



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Eudes José Gondim de Figueredo**

**Uma Análise sobre a Valorização do Conceito de Máximo e Mínimo por  
Estudantes do Ensino Médio.**

RECIFE  
2017





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Eudes José Gondim de Figueredo**

**Uma Análise sobre a Valorização do Conceito de Máximo e Mínimo por  
Estudantes do Ensino Médio.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento

RECIFE  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

F475a    Figueredo, Eudes José Gondim de  
          Uma análise sobre a valorização do conceito de máximo e  
          mínimo por estudantes do ensino médio / Eudes José Gondim de  
          Figueredo. – 2017.  
          91 f.: il.

          Orientador(a): Ross Alves do Nascimento.  
          Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de  
          Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em  
          Matemática, Recife, BR-PE, 2017.

          Inclui referências.

          1. Problemas de otimização 2. Metodologias para máximos e  
          mínimos 3. Sequência de atividades I. Nascimento, Ross Alves do,  
          orient. II. Título

CDD 510

EUDES JOSÉ GONDIM DE FIGUEREDO

**Uma análise sobre a valorização do Conceito de Máximo e Mínimo por Estudantes do Ensino Médio.**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 27 / 07 / 2017

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento** (Orientador(a)) – UFRPE

---

**Prof. Dr. Glauco Reinaldo Ferreira de Oliveira** – IFPE campus Pesqueira

---

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva** – PROFMAT/UFRPE



*Dedico este trabalho à minha família, em especial, à minha filha Maria Gabriele*





# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde, paz, sabedoria, família, trabalho, amigos e a oportunidade de conviver com pessoas essenciais na minha vida que influenciaram no meu modo de ser.

À minha família, mãe, esposa e filha pelos ensinamentos, confiança, compreensão e carinho em todos os momentos que foram fundamentais na formação do meu caráter e incentivo na busca de novos conhecimentos.

Aos amigos da turma PROFMAT 2015.1 que tive oportunidade de conviver durante dois anos de curso, onde nossa união foi fundamental na aprovação de todas as disciplinas.

A todos os professores do PROFMAT que lecionaram na turma 2015.1, pela compreensão, profissionalismo e ensinamentos essenciais que jamais esquecerei.

Aos professores Leda Braga e Paulo Fernando pelo apoio e incentivo.

Ao Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento pela compreensão, paciência, sugestões e orientações nesse trabalho final de conclusão de curso que enriqueceram de forma significativa para minha melhoria em ensino de matemática.



“Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção. Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino”

Paulo Freire



# Resumo

O presente trabalho é um estudo que busca enriquecer as abordagens do Ensino de Matemática, especificamente no tópico que envolve o conceito de Máximo e Mínimo vivenciado no Ensino Médio. Esse conceito é geralmente abordado em problemas de otimização sugerido nos livros didáticos através de exercícios contextualizados, que buscam propor aos estudantes habilidades para identificar e valorizar tais conceitos no dia a dia. O conceito de máximo e mínimo está presente em nossas vidas em diversas situações, por exemplo: identificar o fluxo de veículos em uma determinada hora de um sinal de trânsito, na fabricação de uma embalagem de um produto em que o fabricante quer propor um custo mínimo de gasto para essa embalagem, entre outras situações. No sentido de compreender que valorização os estudantes demonstram para esse conceito, propomos uma investigação por meio de uma sequência de quatro atividades em que exploramos diferentes metodologias através de utilização de lápis e papel, uso de software, manipulação de material, nos quais os estudantes efetuariam a resolução de exercícios para estimular o processo de identificação e valorização desses conceitos. Os resultados do estudo apontam que o professor não vivencia de forma efetiva às várias formas de abordagens desse conteúdo na escola; explorar mais de uma forma de abordagem possibilita identificar as possíveis dificuldades que ocorrem na valorização do conceito; os estudantes apesar de inferir, comparar e explorar esses conceitos de forma mais significativa não percebem o valor que deve ser atribuído ao conteúdo; a compreensão de máximo e mínimo é de grande complexidade aos estudantes e que o professor não percebe o tamanho dessa complexidade. Nesse sentido, outro ponto relevante é o desenvolvimento de três importantes aspectos que não nos aventuramos investigar, e que podem levar a novos estudos, por exemplo, como se observa o trabalho do professor quanto ao uso de várias metodologias empregadas para tratar esse conteúdo na sala de aula; que importância o professor dá a esse saber matemático bastante presente no nosso cotidiano; e como os estudantes classificam esse conceito, como um saber do cotidiano ou puramente matemático?

