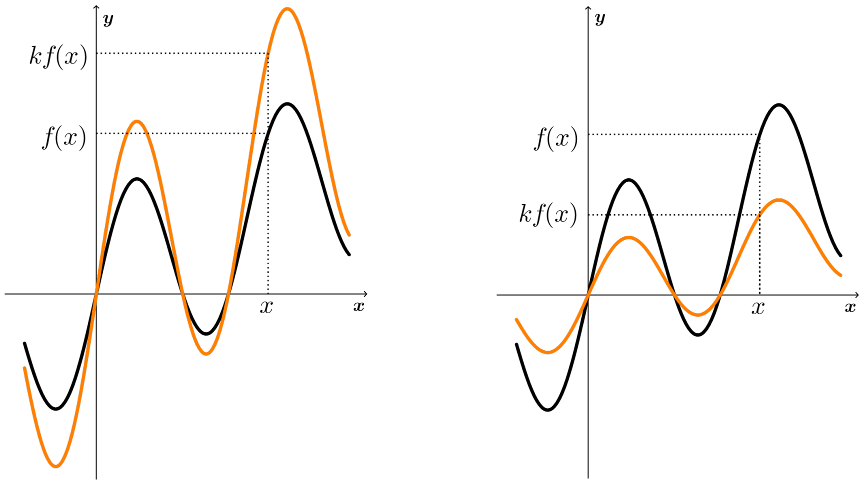
Figura 19 – Homotetia

Seja *k* uma constante positiva, definamos duas funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacionadas com a função f da seguinte forma:

$$g(x) = kf(x), \qquad h(x) = f(kx)$$

Para calcular o valor de g(x), calcula-se o valor de f(x) e, após, multiplica-se pela constante *k*. Já para se calcular o valor de h(x), multiplica-se antes a constante *k* (à abscissa x) e só então calcula-se o valor da função f no ponto kx. Assim, no primeiro caso, a constante *k* altera a imagem da função f, enquanto que no segundo caso, a constante *k* altera o domínio da função f. Vejamos como essa diferença se reflete nos gráficos de g e h.

O valor da função g é o resultado de uma homotetia por um fator *k* sobre o valor da função f em x. Se k > 1 ocorre uma dilatação, ou seja, o gráfico "emagrece", se 0 < k < 1 ocorre uma contração, ou seja, ele "engorda". Veja a Figura 20



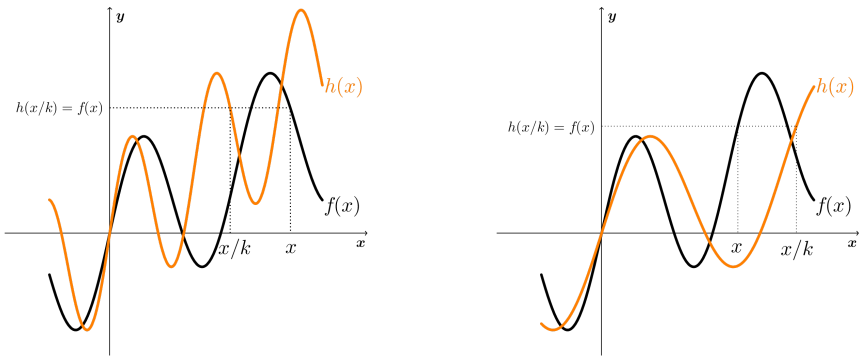
(a) Gráfico de g(x) para k > 1 (b) Gráfico de g(x) para 0 < k < 1

Figura 20 – Construção do gráfico da função g(x) a partir do gráfico de f(x)

Portanto, nesse caso, o gráfico de g é obtido do gráfico de f por uma homotetia vertical.

Se *k* for negativo, o gráfico de g é uma reflexão relativa ao eixo das abscissas do gráfico de f, seguido de uma dilatação vertical, se k < –1, ou de uma contração vertical, se –1 < k < 0.

Já o valor da função h é o resultado de uma homotetia aplicada por um fator *k* antes do cálculo do valor da função f em x. Se k > 1 temos uma contração, se 0 < k < 1 temos uma dilatação (veja a Figura 21). Note que, h(x) = f(kx) ⇒ h(x/k) = f(x).



(a) Gráfico de h(x) para k > 1 (b) Gráfico de h(x) para 0 < k < 1

Figura 21 – Construção do gráfico da função h(x) a partir do gráfico de f(x)

Observe que, se k > 1, então x > x/k, por outro lado, se 0 < k < 1, então x < x/k.

Portanto, nesse caso, o gráfico de h é obtido do gráfico de f por uma homotetia horizontal.

Se *k* for negativo, o gráfico de h é uma reflexão relativa ao eixo das ordenadas do gráfico de f, seguido de uma contração horizontal, se k < –1, ou de uma dilatação horizontal, se –1 < k < 0.

Em ambos os casos, é usual adotar os termos dilatação (horizontal ou vertical) ou contração (horizontal ou vertical). No entanto, similarmente ao que ocorre com a translação, as homotetias horizontais se comportam de modos diferentes.

2 Série de Fourier

Este capítulo segue em linhas gerais a referência [9] cuja leitura indicamos ao leitor. O mesmo é proposto para os profissionais que desejam ter, juntamente com as oficinas que apresentamos na Proposta Pedagógica, a formalização matemática dos elementos básicos do conteúdo abordado na oficina. Para um entendimento mais profundo, sugerimos as referências bibliográficas.

É aconselhável que o trabalho com os alunos não seja feito a partir dos teoremas, mas sim dos exemplos e suas consequências, pois acreditamos na necessidade do aluno ser motivado a construir os gráficos das funções a partir da motivação trazida pela contextualização da produção sonora. Dessa forma, através do processo de visualização, entendemos que o aluno possa ser capaz de compreender os conteúdos abordados.

2.1 Identidades Trigonométricas

Vamos relembrar, nesta seção, algumas fórmulas bastante úteis, a começar pelas fórmulas da soma e da diferença de seno e cosseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.1}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.2}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2.4}$$

Como consequências direta dessas fórmulas, deduzimos três relações, conforme mostraremos a seguir.

Somando as equações 2.1 e 2.3, obtemos:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta). \tag{2.5}$$

Subtraindo 2.1 da equação 2.3, obtemos:

$$2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta). \tag{2.6}$$

Somando as equações 2.2 e 2.4, obtemos:

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta). \tag{2.7}$$

Como aplicação das fórmulas da soma, mostraremos como determinar a amplitude, frequência e fase de uma adição de seno e cosseno.

Seja $\omega, c \in \mathbb{R}$ com $c \geq 0$. Substituindo α por ωt e multiplicando ambos os lados da equação 2.2 por c temos:

$$c\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta) = c(\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\beta) + \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\beta)).$$

Agora vamos considerar uma função arbitrária da forma:

$$h(x) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t).$$

onde a e b são números reais, assim:

$$h(x) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\omega t)\right).$$

Fazendo $A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, temos $A^2 + B^2 = 1$, i.e., o ponto (A, B) dista 1 da origem, portanto pertence ao círculo unitário centrado na origem. Assim, existe um ângulo β tal que $A = \cos\beta$, $B = \,\mathrm{sen}\beta$, e tomando $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ temos :

$$\begin{aligned} h(x) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t) &= d(A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)) \\ &= d(\cos(\beta)\,\mathrm{sen}(\omega t) + \,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\omega t)) \\ &= d\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

Portanto, h(x) é uma transformação de uma soma de seno e cosseno em uma senoide, onde $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ é a amplitude, ω é a frequência e o ângulo β é a fase.

Exemplo 1. *Considere a função* $h(x) = 3\,\mathrm{sen}x + 4\cos x$. *Temos* $a = 3$*,* $b = 4$*,* $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$*,* $A = \frac{3}{5}$ *e* $B = \frac{4}{5}$. *Temos:*

$$h(x) = 5\left(\frac{3}{5}\,\mathrm{sen}x + \frac{4}{5}\cos x\right).$$

Como $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$*, existe um ângulo* β *pertencente ao primeiro quadrante tal que:*

$$\cos\beta = \frac{3}{5} \text{ e } \mathrm{sen}\beta = \frac{4}{5}.$$

Segue, então, que:

$$\begin{aligned} h(x) &= 5(\cos\beta\,\mathrm{sen}x + \,\mathrm{sen}\beta\cos x) \\ &= 5\,\mathrm{sen}(x + \beta) \end{aligned}$$

Onde $\beta = \arccos\frac{3}{5}$*. A amplitude é* 5*, a frequência é* 1 *e a fase é* $\beta = \arccos\frac{3}{5}$.

Os resultados do teorema dado a seguir também serão importantes para nosso trabalho.

Teorema 2.1.1. *(Integrais Trigonométricas): Se* $m, n \in \mathbb{N}$ *, então:*

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & \textit{se } m \neq n \\ \frac{L}{2}, & \textit{se } m = n \end{cases}; \tag{2.8}$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & \textit{se } m \neq n \\ \frac{L}{2}, & \textit{se } m = n \end{cases}; \tag{2.9}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = 0, \forall m, n; \tag{2.10}$$

Demonstração.
1. Provando a relação 2.8.

- Caso $m \neq n$. Utilizando a identidade 2.5 podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{2m\pi x}{L} + \frac{2n\pi x}{L}\right)\right. \\
&+ \left.\cos\left(\frac{2m\pi x}{L} - \frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right. \\
&+ \left.\cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2(m+n)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2(m-n)\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{L}{4\pi(m+n)}\left[\operatorname{sen}\Big(2(m+n)\pi\Big) - \operatorname{sen}(0)\right] \\
&+ \frac{L}{4\pi(m-n)}\left[\operatorname{sen}\Big(2(m-n)\pi\Big) - \operatorname{sen}(0)\right] \\
&= 0 + 0 = 0;
\end{aligned}$$

já que $m, n \in \mathbb{N}$, e o seno de múltiplos de π é igual a zero.

- Caso m = n. Neste caso, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= \int_0^L \cos^2\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[1+\cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x+\frac{L}{4n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{1}{2}\left[L+\frac{L}{4n\pi}\,\mathrm{sen}(4n\pi)-0-\frac{L}{4n\pi}\,\mathrm{sen}(0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[L\Big]=\frac{L}{2};
\end{aligned}
$$

uma vez que $m \in \mathbb{N}$, e o seno de múltiplos de π é igual a zero.

2. Provando a relação 2.9.

- Caso $m \neq n$. Utilizando a identidade 2.6, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}+\frac{2n\pi x}{L}\right)\right. \\
&- \left.\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}-\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right. \\
&- \left.\cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2(m+n)\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2(m-n)\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{L}{4\pi(m+n)}\left[\mathrm{sen}\Big(2(m+n)\pi\Big)-\mathrm{sen}(0)\right] \\
&- \frac{L}{4\pi(m-n)}\left[\mathrm{sen}\Big(2(m-n)\pi\Big)-\mathrm{sen}(0)\right] \\
&= 0-0=0;
\end{aligned}
$$

pois $m, n \in \mathbb{N}$, e o seno de múltiplos de π é igual a zero.

- Caso m = n. Neste caso, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[1-\cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x-\frac{L}{4n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{1}{2}\left[L-\frac{L}{4n\pi}\operatorname{sen}(4n\pi)-0+\frac{L}{4n\pi}\operatorname{sen}(0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[L\right] = \frac{L}{2};
\end{aligned}
$$

já que $n \in \mathbb{N}$, e o seno de múltiplos de π é igual a zero.

3. Provando a relação 2.10

- Caso m ≠ n. Utilizando a identidade 2.7, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}+\frac{2n\pi x}{L}\right)\right. \\
&+ \left.\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}-\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right. \\
&+ \left.\operatorname{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{L}{2(m+n)\pi}\cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&+ \frac{1}{2}\left[-\frac{L}{2(m-n)\pi}\cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= -\frac{L}{4\pi(m+n)}\left[\cos\left(2(m+n)\pi\right)-\cos(0)\right] \\
&- \frac{L}{4\pi(m-n)}\left[\cos\left(2(m-n)\pi\right)-\cos(0)\right] \\
&= -\frac{L}{4\pi(m+n)}\left[1-1\right]-\frac{L}{4\pi(m-n)}\left[1-1\right] = 0;
\end{aligned}
$$

uma vez que $m, n \in \mathbb{N}$, e o cosseno de múltiplos de 2π é igual a um.

- Caso m = n. Neste caso, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L} + \frac{2n\pi x}{L}\right)\right. \\
&+ \left.\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L} - \frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{4n\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}(0)\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{4n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{L}{4n\pi}\cos\left(\frac{4n\pi x}{L}\right)\right]_0^L \\
&= -\frac{L}{8n\pi}\left[\cos(4n\pi) - \cos(0)\right] \\
&= -\frac{L}{8n\pi}\left[1 - 1\right] = 0
\end{aligned}
$$

pois $n \in \mathbb{N}$, e o cosseno de múltiplos de 4π é igual a um. □

2.2 Funções Periódicas

Funções periódicas são aquelas nas quais os valores da função f(x) se repetem para determinados valores da variável x, ou seja, para cada período determinado pelos valores de x, iremos obter valores repetidos para a função.

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é periódica de período* L *se existe um número real* $L > 0$ *tal que* $f(x + L) = f(x)$ *para todo* x *real.*

A Figura 22 mostra o gráfico de uma função periódica, o mesmo é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento L.

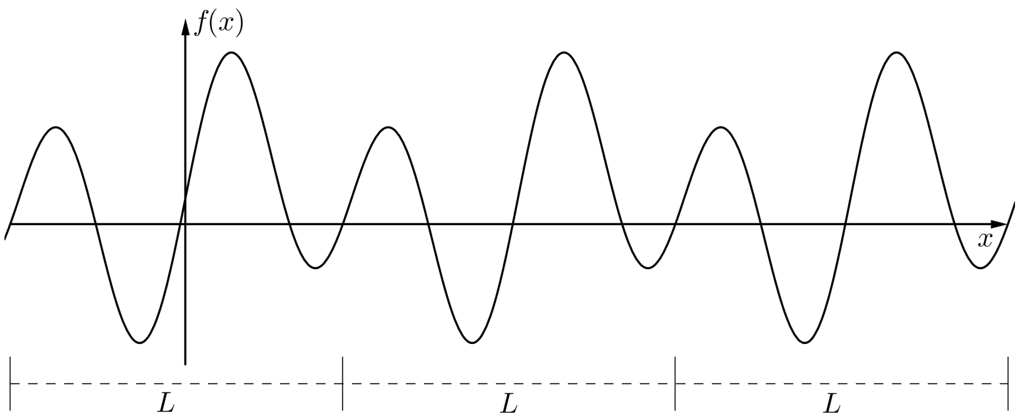


Figura 22 – Função periódica

Observações:

- Se L é o período de uma função f, então f(x + nL) = f(x) para todo n inteiro positivo, ou seja, um múltiplo inteiro positivo de L também é um período de f. Assim, o menor valor do período é chamado de período fundamental de f. Qualquer outro período de f será um múltiplo inteiro do período fundamental. Tal conceito é ilustrado na Figura 23.