**Palavras-chave:** Problemas de Otimização, Metodologias para Máximos e Mínimos, Sequência de Atividades.



# Abstract

The present work is a study that seeks to enrich the approaches of Mathematics Teaching, specifically on the topic, that involves the concepts of Maximum and Minimum experienced in the High School. This concept is normally approached in optimization problems suggested in didactic books through of contextualized exercises, which propose students' abilities to identify and valorize such concepts on a daily basis. The concept of maximum and minimum are present in our life in various situations, for example, identify the vehicle flow in certain time at the traffic signal, manufacturing of a product packing where the manufacturer wants to propose a minimum of spending for this packaging, among other situation. In the sense of understand what valorization students show to this concept, we propose a research through a sequence of four activities where we will explore different methodologies Through the use of pencil end paper, use of software, manipulation material, in which students would solve the exercises to encourage the process of identification and valorization of these concepts. The study's results point that the teacher do not effectively experience the various ways of approach from this subject in the school; explore more than one way of this approach enable to identify the possible difficulties that happens in the contet valuing; the students despite inferring, compare and explore these concepts in a more significant way, do not realize the value that must be attributed to the concepts, the comprehension of maximum and minimum are very complex to students and the teacher do not notice the size of this complex. In this sense, other relevant point is develop of three other aspects that we will not adventure investigate, and that can lead to new studies, for example, how observe teacher's work as the practice of various methodologies used for attend this subject in the schoolroom; what importance does the teacher give to this mathematical knowledge present in our daily life; and how do students classify this concept, as an everyday or purely mathematical knowledge?

**Keywords:** Optimization Problems, Maximum and Minimum Methodology, Activities Sequence.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Tela principal do GeoGebra . . . . .	35
Figura 2 – Construção de um triângulo inscrito em uma circunferência para apresentação do Circuncentro . . . . .	35
Figura 3 – Gráfico, equação, tabela e simulação da trajetória do movimento de uma bola.	36
Figura 4 – Evolução e Participação do Setor atacadista . . . . .	39
Figura 5 – Losango didático. . . . .	41
Figura 6 – trajetória da bola. . . . .	44
Figura 7 – Caixa retangular sem tampa. . . . .	48
Figura 8 – Somatório triangular . . . . .	50
Figura 9 – triângulos de seis casas com somas (9, 10, 11 e 12) . . . . .	50
Figura 10 – Representação do somatório triangular para montar o sistema de solução. . .	52
Figura 11 – Indicativo de solução a partir dos vértices que possibilitam soma mínima . .	55
Figura 12 – triângulo com vértices composto de números ímpares. . . . .	55
Figura 13 – triângulo com vértices composto de números pares. . . . .	56
Figura 14 – triângulo com vértices indicando os valores que possibilitam soma máxima.	56
Figura 15 – Representando a situação do problema . . . . .	64
Figura 16 – Gráfico representando as velocidades de veículos passando em certo cruzamento. . . . .	65
Figura 17 – Visualização da folha A4 cortada nas laterais para montagem da caixa. . . .	66
Figura 18 – Caixa sem tampa já montada a partir de uma folha A4. . . . .	66
Figura 19 – Folha A4 sendo construído quadrados nos cantos de lado 5 cm. . . . .	67
Figura 20 – Folha A4 sendo dobradas nas laterais. . . . .	67
Figura 21 – Folha A4 sendo cortada. . . . .	67
Figura 22 – Folha A4 cortada nas laterais. . . . .	68
Figura 23 – Folha A4 sendo dobrada nas laterais. . . . .	68
Figura 24 – Caixa sem tampa formada por uma folha A4. . . . .	68
Figura 25 – Folha de resposta do aluno A1 analisando os vértices com as somas constantes dos triângulos. . . . .	71
Figura 26 – Folha de resposta do aluno A2 analisando as somas constantes. . . . .	72
Figura 27 – Folha de resposta do aluno A3 analisando algebricamente a soma constante dos triângulos. . . . .	73
Figura 28 – Folha de resposta da duplas C, analisando o problema 1.b . . . . .	75
Figura 29 – Folha de resposta da duplas A, analisando o problema 1.b . . . . .	76
Figura 30 – A dupla D utilizando GeoGebra na resolução do problema 2. . . . .	77
Figura 31 – O grupo C, construindo as caixas do problema 3. . . . .	78