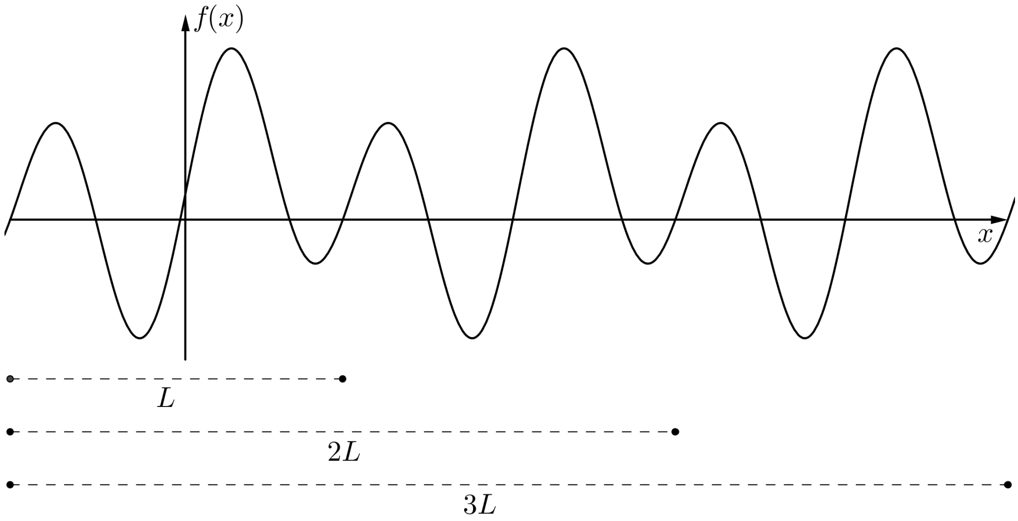


Figura 23 – Período fundamental

- O período (L) de uma função periódica corresponde ao intervalo de tempo necessário para que ocorra uma oscilação completa. Assim, ocorrendo **n** repetições num intervalo de tempo Δt, o período será dado pela relação:

$$\mathrm{L} = \frac{\Delta \mathrm{t}}{\mathrm{n}}$$

- Outra grandeza importante de uma função periódica é a sua **frequência**, que corresponde ao número de oscilações **n** completas por unidade de tempo Δt, a frequência será dada pela relação:

$$\mathrm{f} = \frac{\mathrm{n}}{\Delta \mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{L}}$$

- Outra frequência a ser destacada num movimento periódico é a frequência angular, determinada por:

$$\omega = 2\pi \mathrm{f} = \frac{2\pi}{\mathrm{L}}.$$

Apresentamos a seguir algumas propriedades importantes das funções periódicas.

Proposição 2.2.2. *Seja* f *uma função periódica de período* L*, então,* f(ax), a $\neq$ 0*, é periódica de período* $\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}}\right)$.

Demonstração.
Suponha que P seja o período da função f(ax), de modo que f[a(x + P)] = f(ax + aP). Fazendo

$y = ax$, obtemos $f(y) = f(y + aP)$. Logo pela hipótese de que f é periódica de período L, concluímos que $L = aP$, ou seja, $P = \left(\frac{L}{a}\right)$. $\square$

Exemplo 2. *As funções* $\cos(x)$ *e* $\operatorname{sen}(x)$ *são periódicas de período fundamental* 2π*, no sentido que satisfazem*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + 2\pi) &= \operatorname{sen}(x) \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Assim pela proposição 2.2.2 temos:

(a) $\operatorname{sen}(2x)$ *é periódica de período* $\frac{2\pi}{2} = \pi$*;*

(b) $\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ *é periódica de período* $4 \cdot 2\pi = 8\pi$*, como dividir por* a *é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso, e* $a = \frac{1}{4}$ *o resultado segue;*

(c) $\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ *e* $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ *são periódicas de período* $\frac{L}{2\pi} \cdot 2\pi = L$.

(d) *As funções* $\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *e* $\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *são periódicas com período fundamental* $\frac{L}{2n\pi} \cdot 2\pi = \frac{L}{n}$.

Como qualquer múltiplo inteiro do período também é período, conclui-se que as funções $\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *e* $\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *também são periódicas de período* L.

Proposição 2.2.3. *Se* f_1 *e* f_2 *são duas funções com um mesmo período* L*, e se* α_1 *e* α_2 *são duas constantes reais quaisquer, então a função* h *definida por*

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x),$$

também é periódica de período L.

Demonstração. Note que:
$h(x + L) = \alpha_1 f_1(x + L) + \alpha_2 f_2(x + L) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = h(x)$. $\square$

Exemplo 3. *As funções* $\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *e* $\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$ *são periódicas de período* L*, então pela Proposição 2.2.3, observamos que a função*

$$h(x) = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

também é periódica de período L.

Proposição 2.2.4. *Sejam* $f_1, f_2, ..., f_n$ *funções periódicas de período* L*. Então a função*

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x),$$

dada pela combinação linear de $f_1, f_2, ..., f_n$ *também é periódica de período* L*. A demonstração é análoga à da Proposição 2.2.3 e pode ser obtida pelo princípio de indução.*

2.3 Série de Fourier

Chama-se de série trigonométrica uma série formada por senos e cossenos. Assim, uma série trigonométrica assume a seguinte forma:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{2\pi x}{L}) + b_1 \operatorname{sen}(\frac{2\pi x}{L}) + a_2 \cos(\frac{4\pi x}{L}) + b_2 \operatorname{sen}(\frac{4\pi x}{L}) + ...$$

Ou, sob uma forma mais compacta:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \tag{2.11}$$

A série trigonométrica dada pela equação (2.11) é chamada de Série de Fourier de uma função f desde que essa série seja convergente. Se a Série de Fourier converge, então ela representa uma função periódica f de período L e podemos representar essa relação da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \tag{2.12}$$

onde os coeficientes a_0, a_n e b_n ($n = 1, 2, 3, ...$) são chamados Coeficientes de Fourier. Note que, a função f definida por (2.12) é periódica de período fundamental L, sua frequência fundamental é $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$. Assim, reescrevemos a série (2.12) na forma mais conveniente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \right) \tag{2.13}$$

Portanto, quando uma função f pode ser representada por uma série da forma (2.13), esta série é chamada Série de Fourier da função f. Então, as perguntas que ficam são:

1. quais as funções que podemos representar por uma Série de Fourier?
2. como determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n de Fourier para que possamos representar f por uma série da forma (2.13)?

Tratemos inicialmente de como determinar os coeficientes de Fourier.

2.3.1 A fórmula dos coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período L, queremos determinar os coeficientes de Fourier para esta função. Para tal objetivo, suponhamos que a função f pode ser representada por uma série trigonométrica convergente e, portanto, representada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \right)$$

Usando às identidades trigonométricas já estudadas, vamos encontrar os coeficientes a_0, a_n e b_n.

- **Determinação do coeficiente** a_0: integrando sobre o intervalo $[0, L]$ ambos os membros da equação (2.13), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)dx &= \int_0^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\big)\right] dx \\
&= \int_0^L \frac{a_0}{2}dx + \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x)dx + \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x)dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_0^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \cos(n\omega_0 x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \operatorname{sen}(n\omega_0 x)dx \\
&= \frac{a_0}{2}\Big[x\Big]_0^L + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{n\omega_0}\operatorname{sen}(n\omega_0 x)\right]_0^L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[-\frac{1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 x)\right]_0^L
\end{aligned}$$

como $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)dx &= \frac{a_0 L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0}{n\omega_0}\Big[\operatorname{sen}(2n\pi) - \operatorname{sen}(0)\Big] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\omega_0}\Big[\cos(2n\pi) - \cos(0)\Big] \\
&= \frac{a_0 L}{2}
\end{aligned}$$

já que $\operatorname{sen}(2n\pi) = 0$ e $\cos(2n\pi) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o coeficiente a_0 é dado por

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx. \tag{2.14}$$

Podemos derivar e integrar termo a termo uma série de funções desde que a soma convirja uniformemente. Este é o caso das Séries de Fourier.

- **Determinação dos coeficientes** a_n: multiplicando ambos os membros da equação (2.13) por $\cos(m\omega_0 x)$ para um *m* fixo inteiro $(m > 0)$ e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\cos(m\omega_0 x)dx &= \int_0^L \frac{a_0}{2}\cos(m\omega_0 x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \cos(n\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\cos(m\omega_0 x)dx.
\end{aligned}$$

Pelas equações (2.10) e (2.8), verificamos que o terceiro termo do segundo membro é sempre igual a zero, enquanto o segundo termo do segundo membro apresenta uma integral diferente de zero unicamente quando $m = n$ e, nesse caso, a integral é igual a $\frac{L}{2}$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\cos(n\omega_0 x)dx &= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\operatorname{sen}(n\omega_0 x)\Big]_0^L + a_n\frac{L}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\operatorname{sen}(n\omega_0 L) - \operatorname{sen}(0)\Big] + a_n\frac{L}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\operatorname{sen}(2n\pi) - \operatorname{sen}(0)\Big] + a_n\frac{L}{2} = a_n\frac{L}{2},
\end{aligned}$$

já que $\operatorname{sen}(2n\pi) = 0, \forall\ n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o coeficiente a_n é dado por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega_0 x)dx. \tag{2.15}$$

Note que, fazendo n igual a zero na equação (2.15), temos:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(0)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx.$$

Ou seja, a equação (2.15) deternina todos os a_n inclusive o termo a_0.

- **Determinação dos coeficientes** b_n: multiplicando ambos os membros da equação (2.13) por $\operatorname{sen}(m\omega_0 x)$ para um *m* fixo inteiro ($m > 0$) e integrando no intervalo $[0, L]$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(m\omega_0 x)dx &= \int_0^L \frac{a_0}{2}\operatorname{sen}(m\omega_0 x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \cos(n\omega_0 x)\operatorname{sen}(m\omega_0 x)dx \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \operatorname{sen}(n\omega_0 x)\operatorname{sen}(m\omega_0 x)dx.
\end{aligned}$$

Pelas equações (2.10) e (2.9), verificamos que a segunda integral do segundo membro é sempre igual a zero, enquanto a terceira integral do segundo membro é igual a zero quando $m \neq n$ e vale $\frac{L}{2}$ quando $m = n$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(n\omega_0 x)dx &= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\cos(n\omega_0 x)\Big]_0^L + b_n\frac{L}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\cos(n\omega_0 L) - \cos(0)\Big] + b_n\frac{L}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0}\Big[\cos(2n\pi) - 1\Big] + b_n\frac{L}{2} = b_n\frac{L}{2} \\
&= \frac{a_0 L}{2}
\end{aligned}$$

já que $\cos(2n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o coeficiente b_n é dado por:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(n\omega_0 x)dx \tag{2.16}$$

Logo, obtemos:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega_0 x)dx, n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 x)dx, n \geq 1$$

Portanto, se a Série de Fourier converge e, dessa forma, representa adequadamente uma função f, então as equações (2.15) e (2.16) determinam todos os coeficientes de Fourier. Na dedução destas Fórmulas, integramos sobre o intervalo $[0, L]$, tal integração poderia se dar em qualquer intervalo de comprimento L. Às vezes, é mais conveniente, por exemplo, integrar de $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ Assim, para o cálculo dos coeficientes de Fourier, podemos integrar sobre qualquer intervalo de comprimento L.

Exemplo 4. *Série de Fourier de uma onda quadrada:*
Determine a representação em Série de Fourier de f(x) *definida da seguinte forma:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; se \; -2 \leqslant x < 0 \\ 2, \; se \; 0 \leqslant x < 2 \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$$

A onda quadrada é mostrada na Figura 24.

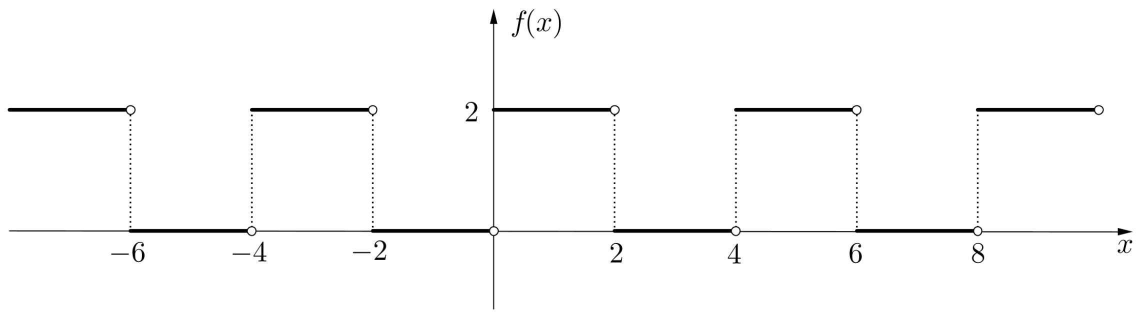


Figura 24 – Onda quadrada

O período desta onda quadrada é 4 e sua frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

- Cálculo de a_0: usando a equação (2.14), temos:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx\right] = \frac{1}{2}\int_0^2 2dx = \Big[x\Big]_0^2 = 2$$

- Cálculo de a_n: usando a equação (2.15), com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{2}{n\pi}\Big[\mathrm{sen}(n\pi) - \mathrm{sen}(0)\Big] = 0, \end{aligned}$$

pois o seno de múltiplos inteiros de π é zero.

- Cálculo de b_n: usando a equação (2.16), com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)\,\text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)dx + \int_{0}^{2} f(x)\,\text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\,\text{sen}\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)dx = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos(n\pi) - \cos(0)\Big] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos(n\pi) - 1\Big] = \frac{2}{n\pi}\Big[1 - \cos(n\pi)\Big],
\end{aligned}$$

Se n é ímpar, então $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$ e se n for par, então $b_n = 0$. Assim, b_n assume a forma:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{para n ímpar} \\ 0, & \text{para n par} \end{cases}$$

Substituindo $a_0,\ a_n,\ b_n$ e ω_0 na equação 2.12, obtemos:

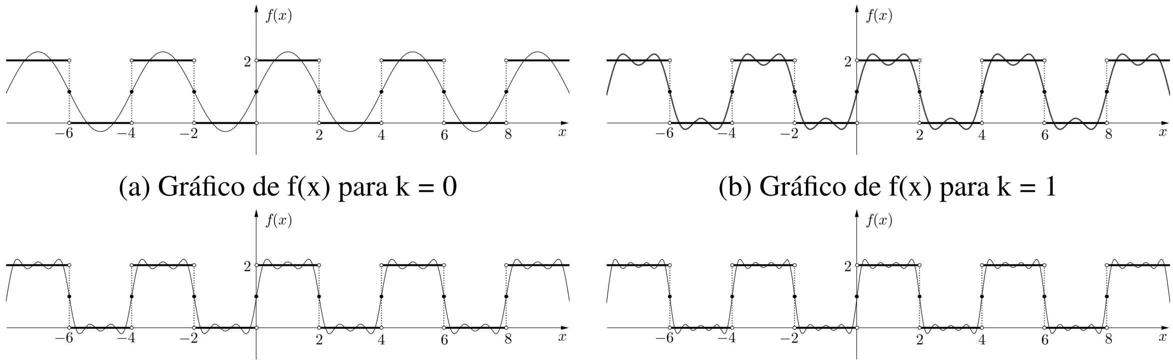
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{2} + \frac{4}{\pi}\,\text{sen}\Big(\frac{\pi x}{2}\Big) + \frac{4}{3\pi}\,\text{sen}\Big(\frac{3\pi x}{2}\Big) + \frac{4}{5\pi}\,\text{sen}\Big(\frac{5\pi x}{2}\Big) + ... \\
&= 1 + \frac{4}{\pi}\left[\text{sen}\Big(\frac{\pi x}{2}\Big) + \frac{1}{3}\,\text{sen}\Big(\frac{3\pi x}{2}\Big) + \frac{1}{5}\,\text{sen}\Big(\frac{5\pi x}{2}\Big)...\right]
\end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{(2k-1)}.$$

Portanto, a Série de Fourier da função só possui termos em senos.

A Figura 25 mostra o esboço da onda quadrada aproximado pelos primeiros termos da Série de Fourier.



(a) Gráfico de f(x) para k = 0

(b) Gráfico de f(x) para k = 1

(c) Gráfico de f(x) para k = 2

(d) Gráfico de f(x) para k = 3

Figura 25 – Aproximação da onda quadrada usando os termos iniciais da Série de Fourier

Nota-se, nitidamente, que a onda aproximada pela série de Fourier vai se tornando cada vez mais próxima do original, a onda quadrada.

Exemplo 5. *Série de Fourier de uma onda triangular:*
Determine a representação em Série de Fourier de f(x) *definida da seguinte forma:*

$$f(x) = \begin{cases} -x, \; se \; -2 \leqslant x < 0 \\ x, \; se \; 0 \leqslant x < 2 \end{cases}, f(x+4) = f(x)$$

A onda triangular é mostrada na Figura 26.

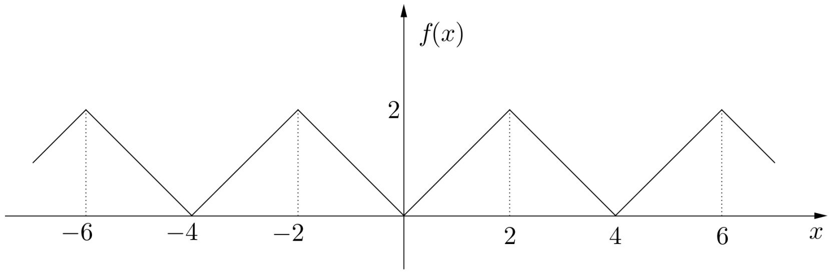


Figura 26 – Onda triangular

O período desta onda triangular é 4 e sua frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

- Cálculo de a_0: usando a equação (2.14), temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx\right] = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -x\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\frac{1}{2}[0-2] + \frac{1}{2}[2-0] = 1+1 = 2. \end{aligned}$$

- Cálculo de a_n: usando a equação (2.15), com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} -x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right].$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

Usando a integração por partes da seguinte forma:

$u = x$ $\qquad du = dx$

$dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$ $\qquad v = \frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Temos:

$$\begin{aligned} \int x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx &= \frac{2}{n\pi}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int \frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= \frac{2}{n\pi}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Usando a relação anterior para calcular a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{n\pi}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} \\
&\quad +\frac{1}{n\pi}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[0+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos(0)+2\,\text{sen}(-n\pi)-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos(-n\pi)\right] \\
&\quad +\frac{1}{n\pi}\left[2\,\text{sen}(n\pi)+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos(n\pi)-0-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\cos(0)\right] \\
&= -\frac{2}{(n\pi)^2}\Big[1-\cos(n\pi)\Big]+\frac{2}{(n\pi)^2}\Big[\cos(n\pi)-1\Big] \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\Big[\cos(n\pi)-1\Big]
\end{aligned}$$

Se n é ímpar, então $a_n = -2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2$ e se n for par, então $a_n = 0$. Assim, a_n assume a forma:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{8}{(n\pi)^2}, & \text{para n ímpar} \\ 0, & \text{para n par} \end{cases}$$

- Cálculo de b_n: usando a equação (2.16), com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} -x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right]$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\int x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

Usando a integração por partes da seguinte forma:

$u = x$ $\qquad du = dx$

$dv = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$ $\qquad v = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx &= -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\int\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Usando a relação anterior para calcular b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{0} \\
&\quad -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[0-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}(0)+2\cos(-n\pi)+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}(-n\pi)\right] \\
&\quad -\frac{1}{n\pi}\left[2\cos(n\pi)-\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}(n\pi)-0+\left(\frac{2}{n\pi}\right)\,\mathrm{sen}(0)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\Big[2\cos(n\pi)\Big]-\frac{1}{n\pi}\Big[2\cos(n\pi)\Big]=0
\end{aligned}$$

Substituindo $a_0,\ a_n,\ b_n$ e ω_0 na equação (2.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{2}-\frac{8}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{8}{(3\pi)^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)-\frac{8}{(5\pi)^2}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)-... \\
&= 1-\frac{8}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)+\frac{1}{25}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)...\right]
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Portanto, a Série de Fourier da função só possui termos em cossenos.

2.3.2 Teorema de Fourier

Definição 2.3.1. ***(Função seccionalmente contínua)*** *Uma função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é seccionalmente contínua se existem* $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ *tais que* f *é contínua no intervalo* $t_{i-1} < x < t_i, i = 1, ..., n$*, e existem os limites laterais*

$$\lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to b^-} f(x)\ e\ \lim_{x\to t_i^{\pm}} f(x).$$

Assim, $f(x)$ é seccionalmente contínua no intervalo $[a,b]$ se ela é contínua em todo o intervalo, exceto em um número finito de pontos $t_0 < t_1 < ... < t_n$ deste intervalo e os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo existem e são finitos.

Definição 2.3.2. ***(Função seccionalmente diferenciável)*** *Uma função* $f(x)$ *é dita seccionalmente diferenciável em um intervalo* $[a,b]$ *se* $f(x)$ *e sua derivada* $f'(x)$ *são seccionalmente contínuas em* $[a,b]$.

Teorema 2.3.3. ***(Teorema de Fourier)*** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período* L*. Então, a representação em série de Fourier de* $f(x)$*, dada pela equação (2.13), converge para* $f(x)$ *em todos os pontos onde* $f(x)$ *é contínua e converge para* $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a^+} f(x)+\lim_{x\to a^-} f(x)\right]$ *em todo os pontos em que* $f(x)$ *é descontínua.*

Observações: As seguintes observações são importantes:

- As condições dadas no Teorema 2.3.3 são suficientes, mas não necessárias, para que f(x) possa ser expandida em Série de Fourier. Ou seja, para ser representável por uma Série de Fourier, uma função f(x) deve ser periódica e seccionalmente diferenciável. Em outras palavras, toda função periódica e seccionalmente diferencíavel é representável por Série de Fourier, mas existem funções representáveis por Série de Fourier que não são seccionalmente contínuas.

- Observe que, a representação em Série de Fourier de uma função f(x) converge para $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)\right]$ nos pontos onde a função é descontínua e em pontos onde f(x) é contínua esse valor representa o próprio valor de f(x). Portanto, a Série de Fourier é exatamente igual a função f(x) no interior de cada intervalo em que a função é contínua, enquanto nos pontos onde a função é descontinuidade, ou seja, apresenta um salto, a representação em Série de Fourier é exatamente igual a média aritmética dos limites laterais.

Exemplo 6. *Determine a Série de Fourier da função* $f(x) = x$ *para* $\pi \leq x \leq \pi$.

Inicialmente, vamos calcular os coeficientes da Série de Fourier da função f.

- Cálculo de a_0: usando a equação (2.14), temos:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right] = 0$$

- Cálculo de a_n: usando a equação (2.15), com $\omega_0 = 1$ temos:

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx\right]$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx\right]$$

Usando a integral por partes da seguinte forma:

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos(nx)dx \qquad v = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$

Segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx\right] &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sen}(nx)}{n}dx\right) = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(nx)dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n}\right] = 0
\end{aligned}$$

Ou seja, $a_n = 0$.

- Cálculo de b_n: usando a equação (2.16), com $\omega_0 = 1$ temos:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx\right]$$

Precisamos encontrar a seguinte integral:

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx\right]$$

Usando a integral por partes da seguinte forma:

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \text{sen}(nx)dx \qquad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

Segue que:

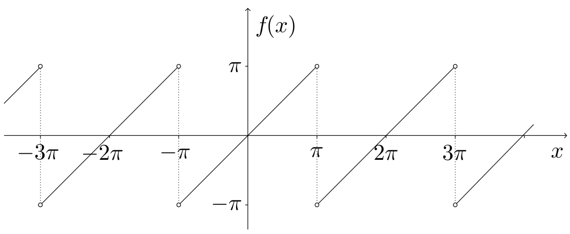
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}(nx)dx\right] &= \frac{1}{\pi}\left[\left[x\cdot\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n} - \pi\cdot\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi\cos(n\pi)}{n}\right] + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\text{sen}(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\text{sen}(n\pi)}{n} - \frac{\text{sen}(-n\pi)}{n}\right] = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Portanto, $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}$.

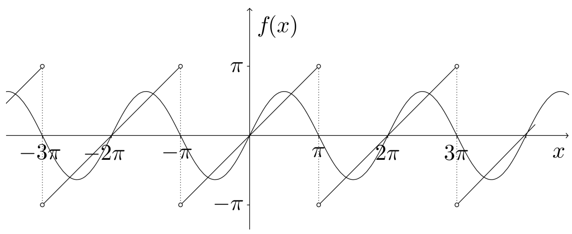
Logo, a Série de Fourier da função f é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\,\text{sen}(nx)}{n}$$

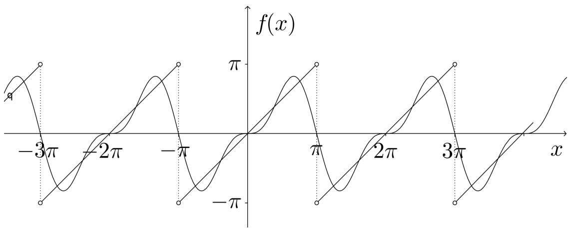
A Figura 27 mostra o esboço do gráfico da função f aproximado pelos primeiros termos da Série de Fourier.



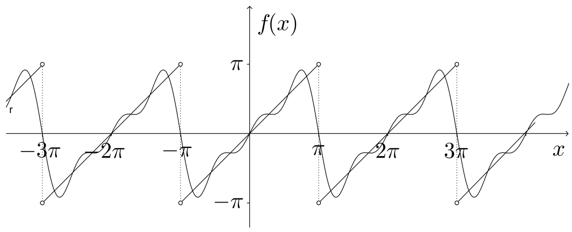
(a) Gráfico da onda dente de serra



(b) Gráfico de f(x) para n = 1



(c) Gráfico de f(x) para n = 2



(d) Gráfico de f(x) para n = 3

Figura 27 – Aproximação da onda dente de serra usando os termos iniciais da Série de Fourier

Pelo Teorema de Fourier temos que:

(a) Para x = 1 a função é contínua e tem imagem f(1) = 1, logo sua representação em Série de Fourier converge para 1;

(b) Para $x = \pi$ a função apresenta um salto, ou seja, é descontínua, logo sua representação em Série de Fourier converge para a média dos limites laterais em $x = \pi$, logo converge para 0. Observe na Figura 27 que o mesmo comportamento de convergência ocorre em $x = -\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, ...$

3 Proposta Pedagógica

O presente trabalho esboça e apresenta, dentro do contexto da educação básica brasileira, uma proposta para trabalhar o conteúdo de funções trigonométricas em sala de aula através do uso do software Octave. Para tanto, faz-se necessário a consciência e a compreensão de que toda pesquisa é uma aparelhagem investigativa adaptada e apta a proporcionar, em caráter de produção, um conhecimento novo sobre determinado campo do saber ou acerca de algum fenômeno. Portanto, nada mais que uma sistematização de saberes, dentre tantas possíveis.

Dante (2009) afirma que a natureza está repleta de fenômenos físicos ditos periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (período). Como, por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são todos periódicos.

> As funções trigonométricas, em especial as senoides, são excelentes para descrever tais fenômenos, uma vez que são funções periódicas (DANTE, 2009, p. 236).

Neste capítulo, pretendemos desenvolver uma proposta de oficinas, as quais utilizarão a Investigação Matemática como metodologia de ensino para despertar a curiosidade e atenção dos alunos para as funções trigonométricas.

> Acreditamos que para despertar nos estudantes o gosto pela matemática é preciso apresentar aos mesmos a "verdadeira matemática", mostrando o quão interessante ela é, de modo a torná-la atraente. Para tanto, é necessário que o professor trabalhe a disciplina de maneira diferente daquela praticada nas aulas tradicionais, pois a "verdadeira matemática" pouco tem a ver com decorar fórmulas, executar operações aritméticas ou realizar outras tarefas rotineiras (PEREIRA, 2017, p. 16).

Os sujeitos da pesquisa foram alunos da disciplina de Matemática do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Panelas-PE. Por bem, e sendo mais claro, realizou-se um número de três oficinas Matemáticas com o uso do software Octave e foram aplicados dois questionários de sondagem, um antes e o outro após a aplicação das atividades direcionadas de funções trigonométricas.

3.1 GNU Octave

O GNU Octave ou Octave é um programa de computador de caráter interativo para o estudo da matemática. Por ele, é possível operar com matrizes, com funções, plotar gráficos em duas e três dimensões, desenvolver algoritmos para resolução dos mais variados problemas, processar imagens digitais, produzir som, dentre outras aplicações. Possui distribuição livre segundo os termos da GNU, a General Public License (GPL).

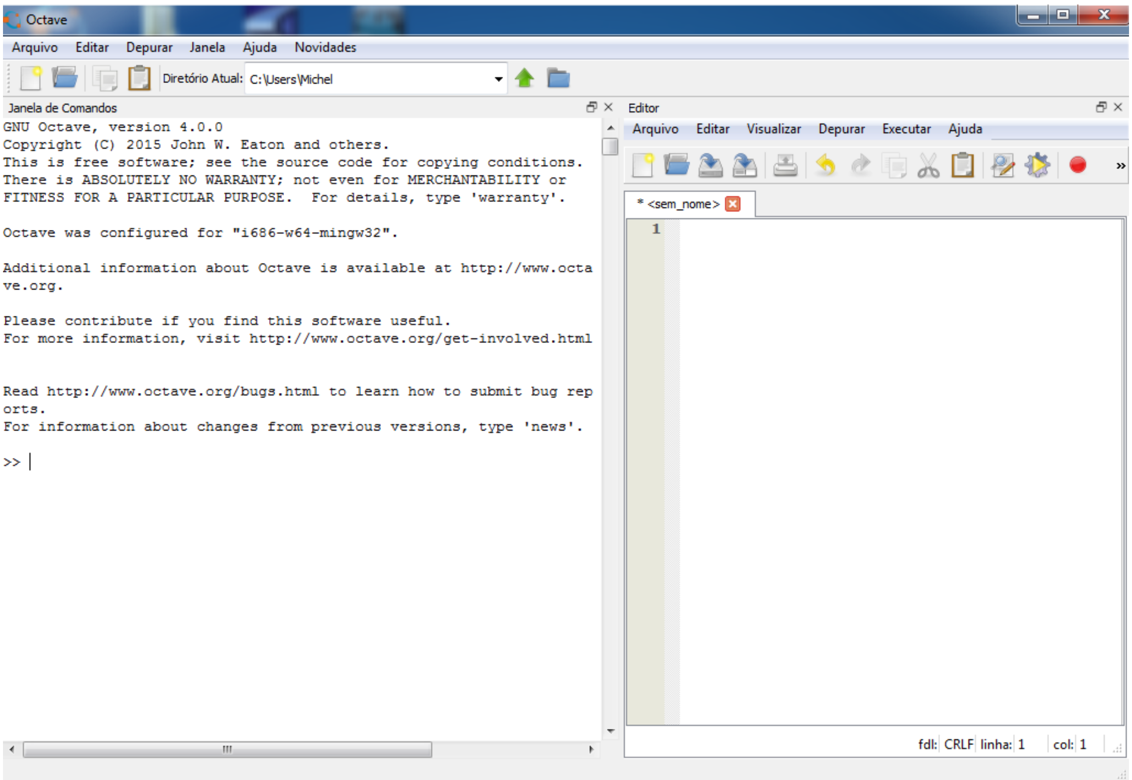
O Octave encontra-se disponível para os sistemas operacionais Windows, Linux e MacOS. As versões para Windows e MacOS podem ser encontradas na página da sourceforge; neste trabalho, utilizamos a versão 4.0.0 disponível para o Windows.

O estudo de instrumentos interativos através do uso de computadores é um salto no processo ensino-aprendizagem, no momento em que o estudante deixa de ser um mero observador e passa a interagir com a máquina, fazendo-a de ferramenta em processos investigativos. Formar conjecturas, elaborar questionamentos, realizar trabalhos, apontam para a interatividade, tornando o processo de aquisição do conhecimento mais fácil e agradável.

O uso do Octave se dará não apenas como elemento gerador de gráficos, mas também como forma de trazer o som e a música para a sala de aula, tornando mais atrativo e curioso o aprendizado da matemática. Salienta-se, portanto, a possibilidade do Octave produzir sons bem como possibilitar a execução de notas distintas.

3.1.1 Usando o Octave

A Figura 28 a seguir mostra a interface do software



!

Figura 28 – Tela inicial do Octave

O símbolo >>, que aparece na janela de comandos, representa o prompt do Octave e é a partir dele que digitamos os comandos.