Figura 32 – Visualização da ordenação das caixas para identificação dos volumes, de acordo com a percepção visual dos estudantes. . . . .	79
Figura 33 – Caixas Ordenadas em ordem decrescente dos volumes. . . . .	80
Figura 34 – Esboço do gráfico (Volume $X$ Altura) construído na lousa. . . . .	81

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Somatório dos vértices e dos lados constantes dos triângulos contidos na figura9	51
Tabela 2 – Somatório dos vértices dos triângulos contidos na figura 9. . . . .	51
Tabela 3 – Tabela preenchida com dados fornecidos pelo grupo A com volumes das caixas.	69



# Lista de abreviaturas e siglas

A4	Tamanho de Papel
AV2	Segunda Avaliação
BA	Bahia
EREM	Escola de Referência em Ensino Médio
EBC	Empresa Brasileira de Comunicações
G1	Portal de notícia do Globo
MA12	Matemática Discreta
MDC	Máximo Divisor Comum
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional
SIEPE	Sistema de Informações da Educação de Pernambuco
UCSal	Universidade Católica do Salvador
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
A	Média Aritmética
G	Média Geométrica
H	Média Harmônica
P	Média Ponderada
Q	Média Quadrática
m	Metros
cm	Centímetro



# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\Delta$	Delta
$\%$	Porcentagem
$\neq$	Desigual
$=$	Igualdade
$<$	Menor que
$\leq$	Menor que ou igual a
$\geq$	Maior que ou igual a
$>$	Maior que
$+$	Adição
$-$	Subtração
$\cdot$	Multiplicação
$\in$	Pertence
$\implies$	Implicação
$\iff$	Equivalência
$\sqrt{\quad}$	Radiciação





# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>JUSTIFICATIVA DO ESTUDO</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1	Objetivo Geral . . . . .	29
2.2	Objetivos Específicos . . . . .	29
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	Conhecimento de Máximo e Mínimo em situações cotidianas . . . . .	31
3.2	Os processos metodológicos de ensino de matemática . . . . .	33
3.2.1	O uso de recursos computacionais no ensino de matemática . . . . .	34
3.2.2	A metodologia de resolução de problemas . . . . .	36
3.2.3	A metodologia do tratamento da informação . . . . .	37
3.2.4	A metodologia do uso de jogos e materiais manipulativos . . . . .	39
3.2.5	O uso de sequência didática como processo metodológico . . . . .	40
3.3	Campos da matemática em que geralmente se trabalham Máximo e Mínimo no Ensino Médio. . . . .	43
3.3.1	Campo da álgebra com foco na função quadrática . . . . .	43
3.3.2	Campo da estatística no trabalho com Médias . . . . .	45
3.3.3	Campo da aritmética nas situações-problema relativas a somatórios . . . . .	49
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>59</b>
4.1	Local de aplicação do estudo . . . . .	59
4.2	Os sujeitos da pesquisa . . . . .	59
<b>5</b>	<b>A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES TRABALHADAS COM OS ESTUDANTES</b> . . . . .	<b>61</b>
5.1	Uma breve análise das soluções dos problemas da sequência. . . . .	64
5.2	Análise e discussão dos dados . . . . .	70
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>83</b>



# Introdução

No ensino de matemática, os alunos ao concluir o ensino fundamental II, tiveram algum tipo de contato com situações-problema que retratam o conceito de Máximos e Mínimos. Esse tópico é presente no conjunto dos números naturais, onde consta o estudo de mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC) ou quando se estuda a noção de vértices de uma parábola com relação ao campo das funções quadráticas trabalhadas no 9º ano do Ensino Fundamental.

No Ensino Médio os estudantes voltam a ter novamente contato com esse conteúdo, com os problemas de maximização ou minimização, com cálculos de áreas e perímetros de figuras planas, volumes de sólidos geométricos, entre outros temas associados.

Todos esses casos envolvendo o conceito de maximizar ou minimizar situações de determinados tipos de problemas, podem envolver situações em que na matemática são denominados ‘Problemas de Otimização’, recebendo esse nome pelo fato de que as soluções encontradas são as melhores ou as piores possíveis em cada caso, isto é, resolver problemas de máximo ou mínimo significa encontrar uma solução eficaz para cada situação proposta. Pode-se dizer que os estudos de otimização, segundo Marcolino (2016, p.2) teve início graças às pesquisas de grandes matemáticos como Langrange, Cauchy e Newton. Este último, junto de Leibniz, Euler, Bernoulli, Weierstrass, contribuíram de forma extremamente valiosas para o avanço de métodos e técnicas de otimização.

Com a concepção de que problemas de otimização estão presentes em outras áreas do saber, tais como, na Engenharia, na Economia, na Física, na Biologia, entre outras áreas. Como também em várias atividades do mundo moderno, por exemplo: no comércio, quando se busca obter maiores lucros com o mínimo de gastos, na indústria em casos de otimizar valores, afim de aproveitar melhor algum tipo de material, no esporte ao buscar atingir a altura máxima em um salto com vara, nas análises dos dados da bolsa de valores do comércio mundial, entre outras situações. Apesar dessa cadeia de informações que requisita a utilização e compreensão desse conteúdo no nosso dia a dia, se observa que os alunos do ensino básico ainda apresentam dificuldades em saberes, que são relativos ao tópico em destaque. Um ponto a se observar, pode estar no fato de que apenas um quantitativo mínimo de horas trabalhadas são utilizadas nas aulas e que consideramos insuficiente para os estudos dedicados a esse tema. Pois, os alunos muitas vezes não reconhecem ou têm dificuldade para esse tipo de problema em séries posteriores.

Nota-se também que as atividades dos professores apenas destacam pequenas situações de compreensão do que seja o conceito de otimização, sem discutir o valor desse conceito ou dar uma compreensão aprofundada para casos mais complexos tão necessários aos estudantes, fazendo com que os mesmos tenham dificuldades para identificar ou resolver os problemas de

otimização que envolve conceitos de máximo ou mínimo.

Sendo assim, nosso propósito nesse estudo de pesquisa foi abordar a seguinte questão: ‘Qual o nível de compreensão e valorização dado pelos alunos do Ensino Médio ao conceito de Máximo e Mínimo em atividades de matemática?’

A investigação desse saber foi tratada a partir de atividades selecionadas no contexto do dia a dia e que envolve esse conceito matemático. Trabalhamos um modelo de “sequência de atividades didáticas”. Método que tem base nos estudos teóricos de Artigue (1996) no campo da engenharia didática. Nossa intenção foi verificar com estudantes do Ensino Médio apenas o entendimento e compreensão que eles dão ao conceito de Máximo e Mínimo.