O Octave tem uma interface baseada em linha de comando, onde os comandos são digitados, seguidos pela digitação da tecla Enter. O Octave é uma linguagem interpretada, o que significa que cada comando é convertido em código de máquina e executado. No caso de linguagens compiladas, o programa inteiro é convertido em código de máquina previamente, para depois ser executado. De forma geral, os programas compilados são executados de forma mais rápida que os interpretados.

A maneira mais simples de trabalhar com o Octave é digitar os comandos matemáticos na janela de comandos, como em uma calculadora normal, depois é só dar Enter. Por exemplo:

```
>> 7 + 4
ans = 11
```

Observe que o resultado é mostrado e guardado na variável cujo nome é "*ans*", do inglês *answer* (resposta), e pode ser utilizado no cálculo seguinte:

```
>> ans – 3
ans = 8
```

Algumas variáveis já possuem um significado predefinido no Octave (palavras chaves), não podendo estas serem utilizadas para uma outra finalidade que não seja a sua própria. Algumas destas são:

- ans - variável usada para os resultados.
- inf - significa infinito.
- i e j - unidade imaginária de um número complexo.
- realmin - menor número que o computador pode armazenar em valor absoluto.
- realmax - maior número que o computador pode armazenar em valor absoluto.

As operações aritméticas básicas são obtidas pelos seguintes operadores:

Operador	Operação
+	adição
−	subtração
∗	multiplicação
/	divisão
ˆ	potência

O programa automaticamente resolve as operações na ordem usual, ou seja, parênteses são calculados primeiramente, seguidos de potências, multiplicação e divisão e, finalmente, adição e subtração.

O Octave possui uma série de funções matemáticas, sendo algumas delas apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 – Algumas funções do Octave

Função	Descrição	Função	Descrição
abs(x)	Módulo	sin(x)	seno de x
acos(x)	Arco cosseno de x	sinh(x)	seno hiperbólico de x
cos(x)	cosseno de x (em rad)	tan(x)	tangente de x
cosh(x)	cosseno hiperbólico de x	exp(n)	Função exponencial e^n
Round(x)	Arredonda o valor de x	log10(x)	Logaritmo de x na base 10

Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/ marcio/tut2005/octave/042565Cassia.pdf>

Assim, para calcular $2 \log 100 + \text{sen}^2(\pi/4)$, digita-se:

```
>> 2*log10(100)+sin(pi/4)^2
ans = 4.50000
```

Note que os ângulos usados como argumentos nas funções trigonométricas devem estar em radianos. A operação de multiplicação deve ser sinalizada de forma explícita pelo uso do operador *, como indicado entre 2 e log.

O Octave também já reconhece os valores nos números irracionais *e* (número de Euler) e π(pi), veja:

```
>> pi
ans = 3.1416
>> e
ans = 2.7183
```

Pode-se definir variáveis, com exceção das predefinidas, a serem usadas na sessão de trabalho, na definição dos nomes das variáveis o Octave diferencia letras maiúsculas de minúsculas.

Caso o usuário queira visualizar as variáveis declaradas, apagar alguma delas, ou apagar todas elas, basta que se digite os comandos:

- who - mostra as variáveis declaradas pelo usuário.
- clear - limpa uma variável especificada.
- clear all - apaga todas as variáveis declaradas pelo usuário.

Se desejar limpar a tela, o comando a ser usado é o “clc”.

3.1.2 Gráficos

A construção de gráficos no Octave é bem simples, sendo possível a geração de gráficos bidimensionais ou tridimensionais. O comando básico para traçar gráficos bidimensionais é o plot (x, y). Os parâmetros x e y são as coordenadas a serem traçadas.

Na sua forma mais simples, a função plot apresenta um gráfico dos valores de dois vetores linha, correspondendo ao eixo das abscissas e das ordenadas.

Vejamos um exemplo em que usamos o comando plot para gerar o gráfico da função sen(x), a ser traçada no intervalo $[0, 2\pi]$. Se x e y são vetores com dimensões iguais, o comando plot (x, y) produz um gráfico bidimensional dos elementos de x versos os elementos de y, por exemplo:

```
>> x = 0 : 2 * pi/100 : 2 * pi;
>> y = sin(x);
>> plot(x, y)
```

O resultado é mostrado na Figura 29

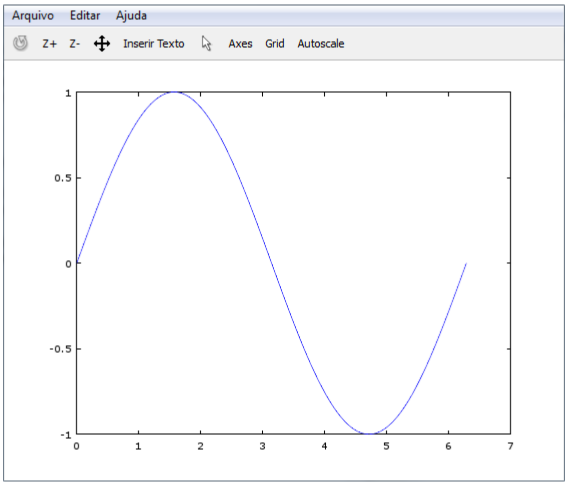


Figura 29 – Gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$

O comando (>> x = 0 : 2 ∗ pi/100 : 2 ∗ pi) constroi um vetor x, com 100 valores dentro do intervalo $[0, 2\pi]$

Os comandos *title, xlabel* e *ylabel* permitem escrever um título para o gráfico e um rótulo em cada um dos eixos. Os termos entre aspas indicam o formato da linha e a legenda a ser apresentada pelo gráfico.

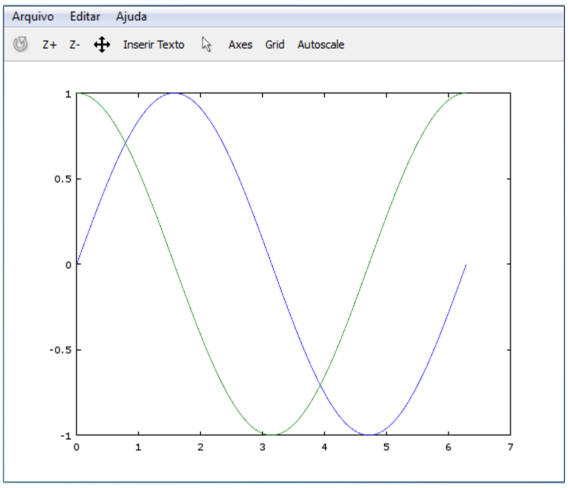
```
>> title("Gráfico");
>> xlabel("x");
>> ylabel("y")
```

O Octave pode também plotar várias funções em apenas um gráfico.

Comando plot com múltiplos argumentos.

$$\boxed{\text{>> Plot}(x, \sin(x), x, \cos(x))}$$

Resultado:



3.1.3 Função Sound

O Octave fornece alguns recursos para a produção de som, uma das maneiras de produzir som no Octave é através da função sound. Onde y é o vetor linha ou coluna que gera o som e *fa* é a frequência de amostragem.

$$\boxed{\text{>> sound}(y, fa)}$$

Caso se deseje tocar a nota *Lá*, que possui frequência de 440 Hz, com a duração de 3 segundos, deve ser utilizada a função seno do Octave. Quando o argumento desta função varia entre $[0, 2\pi]$, a função perfaz um período. Se quisermos 440 períodos, o argumento terá de variar entre $[0, 880\pi]$ durante os segundos de duração do sinal. Para gerar os instantes de tempo, será escolhida uma frequência de amostragem de 44.100 amostras por segundo. O código no Octave para gerar a nota *Lá* é:

```
>> Fs = 44100;
>> x = 0 : 1/fs : 3;
>> y = sin(2 * pi * 440 * x)
```

Utilizando a função sound, pode-se escutar o som da nota *Lá*.

```
>> sound(y, fs)
```

3.2 Oficinas de Matemática

Nesta seção propomos uma sequência didática para o ensino das senoides no Octave. O objetivo desta sequência é mostrar como a tecnologia pode contribuir para solidificar os conhecimentos matemáticos nos alunos do ensino médio.

Um dos objetivos é utilizar uma vertente pouco explorada do Octave, que é a capacidade de emitir sons. Mais que isso, junta-se essa possibilidade ao estudo de funções trigonométricas, podendo não só visualizar as equações graficamente, como também executá-las sonoramente. Faz-se presente também a multidisciplinaridade no momento em que se faz a ligação com os estudos de ciências, ondas, acústica, fisiologia e física.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "as técnicas, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas implicações que exercem no cotidiano das pessoas" (BRASIL, 1998, p. 34). Devido ao avanço tecnológico, a sociedade vem se modificando e como consequência disso a forma pela qual a produção de conhecimento é entendida também tem sido alterada. Por esse motivo, é importante entender como isso afeta a educação. No entanto, ao assumirmos que o conhecimento é modificado, necessitamos definir o que se está assumindo como conhecimento nesta pesquisa.

Tendo como hipótese que os alunos têm conhecimento das principais características do som: altura e volume. Por fazer parte do cotidiano dos alunos, cremos que a música possa contribuir na construção da aprendizagem de matemática. Acreditamos que a música, na aula de matemática, além de ser algo novo, possibilite um ambiente de interação entre o objeto de estudo da aula, o professor e os alunos.

A sequência didática ocorrerá em 3 oficinas e cada oficina será subdividida em atividades a serem realizadas na sala de aula.

- Oficina 1 (com questionário de sondagem): Exposição sobre as funções trigonométricas e o efeito dos paramêtros na função seno (o alunado participante da pesquisa passou a conhecer o software Octave, e começou a manipular o mesmo verificando o que acontece quando aumenta ou diminui os parâmetros da função $y = a\,\mathrm{sen}(bx+c)+d$, sendo *a, b, c* e *d* números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, tudo a compor uma espécie de apresentação da situação de pesquisa. Todavia, antes de tudo isso, aplicou-se um questionário de sondagem com um número de dez (10) questões (consta no Apêndice desta pesquisa);

- Oficina 2: Gerador de notas musicais (o alunado participante da pesquisa construiu um gerador de notas musicais, a fim de compreender os parâmetros da função $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c)$, como as componentes da onda sonora, onde *a* é amplitude, *b* é frequência e *c* é a fase). A partir do gerador de notas musicais, os alunos foram direcionados a produzir as notas e seus respectivos gráficos, para perceber as modificações sonoras, decorrente das mudanças dos parâmetros da função;

- Oficina 3 (com questionário de sondagem): Reproduzir músicas usando o software Cool Edit Pro e analisar as ondas sonoras geradas através do aplicativo Spectrum Analyzer (o alunado participante da pesquisa reproduziram algumas músicas no Cool Edit Pro, com o objetivo de compreender o gráfico sonoro como uma soma de várias ou infinitas senoides). Após a execução das músicas no software, os alunos analisaram alguns sons capitados por meio do aplicativo Spectrum analyzer e gravaram algumas músicas no Cool Edit Pro.

Durante este processo de três etapas com oficinas de matemática experimental, um Questionário de Sondagem foi aplicado em dois momentos, a primeira aplicação ocorreu antes da Oficina 1 e a segunda após a Oficina 3.

3.2.1 Oficina 1: Exposição sobre as funções trigonométricas e o efeito dos paramêtros na função seno

Utilizando uma atividade já previamente elaborada pelo professor, o alunado participante da pesquisa irá digitar os comandos no Octave e observar as transformações no gráfico da função. Após a análise de cada parâmetro junto à turma, serão respondidos exercícios sobre o referido assunto.

- Atividade 1

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
x = 0 : 1/100 : 4 * pi;
a1 = 2;
a2 = 3;
y = sin(x);
g = a1 * sin(x);
h = a2 * sin(x);
plot(x, y, x, g, x, h)
legend('y', 'g', 'h')
```

Selecione tudo e aperte f9.

O gráfico das funções f, g e h serão gerados no mesmo par de eixos. Assim, os alunos poderão fazer uma comparação, analisando as mudanças em relação ao gráfico de f. A ideia é sempre fazer a comparação de uma função modificada com a função seno, f = sen(x), que tem como domínio o conjunto dos números reais, o conjunto imagem é representado pelo intervalo real $[-1, 1]$ e o período é 2π.

1. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		
h		

2. Comparando o gráfico das funções *g* e *h* com o gráfico da função *f*, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração?

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função?

- **Atividade 2**

Mude os valores dos parâmetros a_1 e a_2 para 1/2 e 1/3, respectivamente. Selecione tudo e aperte f9.

1. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		
h		

2. Comparando o gráfico das funções *g* e *h* com o gráfico da função *f*, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração?

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função?

3. Qual o efeito do parâmetro *a* no gráfico da função *f*?

- **Atividade 3**

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
x = 0 : 1/100 : 4 ∗ pi;
b1 = 2;
y = sin(x);
g = sin(b1 ∗ x);
plot(x, y, x, g)
legend('y', 'g')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		

2. Comparando o gráfico da função *g* com o gráfico da função *f*, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração?

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função?

3. Aumentando o valor do parâmetro b_1 para 4, o que acontece com o período da função *g*? E com a imagem?

4. Determine o período e o conjunto imagem da função *g* para $b_1 = 4$.

5. Diminuindo o valor do parâmetro b_1 para 1/2, o que ocorre com o período da função *g*? E para $b_1 = 1/4$?

6. Determine o período e o conjunto imagem da função *g* para:

   (a) $b_1 = 1/2$

   (b) $b_1 = 1/4$

7. Qual o efeito do parâmetro *b* no gráfico da função *f*?

- **Atividade 4**

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
x = 0 : 1/100 : 4 * pi;
x1 = -pi/2 : 1/100 : 7/2 * pi;
x2 = -pi : 1/100 : 3 * pi;
c1 = pi/2;
c2 = pi;
y = sin(x);
g = sin(x1 + c1);
h = sin(x2 + c2);
plot(x, y, x1, g, x2, h)
legend('y', 'g', 'h')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		
h		

2. Comparando o gráfico das funções g e h com o gráfico da função f, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração?

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função?

3. Os gráficos das funções g e h sofrem um deslocamento horizontal em relação ao gráfico da função f, para a direita ou para a esquerda?

4. Fazendo as seguintes modificações no editor do Octve

   ```
   x1 = pi/2 : 1/100 : 9/2 * pi;
   x2 = pi : 1/100 : 5 * pi;
   c1 = -pi/2;
   c2 = -pi;
   ```

   O deslocamento dos gráficos das funções g e h se dará em qual sentido?

5. Qual a relação entre os gráficos das funções g e h se comparados ao da função f?

6. Qual o efeito do parâmetro c no gráfico da função f?

- **Atividade 5**

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
x = 0 : 1/100 : 4 * pi;
d1 = 1;
d2 = 3;
y = sin(x);
g = sin(x) + d1;
h = sin(x) + d2;
plot(x, y, x1, g, x2, h)
legend('y', 'g', 'h')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		
h		

2. Comparando o gráfico das funções *g* e *h* com o gráfico da função *f*, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração?

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função?

   Mude os valores dos parâmetros d_1 e d_2 para -1 e -2, respectivamente.

3. Complete o quadro abaixo:

Função	Conjunto imagem	Período
f	$[-1, 1]$	2π
g		
h		

4. Qual o comportamento dessas funções em relação ao gráfico da função *f*?

5. Qual o efeito do parâmetro *d* no gráfico da função *f*?

3.2.2 Oficina 2: Gerador de notas musicais

Nesta oficina, temos como objetivo mostrar uma aplicação das funções trigonométricas relacionadas com os fenômenos periódicos através da música.

O alunado participante da pesquisa irá construir um gerador de notas musicais, esta atividade foi elaborada para ser aplicada na sala de aula (ou laboratório de informática) sob a orientação do professor, com a duração de 2 horas/aula (1h e 20min).

- Atividade 1

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
% Gerador de notas musicais
fn = 440; % frequência da nota
fa = 44100; % frequência de amostragem
t = 0 : 1/fa : 3;
a = 1; % amplitude;
% amortecimento
k = exp(-t);
y = a * sin(2 * pi * fn * t). * k;
sound(y, fa);
%Gráfico
plot(t, y);
title('Nota x Tempo');
xlabel('tempo s')
ylabel('amplitude')
```

Selecione tudo e aperte f9.

Onde *fn* representa a frequência da nota musical em Hz, *fa* é a frequência de amostragem, t é o tempo de duração da onda sonora, a é a amplitude, y é a senoide que gera a nota musical, *sound* é a função que permite reproduzir o som e o comando *plot* é o que gera o gráfico de y em função do tempo t. Utilizamos o valor de 44100 amostras por segundo, por se tratar de um valor padrão para a frequência de amostragem (veja [8] para mais detalhes).

Na tabela abaixo, temos as frequências das notas musicais na escala igualmente temperada.

Nota	Frequência
dó	$261,6$
dó #	$277,2$
ré	$293,7$
ré #	$311,1$
mi	$329,6$
fá	$349,2$
fá #	370
sol	392
sol #	$415,3$
lá	440
lá #	$466,2$
si	$493,9$

Como podemos perceber, a nota musical executada no Octave é de 440 Hz, ou seja, é um *lá*.

1. Mude a frequência da nota para 880 e execute. O que acontece?

2. Mude a frequência da nota para 220 e execute. O que acontece?

As notas musicais de 880Hz e 220Hz também correspondem a um *lá*, só que a nota *lá* de 880Hz está uma oitava acima do *lá* de 440Hz, e a nota *lá* de 220Hz está uma oitava abaixo do *lá* de 440Hz.

3. Execute todas as notas musicais da tabela.

4. Aumentando o valor da frequência da nota musical, podemos afirmar que:

   (a) O som fica grave, ou seja, mais baixo

   (b) O som fica agudo, ou seja, mais alto

   (c) O som não se altera

5. Diminuindo o valor da frequência da nota musical, podemos afirmar que:

   (a) O som fica grave, ou seja, mais baixo

   (b) O som fica agudo, ou seja, mais alto

   (c) O som não se altera

A Frequência da nota caracteriza a altura de um som, quanto maior a frequência sonora mais agudo será o som. Essas frequências sonoras perceptíveis pelo ser humano variam de 20 Hz a 20000 Hz, mas essa característica varia de indivíduo para indivíduo e de acordo com a idade.

- Atividade 2

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
% Gerador de notas musicais
fn = 5; % frequência da nota
fa = 44100; % frequência de amostragem
t = 0 : 1/fa : 1;
a = 1; % amplitude;
y = a * sin(2 * pi * fn * t);
sound(y, fa);
%Gráfico
plot(t, y);
title('Nota x Tempo');
xlabel('tempo s')
ylabel('amplitude')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. O gráfico da função varia quantas vezes por segundo?

2. Mude o valor da frequência da nota para 10 e execute. De quanto foi a variação do gráfico?

3. Se o valor da frequência da nota for 15, o gráfico da função irá variar quantas vezes por segundo?

4. Se a frequência da nota for de 200 Hz, isso quer dizer que a senoide varia:

   (a) 20 vezes por segundo

   (b) 100 vezes por segundo

   (c) 150 vezes por segundo

   (d) 200 vezes por segundo

   (e) 2000 vezes por segundo

5. Qual a relação entre a frequência da nota musical (*fn*) e a função *y*?

- Atividade 3

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
% Gerador de notas musicais
fn = 440; % frequência da nota
fa = 44100; % frequência de amostragem
t = 0 : 1/fa : 3;
a = 1; % amplitude;
% amortecimento
k = exp(-t);
y = a * sin(2 * pi * fn * t). * k;
sound(y, fa);
%Gráfico
plot(t, y);
title('Nota x Tempo');
xlabel('tempo s')
ylabel('amplitude')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. Aumentando o valor da amplitude para 2. O que acontece?

2. Aumente o valor da amplitude para 3. O que acontece?

3. E se diminuir o valor da amplitude para 1/2, o que ocorre?

4. O que acontece quando diminuímos o valor de *a* para 1/3?

5. Quando aumentamos o valor da amplitude, o que ocorre?

6. Quando diminuímos o valor da amplitude, o que ocorre?

7. Mude os valores de a e fn para 1 e 5, respectivamente. Qual é a imagem da função?

8. Mude o valor da a para 2. Qual é a imagem da função?

A amplitude (a) representa a intensidade do som, ela caracteriza sua força ou seu volume. Intensidade é definida pela física como a taxa média com que a energia é transportada em uma onda sonora.

- Atividade 4

No editor do Octave, digite os seguintes comandos (depois de cada comando dê Enter):

```
% Gerador de notas musicais
fa = 44100; % frequência de amostragem
a = 1; % amplitude;
t = 0 : 1/fa : 3;
% amortecimento
k = exp(-t);
y1 = a * sin(2 * pi * 110 * t). * k;
y2 = a * sin(2 * pi * 220 * t). * k;
y3 = a * sin(2 * pi * 440 * t). * k;
y4 = a * sin(2 * pi * 880 * t). * k;
y = y1 + y2 + y3 + y4
sound(y1, fa);
sound(y2, fa);
sound(y3, fa);
sound(y4, fa);
sound(y, fa);
%Gráfico
plot(t, y);
title('Nota x Tempo');
xlabel('tempo s')
ylabel('amplitude')
```

Selecione tudo e aperte f9.

1. Na sua opinião, os quatro primeiros sons são agradáveis ou desagradáveis?

2. O último som é agradável ou desagradável?

3. Dê um zoom no gráfico da função e responda:

   (a) A função é periódica?

   (b) O gráfico da função lembra uma senoide?

   (c) Qual a imagem da função aproximadamente?

4. Mude o valor da amplitude para 2, execute e reponda:

    (a) O que acontece com os sons?

    (b) Qual a imagem da função aproximadamente?

    (C) Dê um zoom no gráfico da onda sonora. O formato da onda mudou?

5. Mude o valor da amplitude para 1/2, responda:

    (a) O que acontece com os sons?

    (b) Qual a imagem da função aproximadamente?

    (C) Dê um zoom no gráfico da onda sonora. O formato da onda mudou?

Os sons que ouvimos no dia a dia são compostos por uma soma de senoides. Joseph Fourier, matemático e físico francês, mostrou, em 1822, que qualquer onda sonora pode ser expressa em termos de funções trigonométricas.

3.2.3 Oficina 3: Reproduzir músicas usando o software Cool Edit Pro e analisar as ondas sonoras geradas através do aplicativo Spectrum Analyzer

Os alunos receberão a missão de levar para a terceira oficina, cinco estilos musicais, sendo eles: Rock, Forró, Samba, Sertanejo e MPB. Essas músicas serão reproduzidas no software Cool Edit Pro.

Os alunos irão escutar as músicas e farão uma comparação entre as ondas sonoras das mesmas.

- **Atividade 1**

Coloque uma música de cada estilo que você trouxe para tocar no software Cool Edit Pro. Responda:

1. O que você notou ao observar as cinco ondas sonoras?

2. Há diferença entre as ondas sonoras produzidas por um Rock e por um MPB?

3. Qual onda sonora tem maior amplitude?

4. Dê um zoom no gráfico da onda sonora da música sertaneja que aparece na tela do Cool Edit Pro. O formato da onda lembra o gráfico de alguma função? Se sim, qual?

5. Qual a diferença entre as ondas sonoras produzidas por um forró e por um samba?

6. Das músicas que você baixou, qual é a mais calma? E a mais agitada?

Será pedido aos alunos para baixar o aplicativo Spectrum Analyzer (Analisador de Espectro), disponível na Play Store para Android.

Este aplicativo é um analisador de espectro de áudio para Android. Com ele, os alunos poderão ver a visualização da onda sonora de uma música, da sua voz ou qualquer ruído. Além disso, ele exibe a frequência do sinal mais alto, podendo ser usado para testar instrumentos, verificar a frequência e até sintonizar um violão, piano ou outro instrumento qualquer.

- **Atividade 2**

Baixe no seu celular o aplicativo Spectrum Analyzer disponível no Play Store.

1. O que acontece no Analisador de Espectro quando:

   (a) Estamos em silêncio.

   (b) Estamos conversando.

   (c) Assoviamos.

   (d) Estamos cantando.

2. Coloque uma música para tocar no Cool Edit Pro. O que acontece no aplicativo Spectrum Analyzer quando:

   (a) Aumentamos o volume.

   (b) Baixamos o volume.

   (c) Damos pausa.

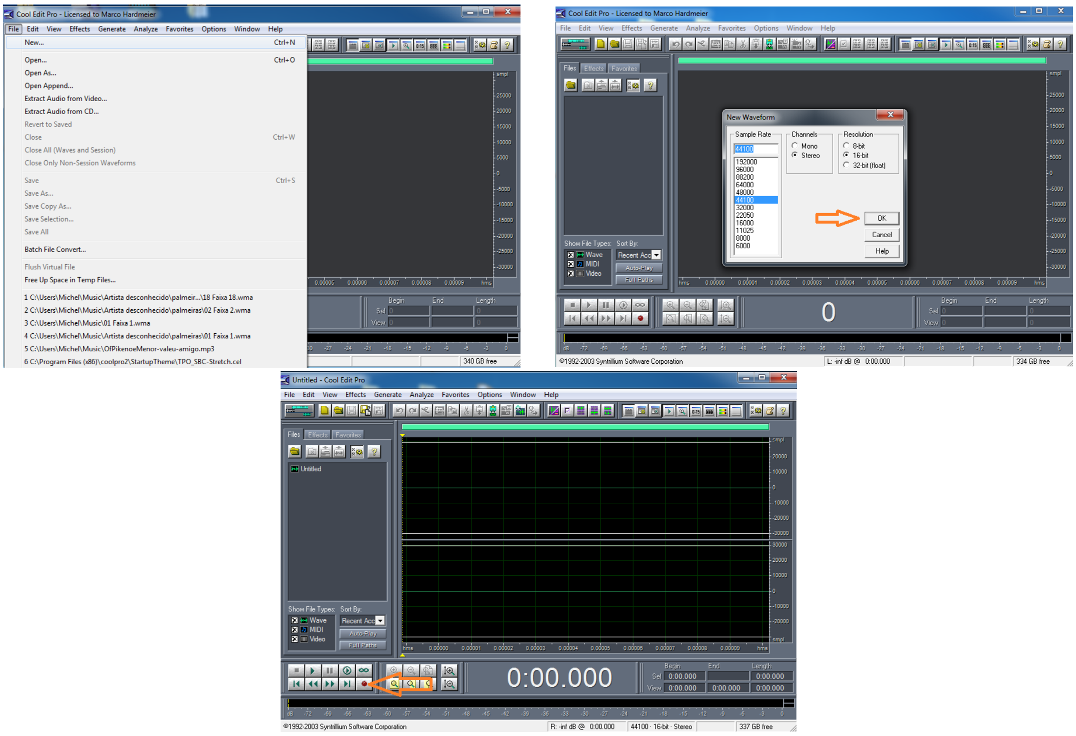
3. O aplicativo Spectrum Analyzer está captando as ondas sonoras por mais baixo que seja o ruído, assim o seu gráfico está sempre em movimento. Você consegue deixá-lo completamente parado? Justifique.

4. Observando o aplicativo Spectrum Analyzer e ficando no mais absoluto silêncio possível. Qual a menor frequência observada em Hz? E qual a maior frequência?

A frequência é o número de oscilações completas que ocorre em uma unidade de tempo. Sua unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades é chamada Hertz(Hz), que significa ciclos por segundo. Essa unidade foi criada em homenagem ao físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894).

- **Atividade 3**

Grave um áudio no Cool Edit Pro, pode ser uma música ou uma simples conversa, para isso dê um único clique em *File*, na sequência clique em *New*, dê ok na janela que vai aparecer e aperte em *record* (veja a figura).



1. Dê um zoom no gráfico da onda sonora gerada e responda:

   (a) O gráfico parece com uma senoide?

   (b) O gráfico aparenta ser periódico?

2. Compare a onda sonora gerada por você e uma música qualquer, responda:

   (a) As ondas sonoras são iguais?

   (b) Qual a principal diferença entre as ondas sonoras?

As ondas sonoras geradas por qualquer música ou ruído são compostas por uma soma de várias ou infinitas senoides. Isso, foi demonstrado pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) no século XIX, em seu livro “Théorie Analytique de la Chaleur”, que significa Teoria Analítica do Calor.

4 Das experiências e das análises

Neste capítulo, apresentaremos um relatório dos três encontros com os alunos para a realização das atividades.

As oficinas realizaram-se no mês de junho de 2017, totalizando em sua duração de execução seis horas aulas, nas quais obtivemos a participação de alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino, situada na sede do município de Panelas-PE.

O município supracitado dispõe de duas escolas da rede estadual de ensino, uma de tempo integral e outra de ensino regular. A Escola de Referência em Ensino Médio de Panelas (EREM) atua em horário integral e atende a maior parte dos estudantes deste município, enquanto a Escola Estadual Gregório Bezerra funciona nos turnos vespertino e noturno, a mesma contempla a pluralidade dos estudantes que exercem algum tipo de atividade remunerada em um dos turnos diários ou que são considerados fora da faixa etária.

Situada em um município com Índice de Desenvolvimento Humano MUNICIPAL (IDHM) baixo, medindo apenas 0,569 segundo o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud), a escola tem uma infraestrutura modesta e atende a 850 alunos dos quais cerca de 50% são da zona rural.

Figura 31 – Frente da Escola

Antes de iniciarmos as oficinas começamos com uma dificuldade operacional para instalar os softwares nos computadores do laboratório de informática da escola, o espaço do mesmo conta com dezoito computadores e nove tablets fornecidos por um programa do Governo do Estado. Na primeira tentativa deparamo-nos com computadores em estado de abandono e em condições inúteis de funcionamento, os tablets funcionavam, entretanto não foi possível instalar o Octave em nenhuma unidade, visto que para a instalação de qualquer programa é necessário uma senha do administrador, procuramos o gestor da escola e solicitamos o código ao mesmo, que nos forneceu. Mesmo com o código não foi possível instalar o programa, mas uma vez recorremos ao gestor que entrou em contato com a GRE Agreste Centro Norte-Caruaru, novamente não obtivemos sucesso na tentativa. Então, instalamos o Octave em três notebooks próprios para a prática.

4.1 Oficina 1

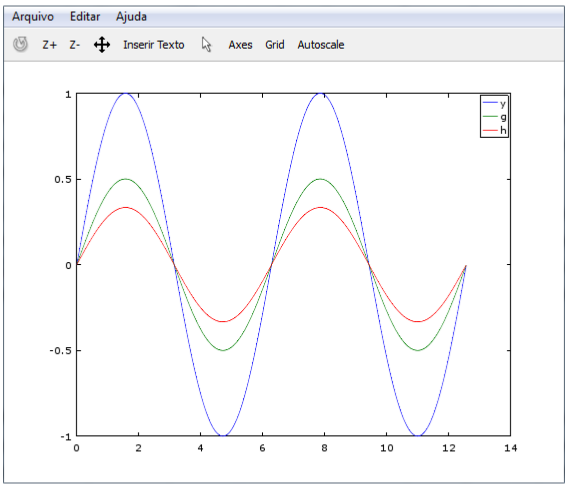
A prática iniciou-se no dia 09 de junho de 2017, com a duração de duas horas aulas, com a presença de nove alunos. Neste dia, o laboratório de informática estava bem bagunçado, a sensação era de um lugar completamente abandonado que só servia de depósito, então organizamos o local antes de iniciar os trabalhos. No primeiro momento, apresentei aos alunos meus objetivos, a forma de trabalho que pretendia exercer e apliquei o questionário de sondagem.

Inicialmente, apresentamos o programa Octave mostrando como ele funciona e que é possível encontrá-lo no site: *https://www.gnu.org/software/octave/*. Grande parcela dos alunos envolvidos demonstrou interesse em saber "o que é que ia acontecer" a partir dali. Fiz uma rápida introdução às funções trigonométricas, dando destaque para o período e a imagem das funções.