Na sequência de atividades que exploramos, buscamos desenvolver um procedimento encadeado de passos, com etapas interligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de análise na proposta de ensino desse conteúdo. Dessa forma, nos aventuramos no propósito de vivenciar essa façanha a partir de algumas atividades, que definimos em três etapas:

Na primeira etapa, os estudantes utilizaram lápis e papel, abordando duas situações–problema, uma usando o ‘triângulo somatório de seis casas’ e a outra o ‘problema do cercado’, as duas situações envolveram conceitos de Máximo e Mínimo e colaboraram com o nosso intuito de verificar se os estudantes observariam nessas situações tal saber e a partir do que valorizam tal conceito.

Na segunda etapa, os estudantes trabalharam conhecimentos básicos no uso do software ‘GeoGebra’, que explorou uma situação–problema baseada no conceito de função quadrática, na qual foi solicitado aos estudantes com auxílio desse software, que apresentem uma representação da solução do problema, para que demonstrassem entendimento e valorização a partir da manipulação do conceito de otimização.

Na terceira e última etapa, realizamos um experimento prático na sala de aula, que se configurou por montagens de caixas de papel envolvendo dobraduras e colagens simples, usando folhas de papel do tipo A4. Em tal situação buscamos colocar os estudantes diante de situações em que o conceito de máximo e mínimo fosse proporcionado a partir do volume obtido da construção das caixas a partir da folha A4.

Essa variedade de problemas e modos de trabalho didático que propomos para a investigação se justifica na discussão de Magarinus (2013, p.13), quando afirma que: “O uso de atividades interdisciplinares com abordagem metodológicas diferenciadas e a utilização de recursos didáticos variados, podem possibilitar uma maior significação dos conceitos estudados e, conseqüentemente, sua efetiva aprendizagem”. Nessa perspectiva, as situações-problema que foram trabalhadas nessa proposta de atividades foram desafiadoras e significativas para estudantes, no sentido que estabeleceram uma referência quanto à valorização do conceito de máximo e mínimo.

# 1 Justificativa do estudo

Os problemas de máximos e mínimos estão presentes em diversas situações do nosso dia a dia, na matemática e nas principais áreas do conhecimento científico, e mesmo assim percebe-se que na escola do ensino básico os problemas trabalhados com esse conceito, são praticamente inexistentes ou com pouca abordagem do referido sentido. Visto que o professor segue as instruções da secretaria Estadual de Educação através do SIEPE (Sistema de Informações da Educação de Pernambuco) e o mesmo não contempla o tópico que envolve os conceitos de máximo e mínimo. Ficando a critério do professor dependendo de uma situação pedagógica abordá-lo. Isso caracteriza uma enorme perda de compreensão da importância da aplicação matemática que é tão necessária e que deve ser trabalhada pelo estudante. Portanto, entendemos que esse tema deveria ser melhor explorado nas escolas do ensino básico, através de atividades contextualizadas, que pudessem desenvolver habilidades nos estudantes, no sentido de que os mesmos conseguissem compreender, analisar e solucionar problemas de otimização e que lhes propusessem melhor significado para a sua vida cotidiana. Portanto, nosso problema de pesquisa é discutir a importância e valorização da compreensão do conceito de Máximo e Mínimo no ensino médio.



## 2 Objetivos: Geral e Específicos

### 2.1 Objetivo Geral

A partir da aplicação de uma sequência de atividades, nosso objetivo é Conhecer qual a compreensão e valorização dada pelo estudante do Ensino Médio ao conceito de máximo e mínimo em situações-problema de otimização.

### 2.2 Objetivos Específicos

- Construir uma sequência de atividades que explore o uso de Lápis e Papel, Computação e Material Manipulativo para compreensão do conceito de máximo e mínimo elaborado pelos estudantes do Ensino Médio;
- Analisar como os estudantes do Ensino Médio compreendem e valorizam os conceitos de máximo e mínimo em situações-problema do cotidiano;
- Discutir sobre a necessidade de o professor trabalhar diversas abordagens de ensino para o conceito de máximo e mínimo no Ensino Médio.