Acontecido, pois, o primeiro momento, partiu-se logo para os direcionamentos acerca do que iria ser proposto, foi pedido aos alunos que se reunissem em trios, mas cada um com a sua atividade, para que, juntos, discutissem e respondessem às questões previamente elaboradas.

Os alunos receberam as atividades da Oficina 1 impressa com o roteiro contendo as informações para a realização das cinco tarefas. Os alunos começaram a digitar as funções no Octave e, consequentemente, visualizaram os respectivos gráficos, realizaram a Atividade 1 sem problemas, verificou-se as respostas e concluiu-se que as mesmas estão 100% corretas.

Na Atividade 2, o primeiro comando era para mudar os valores dos parâmetros a_1 e a_2 para 1/2 e 1/3 respectivamente, executada esta tarefa, os alunos começaram a completar o quadro da primeira questão e foi neste instante que surgiram as primeiras dúvidas. Essas dúvidas foram geradas porque no gráfico apresentado pelo Octave, os valores visíveis no eixo das ordenadas eram: $-1;\ -0,5;\ 0;\ 0,5$ e 1. Como ilustrado abaixo:



Alguns alunos responderam que o conjunto imagem da função g é dado pelo intervalo $[-0,5; 0,5]$, mas não conseguiram determinar a imagem da função h. Diante da situação fiz uma intervenção mostrando que 0,5 é a representação decimal de 1/2, isto é, o conjunto imagem da função g pode ser representado por [–1/2, 1/2]. Com essa explicação, os alunos conseguiram perceber que a imagem da função h seria dada pelo intervalo [–1/3, 1/3].

1. Complete o quadro abaixo.

Função	Conjunto imagem	período
f	$[-1, 1]$	2π
g	$[-0,5, 0,5]$	2π
h	$[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$	2π

2. Comparando o gráfico das funções g e h com o gráfico da função f, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração? SIM

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função? NÃO

3. Qual o efeito do parâmetro a no gráfico da função f?
   ALTERA A IMAGEM

Durante a resolução da Atividade 3, percebeu-se uma grande dificuldade dos alunos, um dos problemas detectados está relacionado ao fato do Octave não enumerar o eixo das abscissas como múltiplos de π, então, sempre que solicitado fiz intervenções.

Na primeira questão, para completar o quadro com a imagem e o perímetro, três alunos não perceberam que a função g é periódica de período π. Na segunda questão, três discentes responderam equivocadamente que a imagem da função sofria alteração, enquanto três afirmaram erroneamente que não tinha alteração no período. Na terceira questão, meramente três alunos conseguiram perceber que aumentando o valor do parâmetro b não havia alteração na imagem e sim no período da função. Uma das respostas foi a seguinte: "A imagem ficou a mesma, mas o período diminuiu e ficou mais rápido".

2. Comparando o gráfico da função g com o gráfico da função f, responda:

   (a) A imagem da função sofre alguma alteração? NÃO

   (b) Ocorre alguma alteração no período da função? SIM

3. Aumentado o valor do parâmetro b_1 para 4 o que acontece com o período da função g? E com a imagem? A imagem ficou a mesma, mas o periodo diminuiu e ficou mais rápido.

Na quarta questão, os resultados obtidos foram os seguintes: três alunos informaram o período e o conjunto imagem corretamente. Porém, outros três, conseguiram unicamente responder o período. E os demais, responderam somente a imagem. Nas questões 5, 6 e 7, as respostas foram satisfatórias.

Diante da análise da Atividade 3, cujo objetivo principal está voltado para as mudanças que o parâmetro "b" provoca no gráfico das funções trigonométricas, acreditamos que as dificuldades geradas para a resolução das questões seriam menores, se o Octave disponibilizasse uma opção que permitisse mudar a unidade do eixo das abscissas para múltiplos de π.

A Atividade 4 teve como objetivo analisar o comportamento dos gráficos das funções trigonométricas, diante das modificações do valor do parâmetro “c”. Considerando a função original f(x) = sen(x), os alunos precisam identificar, numa função genérica do tipo f(x) = sen(x+c), as alterações no gráfico da função original. Os discentes perceberam isso sem dificuldades, consequentemente responderam corretamente as 6 questões propostas.

Com o objetivo de identificar as mudanças provocadas pelo parâmetro “d” no gráfico das funções trigonométricas, foi proposta a Atividade 5. Dos nove alunos que responderam a atividade, três erraram as questões 1, 2 e 3. No entanto, todos conseguiram responder as questões 4 e 5 corretamente.

4.2 Oficina 2

No dia 13 de junho realizou-se a segunda oficina, diante de dez alunos e com duração de duas horas aulas. A fim de construir um gerador de notas musicais e consequentemente relacionar as funções trigonométricas com música, foram propostas 4 atividades, tendo como objetivo mostrar a influência dos parâmetros nas ondas sonoras.

Foi entregue aos alunos as atividades da Oficina 2 com o roteiro contendo as informações necessárias para a realização de quatro tarefas. Pelo fato de só termos três notebooks com o Octave instalado, os alunos formaram dois trios e um quarteto, juntos puderam discutir e analisar as questões, porém cada aluno com sua atividade.

Inicialmente os discentes digitaram os comandos necessários, no Octave, para a produção das notas musicais. A Atividade 1 foi composta de cinco questões, os alunos responderam todas sem problemas, verificou-se as respostas e concluiu-se que as mesmas estão corretas.

A Atividade 2 teve por objetivo mostrar, através da visualização, que o gráfico das ondas sonoras produzidas são senoides. Dos dez alunos que responderam as cinco proposições interrogativas, meramente um errou a questão 4, cuja a senoide varia 200 vezes por segundo e o estudante assinalou 2000 como resposta.

A Atividade 3 teve como objetivo analisar as mudanças provocadas pelo parâmetro “a” nas notas musicais. Das oito questões propostas aos discentes, averiguou-se que as únicas perguntas onde 100% dos alunos responderam corretamente foram as questões 1 e 6.

Dos dez alunos que participaram da Oficina 2, um não respondeu e um errou a questão 2, cinco erraram as questões 3 e 4, um errou as questões 5 e 7, e por fim três erraram a questão 8.

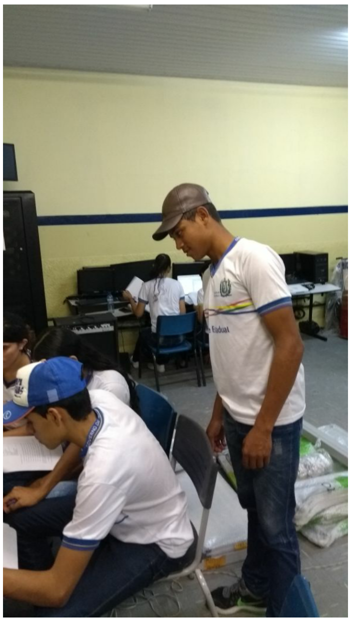
Para resolver as cinco questões presentes na atividade 4, os alunos digitaram no Octave os comandos previamente elaborados. Esses comandos produziram cinco sons, os quatro primeiros são notas musicais e o último é um ruído. Dos dez alunos presentes, todos, sem exceção, classificaram os quatro primeiros sons como agradáveis e o último como desagradável. Vale ressaltar que as questões 1 e 2 pedem a opinião de cada estudante, assim não temos certo nem errado.

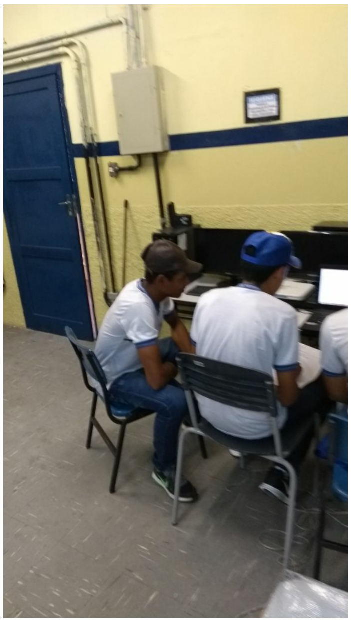
As demais questões foram compostas dos itens (a), (b) e (c). Na terceira questão, todos os alunos responderam ao item (a) com um "sim", ou seja, que a função é periódica. No item (b) quatro alunos afirmaram que o gráfico produzido pelo ruído lembra uma senoide, enquanto seis acham que não. Quatro estudantes responderam ao item (c) erroneamente.

Inicialmente a quarta questão determinou aos alunos que aumentassem o valor da amplitude para 2, já vimos que a amplitude está relacionada com a força, ou seja, ela altera o "volume". Executada está tarefa, partiu-se para os questionamentos de cada item. No item (a), 70% dos educandos afirmaram que o som ficou mais alto, isto é, agudo, no entanto 30% classificaram o som como desagradável. Apenas 30% dos discentes acertaram ao item (b). No item (c), 60% dos alunos acreditam que o formato da onda não muda alterando a amplitude.

Na quinta questão os alunos diminuíram o valor da amplitude para 1/2. Os questionamentos em cada item foram iguais aos da quarta questão. Três alunos erraram o item (a) e um errou o item (b). No item (c), todos os alunos acreditam que o formato da onda sonora não mudou ao se alterar o valor da amplitude.

Aproximando-se o final da Oficina 2, um aluno que não estava fazendo parte das oficinas entrou no laboratório e começou a observar com um olhar um tanto curioso. Sua curiosidade chamou a atenção e fizemos o convite para que ele participasse, mas o mesmo recusou, então insistimos e ele sentou.





4.3 Oficina 3

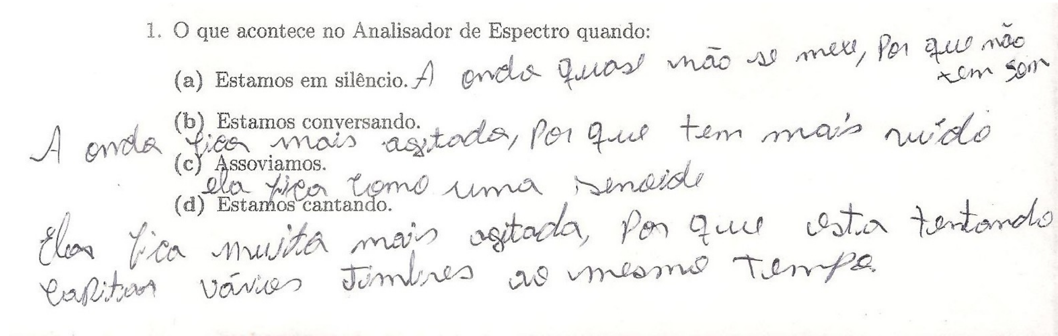
A terceira oficina ocorreu no dia 20 de junho, com duração de duas horas aulas e atuação de nove alunos. Neste dia chegamos na escola no turno vespertino com horário próximo às 13h20min. Neste dia, diferente dos outros em que havia sido realizada as oficinas, o gestor da Escola Estadual Gregório Bezerra se fazia presente propocionando auxílio, através de equipes destinadas a limpeza e organização do laboratório de informática.

De forma análoga as oficinas iniciais foi entregue para cada estudante o roteiro que elaboramos previamente contendo as instruções para a realização de três tarefas. Juntamos duas mesas e colocamos dois notebooks, os alunos sentaram-se em volta das mesas e iniciaram os comandos.

Os alunos receberam a missão de trazer para está oficina cinco estilos musicais distintos, todos executaram a tarefa. Utilizamos o software Cool Edit Pro para reproduzir as músicas, sendo um estilo musical de cada vez.

A Atividade 1 foi composta de seis questões, primeiramente os alunos escutaram as músicas, observaram os gráficos e responderam a primeira questão, classificando as ondas sonoras produzidas como diferentes. A segunda questão foi a seguinte: "Há diferença entre as ondas sonoras produzidas por um rock e por um MPB?". Todos os alunos afirmaram que as ondas sonoras são diferentes. Na terceira questão, os nove discentes estabeleceram o Rock como a onda sonora com maior amplitude. A quarta questão pediu aos alunos que dessem um zoom no gráfico da música sertaneja e perguntou se lembrava alguma função. Os estudantes em sua totalidade responderam que lembrava uma senoide. A quinta questão foi a seguinte: "Qual a diferença entre as ondas sonoras produzidas por um forró e por um samba?". Os educandos alegaram que a amplitude da onda sonora produzida pelo forró é maior que a produzida pelo samba. Na sexta questão, 100% dos alunos afirmaram que a música mais calma é o MPB e a mais agitada é Rock.

Composta de quatro questões a Atividade 2 teve por objetivo analisar as ondas sonoras produzidas por qualquer ruído. Primeiramente foi necessário baixar o aplicativo Spectrum analyzer, para que os alunos pudessem visualizar as ondas sonoras produzidas. A questão 1 foi composta de quatro itens, onde os alunos analisaram as ondas sonoras produzidas pelo aplicativo quando estávamos: em silêncio, conversando, assoviando e cantando. Todos responderam a primeira questão facilmente, veja uma das respostas fornecidas pelos estudantes.



1. O que acontece no Analisador de Espectro quando:

(a) Estamos em silêncio. A onda quase não se mexe, Por que não tem som

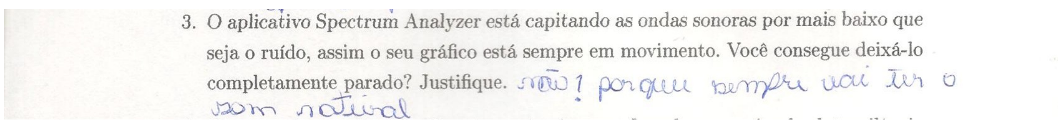
(b) Estamos conversando. A onda fica mais agitada, Por que tem mais ruído

(c) Assoviamos. ela fica como uma senoide

(d) Estamos cantando. Ela fica muita mais agitada, Por que esta tentando capitar vários timbres ao mesmo tempo.

Na questão 2 os alunos colocaram uma música para tocar no software Cool Edit Pro e usaram o analisador de espectro para responderem três itens. Todos os discentes perceberam que: aumentando o volume do notebook a onda produzida no aplicativo Spectrum Analyzer apresenta uma amplitude maior, diminuindo o volume a amplitude será menor e quando damos pausa a onda sonora volta ao estado inicial.

A questão 3 foi a seguinte: “O aplicativo Spectrum Analyzer está capitando as ondas sonoras por mais baixo que seja o ruído, assim o seu gráfico está sempre em movimento. Você consegue deixá-lo completamente parado? Justifique.”. 100% dos alunos responderam a essa questão com um não. Uma das justificativas que obtemos foi a seguinte: “não, porque sempre vai ter o som natural”.



3. O aplicativo Spectrum Analyzer está capitando as ondas sonoras por mais baixo que seja o ruído, assim o seu gráfico está sempre em movimento. Você consegue deixá-lo completamente parado? Justifique. não! porque sempre vai ter o som natural

A questão 4 foi a seguinte: “Observando o aplicativo Spectrum Analyzer e ficando no mais absoluto silêncio possível. Qual a menor frequência observada em Hz? E qual a maior frequência?”. Das várias respostas fornecidas pelos alunos, a menor frequência observada foi 140 Hz e a maior 501 Hz.

Para a resolução da atividade 3, os alunos gravaram duas músicas no software Cool Edit Pro. Esse programa mostra a onda sonora produzida pelos sons que são gravados.

A questão 1 foi composta de dois itens, os alunos deram um zoom na onda sonora gerada por eles e todos afirmaram no item (a) que a mesma aparenta uma senoide, no item (b) 100% dos discentes acreditam que o gráfico gerado é periódico.

A questão 2 também foi composta dos itens (a) e (b), no item (a) os alunos compararam a onda sonora que produziram com uma das músicas que trouxeram e concluíram que as mesma são distintas, no item (b) obtemos respostas distintas para justificar a diferença apresentada pelas ondas sonoras, algumas das justificativas dadas pelos alunos foram: a amplitude, os tons e o volume.