## 3 Fundamentação Teórica

Nesse capítulo buscamos valorizar as metodologias de ensino para esse tópico matemático e algumas discussões sobre as dificuldades entre os estudantes do Ensino Médio.

### 3.1 Conhecimento de Máximo e Mínimo em situações cotidianas

A matemática está presente na vida cotidiana das pessoas de maneira direta ou indireta. Em quase todos os momentos do cotidiano, as pessoas exercitam algum conhecimento matemático. Mesmo sendo utilizada praticamente em todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil mostrar aos estudantes, aplicações que despertem seu interesse ou que possam motivá-los através de problemas contextualizados.

Nesse sentido Magarinus, (2013; apud PCNEM Brasil, 2000; p.21), destaca que:

Durante o Ensino Médio, etapa final da educação básica, a matemática deve contribuir para a construção de uma visão de mundo, onde os estudantes tenham condições de ler e interpretar a realidade e desenvolver as habilidades e competências que, ao longo de suas vidas, poderão lhes ser exigidas.

Nesse ponto de vista o ensino da matemática está ligado à compressão e o raciocínio e não a conteúdos decorados.

Rocha, (2013, p.14) também discute que “A forma de o professor questionar o aluno deve levá-lo a uma melhor compreensão do problema que conseqüentemente abre as portas para que o mesmo estabeleça uma boa estratégia de resolução”. Assim a escolha dos problemas é fator fundamental para o processo ensino-aprendizagem, este não deve ser tão simples a ponto de se resolver diretamente, nem tão complexo a ponto do aluno não conseguir interpretá-lo, chegando ao ponto de desmotivá-lo, mas devem ser interessantes e desafiadores de possível resolução pelos estudantes.

É consenso comum entre os professores do ensino básico que a motivação esteja presente com mais naturalidade em problemas reais e principalmente quando está relacionado ao cotidiano do aluno. Ao mesmo tempo tais situações respondem as indagações frequentes dos alunos quando a aplicabilidade do conteúdo em situação da vida real. Sabendo-se que o método mais usado nas escolas de educação básica como estratégias de ensino e aprendizagem e que está presente em todos os livros didáticos é a resolução de problemas matemáticos. Nesse sentido, podemos destacar que:

A resolução de problemas como método de ensino em matemática tem como objetivo principal colocar o aluno diante de questionamentos que possibilitem o mesmo exercitarem o raciocínio e desenvolver uma autonomia que o ajudará em outras situações na sua vida e não simplesmente reproduzir conhecimentos repassados, que tornam o ensino da matemática pouco prazeroso e improdutivo. (Rocha, 2013, p.15).

Uma discussão importante também é levantada por Nascimento (2007, p.20), quando destaca que: “A estratégia de descrever situações do mundo real utilizando o conhecimento matemático, muitas vezes, faz gerar o conhecimento”. Todavia, se a aula não for bem preparada e os problemas não forem bem selecionados o ensino da matemática não garante a aprendizagem esperada nas resoluções de problemas.

Um ponto importante no trabalho será o uso do Software GeoGebra, como forma de diversificar os recursos didáticos para trabalhar esse conteúdo com os estudantes no sentido de verificar a valorização que eles identificam para o sentido de máximo e mínimo em simulação virtual. Nascimento (2007, p.53) reforça que: a “importância fundamental do software está no fato de permitir ao estudante interagir com as representações do fenômeno que está sendo trabalhado, que por sua vez, é representado de forma dinâmica, fugindo do modelo estático proporcionado pelo uso do lápis e papel”.