4.4 Questionário de Sondagem

O Questionário de Sondagem foi aplicado em dois momentos. Ocorrendo a primeira aplicação antes da realização da Oficina 1, contando com a participação de nove alunos (cinco meninas e quatro meninos). A segunda aplicação ocorreu ao término da Oficina 3, novamente contamos com a colaboração de nove alunos (4 meninas e 5 meninos), dos quais oito responderam ao questionário nos dois momentos.

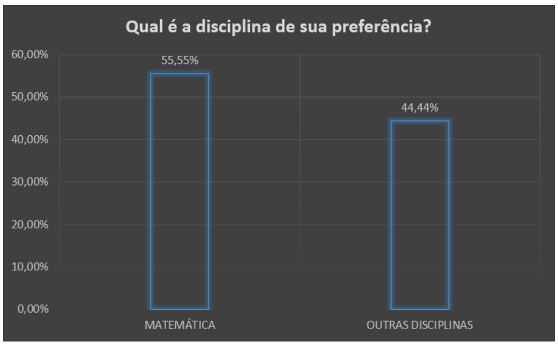
A primeira questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: “Qual é a disciplina de sua preferência?”. De vasta amplitude, esta questão serviu para abrir o leque de entendimentos acerca do público com que se estava a lidar a partir de então.

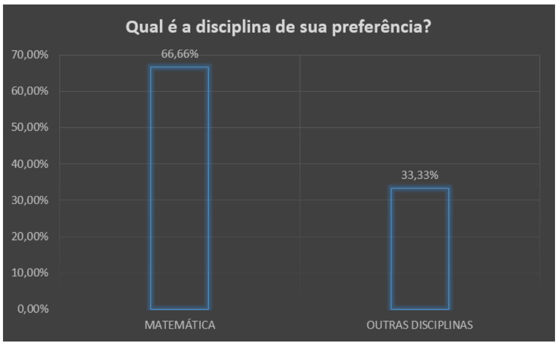
Dos nove alunos que responderam ao Questionário de Sondagem no primeiro momento, sete informaram com precisão a sua disciplina de preferência: três responderam que a sua disciplina preferida é matemática, dois biologia, um português e um geografia, os outros dois responderam que gostam de várias disciplinas, um deles citou que gosta de: história, matemática, educação física e inglês, enquanto o outro prefere: matemática, física, química e português. Observe que, das disciplinas citadas por eles, matemática figura nas duas listas.

Em termos percentuais, pode-se fazer o registro da seguinte maneira: 55,55% dos discentes afirmaram que matemática é a disciplina de sua preferência ou está entre elas, enquanto 44,44% preferem outra disciplina.

Já no segundo momento, dos nove discentes, seis informaram uma única disciplina preferida: três responderam que a sua disciplina preferida é matemática, um biologia, um filosofia e um geografia, os outros três responderam que gostam de várias disciplinas, um deles citou que gosta de: história, matemática, educação física e inglês, outro prefere: matemática, física, química e português, enquanto o último prefere: matemática, química e física.

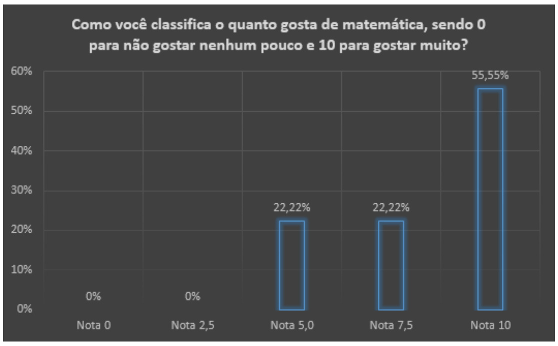
Em termos percentuais, temos: 66,66% dos discentes afirmaram que matemática é a disciplina de sua preferência ou está entre elas, enquanto 33,33% preferem outra disciplina.

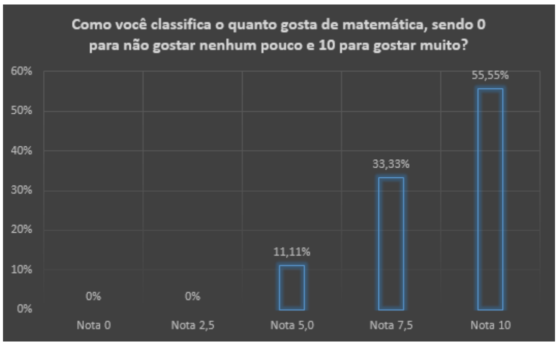




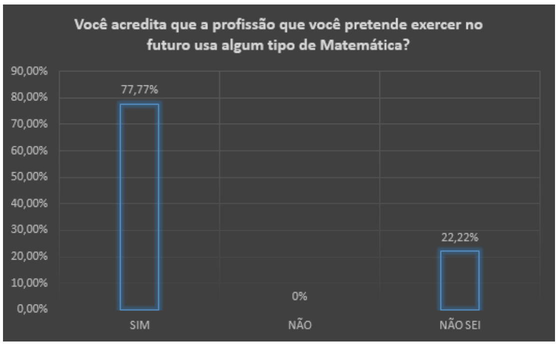
A segunda questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: “Como você classifica o quanto gosta de matemática, sendo 0 para não gostar nenhum pouco e 10 para gostar muito?”. Foram colocadas cinco (5) opções para a resposta, entre elas “0”; “2,5”; “5,0”;

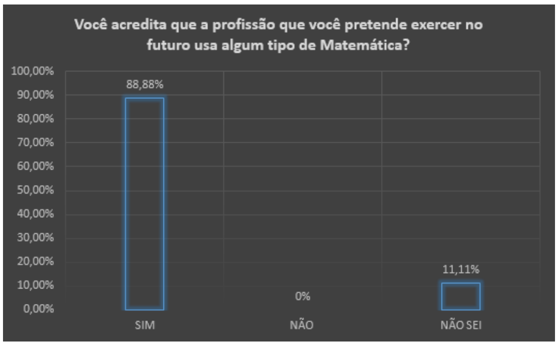
"7,5" e "10". Os gráficos a seguir mostram os resultados da primeira e da segunda aplicação respectivamente:





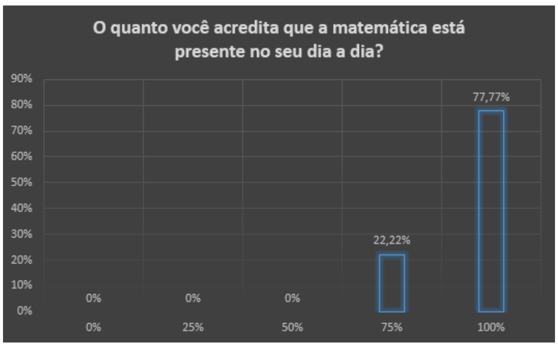
A terceira questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: "Você acredita que a profissão que você pretende exercer no futuro usa algum tipo de Matemática?". Foram colocadas três (3) opções para a resposta, entre elas "SIM", "NÃO" e "NÃO SEI". Os resultados foram os seguintes:

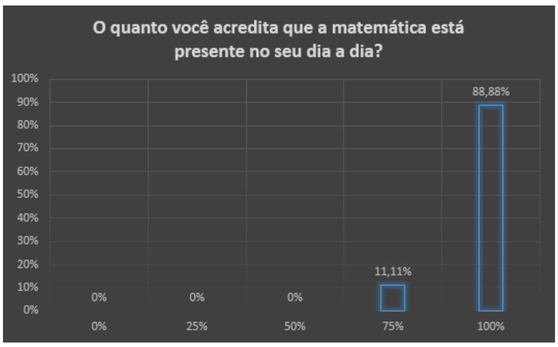




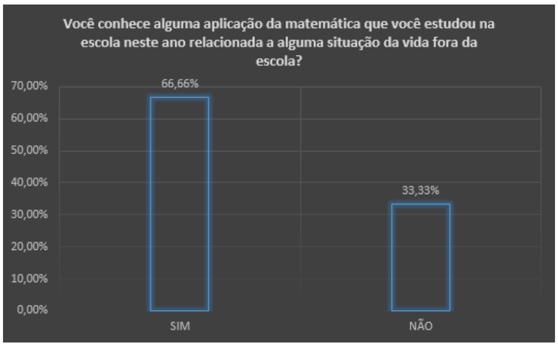
Analisando os resultados, impressiona o fato de alguns alunos não compreender que usarão matemática na profissão que pretendem ou irão exercer.

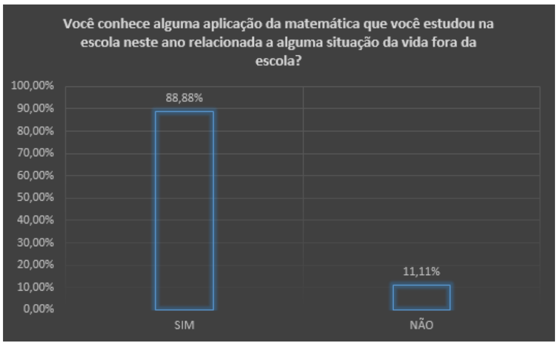
A quarta questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: "O quanto você acredita que a matemática está presente no seu dia a dia?". Foram colocadas cinco (5) opções para a resposta, entre elas "0%", "25%", "50%", "75%" e, por fim, a opção "100%". Veja os resultados:





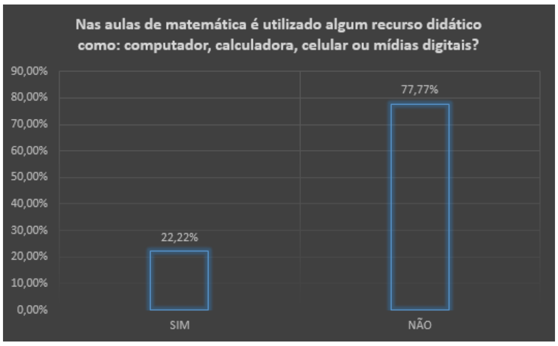
A quinta questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: "Você conhece alguma aplicação da matemática que você estudou na escola neste ano relacionada a alguma situação da vida fora da escola?". Os discentes envolvidos na pesquisa puderam optar entre "SIM" e "NÃO". Observe os resultados:

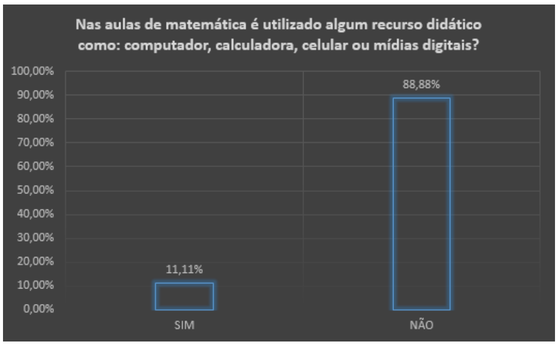




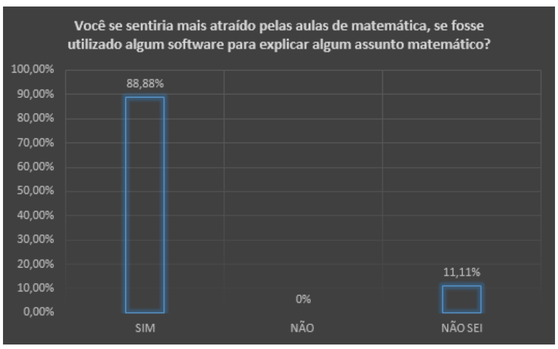
Após a realização das oficinas, o resultado teve uma pequena alteração. Acreditamos que a mudança apresentada foi provocada devido a *função seno* estar entre os conteúdos planejados para o segundo bimestre na Escola Estadual Gregório Bezerra.

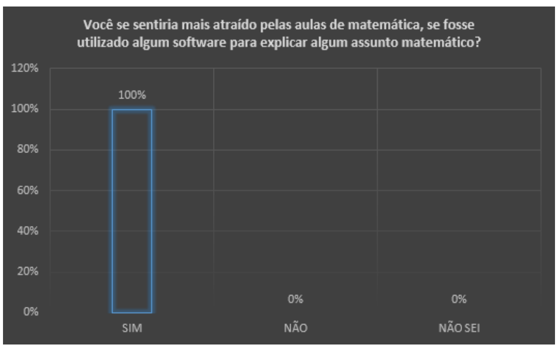
A sexta questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: "Nas aulas de matemática é utilizado algum recurso didático como: computador, calculadora, celular ou mídias digitais?". Os discentes puderam optar entre "SIM" e "NÃO". Veja os resultados:





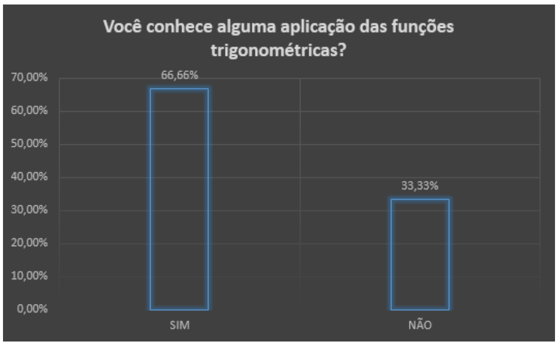
A sétima questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: "Você se sentiria mais atraído pelas aulas de matemática, se fosse utilizado algum software para explicar algum assunto matemático?". Foram colocadas três (3) opções para a resposta, entre elas "SIM", "NÃO" e "NÃO SEI". Observe a mudança de opinião após a realização das oficinas:

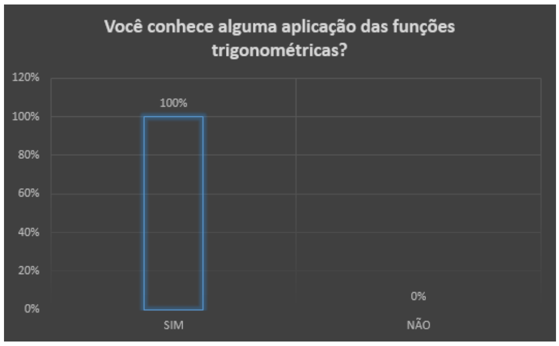




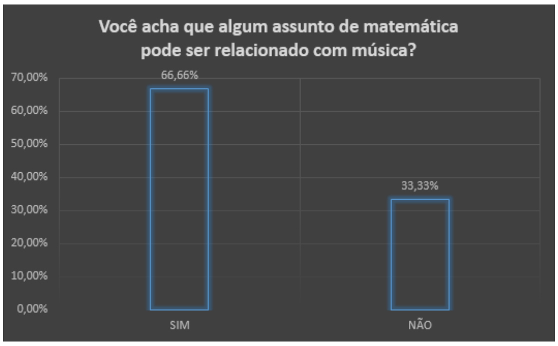
Acreditamos que a utilização do Octave foi um diferencial nas oficinas, aparentemente uma motivação!

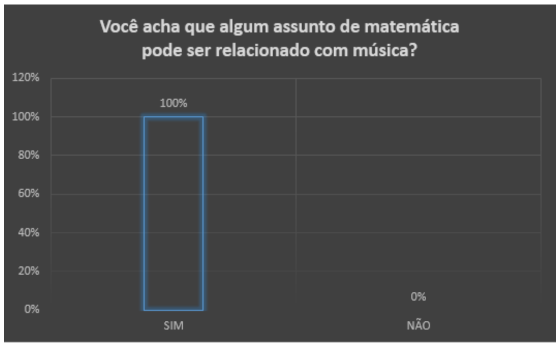
A oitava questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: “Você conhece alguma aplicação das funções trigonométricas?”. Os discentes puderam optar entre “SIM” e “NÃO”. Note que após a realização das oficinas todos os alunos conheceram uma das aplicações das funções trigonométricas. Assim, conclui-se que as oficinas levaram os mesmos a compreenderem que uma das aplicações das funções trigonométricas está presente na música.





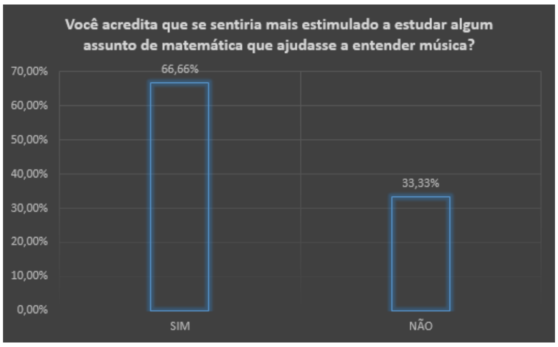
A nona questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: “Você acha que algum assunto de matemática pode ser relacionado com música?”. Foram colocadas como alternativas duas (2) opções: “SIM” e “NÃO”. Veja os resultados:

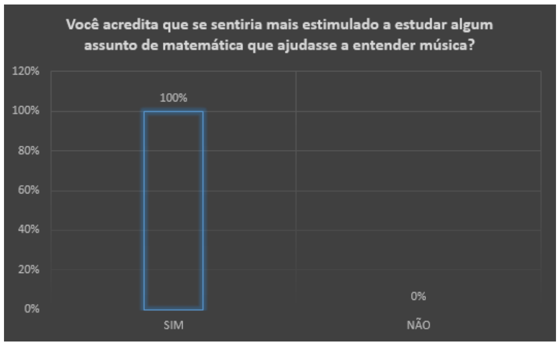




Portanto, as oficinas fizeram com que os alunos compreendessem a matemática como uma parte integrante da música.

A décima questão presente no Questionário de Sondagem foi a seguinte: “Você acredita que se sentiria mais estimulado a estudar algum assunto de matemática que ajudasse a entender música”. Foram colocadas como alternativas duas (2) opções: “SIM” e “NÃO”. Observe os resultados:





Obtemos com a prática das oficinas, uma mudança na opinião dos alunos, que inicialmente pareciam desinteressados a estudar assuntos que ajudassem a entender música.

O Questionário de Sondagem, mostra claramente que depois de realizarmos as oficinas todos os alunos se sentiram estimulados a estudar assuntos matemáticos que se relacionassem com música e atraídos pelas aulas de matemática nos quais se utiliza softwares.

4.5 Considerações Finais

O desejo inicial desta pesquisa era tecer possibilidades para trabalhar as funções trigonométricas de maneira peculiar, instigando nos alunos maior interesse e identificação com a matemática. Acreditamos que por fazer parte do cotidiano dos estudantes, a música através da sua beleza, harmonia e inigualável capacidade de despertar emoções, favorece e contribui na construção de uma aprendizagem significativa da matemática, proporcionando um ambiente de interação entre os objetos de estudo e os alunos.

Diante de uma geração que cotidianamente encontra-se submergida no universo tecnológico são muitas as tentativas de incorporar tais tecnologias na prática pedagógica, todavia existem inúmeros obstáculos a serem enfrentados pelas escolas, professores e alunos. Embora existam empecilhos há consciência de que estes obstáculos podem ser vencidos, já dizia um trecho da música *mais uma vez* de Renato Russo e Flávio Venturini "quem acredita sempre alcança", apesar das dificuldades é necessário persistir, planejar e replanejar em busca de aulas atrativas, que façam a diferença na vida dos alunos e na maneira como eles "veem" a matemática.

As atividades elaboradas para serem resolvidas individualmente, ocorreram em grupos, devido às dificuldades operacionais encontradas na hora da instalação dos softwares, porém a impressão transparecida ao final de cada oficina era de alunos empolgados, questionando e discutindo cordialmente as soluções encontradas. A participação ativa dos estudantes durante a realização das oficinas é uma amostra que é possível despertar nos nossos alunos o interesse pela matemática.

Analisando o questionário de sondagem no segundo momento, concluímos que as oficinas surtiram efeitos significativos na opinião dos alunos, que em sua totalidade passaram a conhecer a música como uma das diversas aplicações das funções trigonométricas. A utilização de softwares nas aulas de matemática é um atrativo adicional para os alunos, deixando evidente a relevância em se buscar meios variados, partindo dos professores, para que os alunos consigam êxito no processo de construção da aprendizagem e os mesmos realizem com sucesso a prática docente.

Salienta-se que o ensino das funções trigonométricas a partir do uso de softwares não é a receita única para amenizar o déficit de aprendizagem dos estudantes do ensino médio, e menos ainda se configura como a solução definitiva para tal, todavia o trabalho das funções trigonométrica através do Octave demonstrou que pode representar uma oportunidade singular no conjunto das práticas pedagógicas no ambiente escolar.

Portanto, temos como objetivo que este nosso trabalho sirva de base para que o professor do Ensino Médio tenha subsídios para mostrar aos alunos aplicações das funções trigonométricas.

Referências Bibliográficas

[1] BENSON, Dave. **Music: A Mathematical Offering**. Cambridge University, 2006.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN. Matemática)**. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

[3] CAPUTI, Armando.; MIRANDA, Daniel. **Bases Matemáticas**. Versão 12. Santo Amdré-SP, Universidade Federal do ABC, 2015.

[4] DANTE, L. R. **Matemática**. versão 10, 3ª edição, São Paulo, Moderna, 2009.

[5] KAMMLER, David W. **A First Course in Fourier Analysis**. Presntice Hall, NJ, 2000.

[6] MARTINI, Gloria. **Conexões com a Física**. Volume 2, 2ª edição, São Paulo, Moderna, 2013.

[7] PEREIRA, K.**Oficina de Matemática Experimental: Entrando Numa Fria**. Dissertação de mestrado do PROFMAT, UESC, 2017, p.16.

[8] ROUSSEAU,Christiane.; SAINT-AUBIN, Yvan. **Matemática e Atualidade**. Volume 2. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[9] SANTOS, Fabiano J. **Introdução as Séries de Fourier**. PUC Minas, julho de 2004. Disponível online em: http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf. Acesso em 12 de outubro de 2017.

[10] SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. **Matemática ensino médio** Volume 2. 6ª edição, São Paulo, Saraiva, 2010.

[11] SOUZA, Fernando L. **Introdução ao Octave**. Disponível online em: https://ecivilufes.files.wordpress.com/2011/03/octave-apostila-isaac-santos.pdf. Acesso em 12 de outubro de 2017.

[12] TEXEIRA, Cássia Barbosa. **Tutorial GNU Octave/Matlab**. Disponível online em: http://www.ime.unicamp.br/ marcio/tut2005/octave/042565Cassia.pdf. Acesso em 17 de outubro de 2017.

[13] WRIGHT, David. **Mathematics and Music**. American Mathematical Society, 2009.

Apêndice

1. Qual é a disciplina de sua preferência?

2. Como você classificaria o quanto você gosta de Matemática, sendo 0 para não gostar nenhum pouco e 10 para gostar muito?
   a) 0 b) 2,5 c) 5,0 d) 7,5 e) 10

3. Você acredita que a profissão que você pretende exercer no futuro usa algum tipo de Matemática?
   a) SIM( ) b) NÃO( ) c) NÃO SEI( )

4. O quanto você acredita que a matemática está presente no seu dia a dia?
   a) 0% b) 25% c) 50% d) 75% e) 100%

5. Você conhece alguma aplicação da matemática que você estudou na escola neste ano relacionada a alguma situação da vida fora da escola?
   a) SIM ( ) b) NÃO( )

6. Nas aulas de matemática é utilizado algum recurso didático como: computador, calculadora, celular ou mídias digitais?
   a) SIM( ) b) NÃO( )

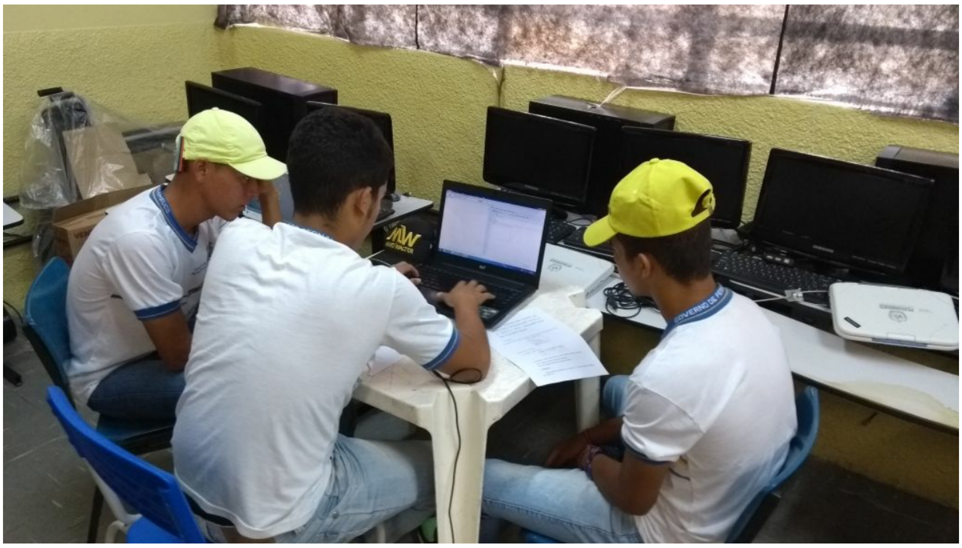
7. Você se sentiria mais atraído pelas aulas de matemática se fosse utilizado algum software para explicar algum assunto matemático?
   a) SIM( ) b) NÃO( ) c) NÃO SEI( )

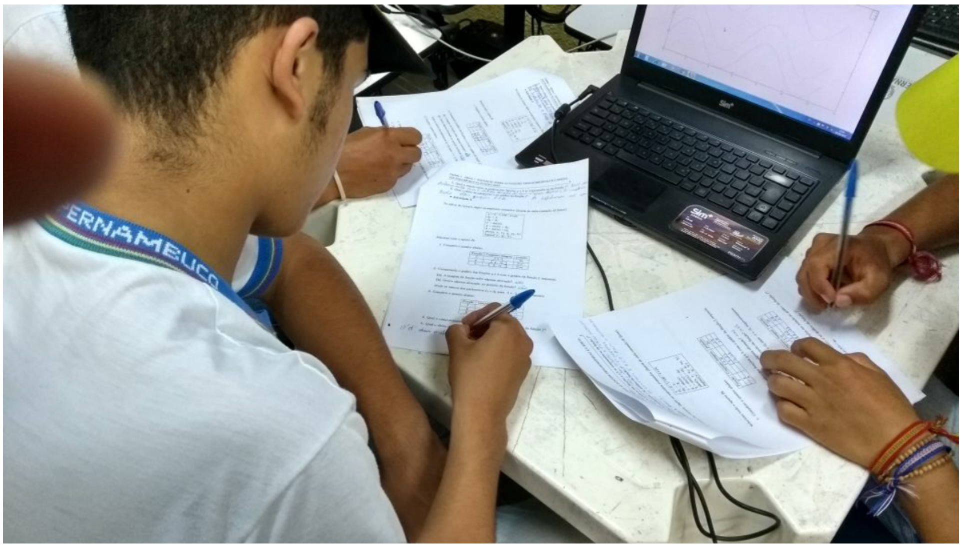
8. Você conhece alguma aplicação das funções trigonométricas?
   a) SIM( ) b) NÃO( )

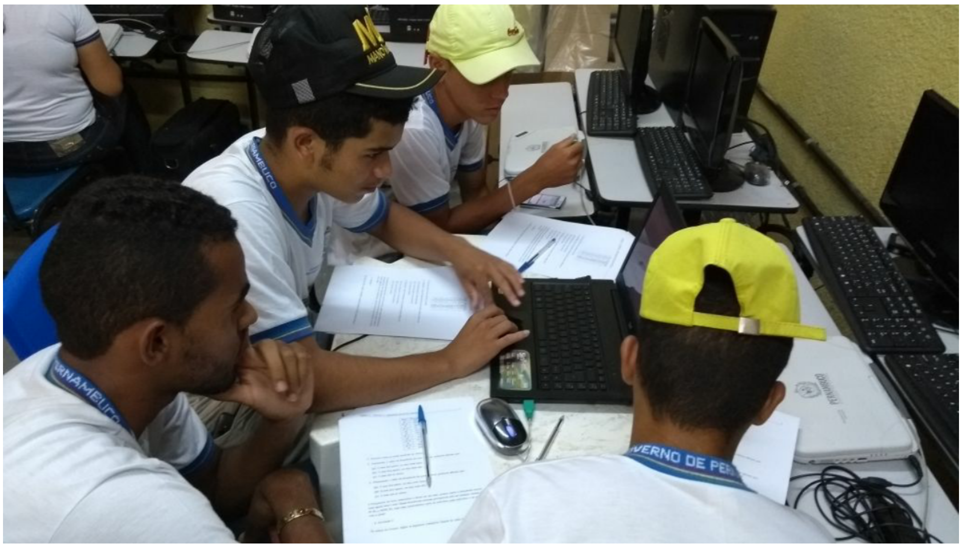
9. Você acha que algum assunto de matemática pode ser relacionado com música?
   a) SIM( ) b) NÃO( )

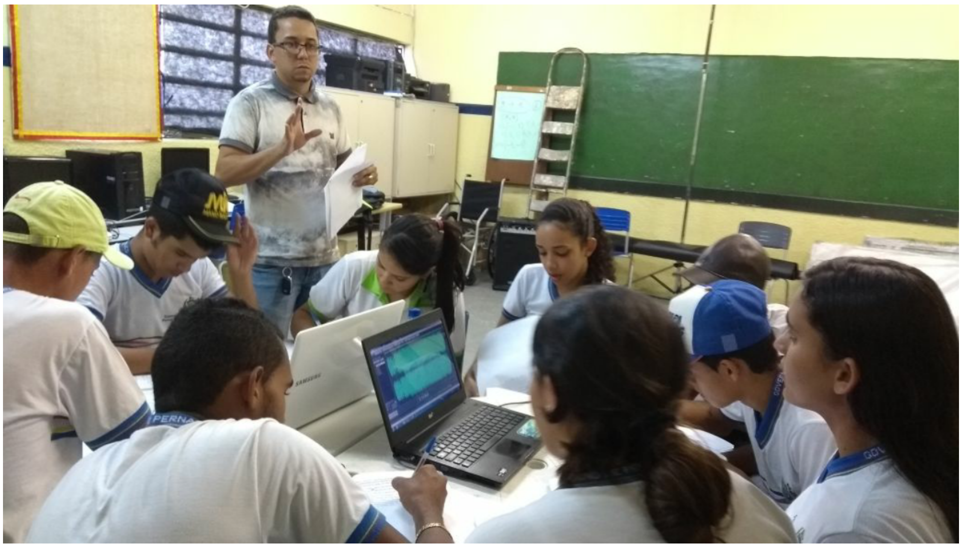
10. Você acredita que se sentiria mais estimulado a estudar algum assunto de matemática que ajudasse a entender música?
    a) SIM( ) b) NÃO( )

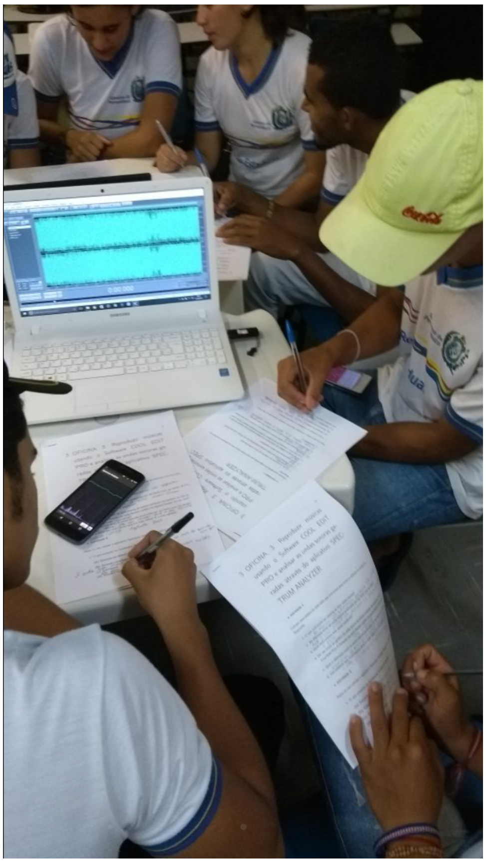
Anexos












Rede Estadual


Rede Estadual