Sabemos também que, em diversas áreas do conhecimento humano existem problemas nos quais o principal objetivo é determinar o ponto ótimo de uma situação proposta. Problemas com essas características possuem uma grande aplicabilidade em diversas situações cotidianas. Por exemplo, distribuir adequadamente água, luz e esgoto a uma região habitacional com objetivo de reduzir os gastos ou obter o maior lucro possível em determinada venda de produtos. Outras situações do cotidiano também mostram a importância dos estudos e compreensão dos conceitos de máximo e mínimo para uma sociedade moderna. Por exemplo, nas embalagens de alguns tipos de alimentos contém informações de como deve ser conservados os produtos em temperatura máxima ou mínima, oferecendo desta forma importante indicativo, se o alimento deve ser conservado na geladeira ou fora dela. As indústrias por sua vez, têm o desafio de transportar grandes quantidades de produtos em caminhões ou navios, e para facilitar esses tipos de transporte é comum os produtos serem transportados em pequenos fardos. Nesse sentido, a matemática possui ferramentas interessantes para otimizar empacotamentos de objetos.

Rocha (2013, p.22), “Nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio, os problemas de máximos e mínimos usualmente explorados quase sempre estão ligados às funções quadráticas”. Sendo assim após a modelagem do problema, resolvê-lo se resume a encontrar as coordenadas do vértice da parábola.

No Ensino Superior os problemas de otimização na sua grande maioria requer conhecimento de derivadas, que foge do nosso objetivo nesse trabalho. Mas no Ensino Fundamental e Médio, existe uma ampla quantidade de problemas interessantes que podem ser resolvidos utilizando outros recursos algébricos, diferentes daquelas utilizadas em funções quadráticas, que

será discutido com mais detalhes no decorrer desse trabalho.

No Ensino Fundamental em situações discretas é comum o uso do conceito de máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC), ainda no sexto ano, quando os alunos estudam os conteúdos de múltiplos ou divisores.

No Ensino Médio o conteúdo das desigualdades das médias, por exemplo, é um recurso matemático importante e útil na resolução de diversos problemas de otimização. Uma vez que sua abordagem é de simples compreensão, auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e proporciona um meio excelente para compreensão dos conceitos estudados.

Dessa forma, faremos uma abordagem do tema: Uma Análise sobre a Compreensão do conceito de Máximo e Mínimo por Estudantes do Ensino Médio, como uma oportunidade de revisar e aplicar esses conceitos em alguns conteúdos desse nível de ensino, tais como funções quadráticas, desigualdades das médias, dentre outros. Além de investigar como esses estudantes compreendem e valoriza tais conceitos matemáticos em diferentes situações matemáticas.

## 3.2 Os processos metodológicos de ensino de matemática

Sabemos que uma boa escolha dos processos metodológicos a ser utilizados pelos professores para tratar os conceitos matemáticos é um dos fatores mais importantes para efetivar uma boa aprendizagem. Nesse sentido, trazemos para discussão e fortalecimento de nosso estudo algumas abordagens utilizadas no ensino de matemática.

Mesmo sendo um processo que recebe críticas de pesquisadores e especialistas em educação, as aulas expositivas no ‘modelo tradicional’ ainda é uma das metodologias mais utilizadas pelos professores de matemática, na qual o aluno apenas acompanha a aula de forma passiva a partir da transmissão dos conteúdos pelo professor. Geralmente essa prática de ensino segue uma mesma sequência: O professor transmite o conteúdo, apresentando a teoria na lousa, como único recurso didático, faz alguns exemplos do modelo de aplicação e o aluno, por sua vez, reescreve, copia e tenta reproduzir nos exercícios selecionados pelo professor. Acreditamos que esse método de ensino, se mal trabalhado, em muitos casos é uma das causas do insucesso escolar dos alunos por causa da limitação dos conceitos básicos que deixam de ocorrer no processo de ensino. Nesse sentido, Magarinus (2013, p.37, apud D’Ambrósio, 2003) destaca a necessidade de substituir o ensino que prioriza as aulas expositivas, onde o aluno recebe passivamente o conteúdo, que não estimula a sua participação e viabiliza a matemática como um produto acabado.

Muitas vezes o professor é forçado a adotar exclusivamente essa metodologia de ensino, por falta de materiais pedagógicos, infraestrutura do espaço escolar, fatores econômico ou pela ausência de laboratórios de matemática e informática. Este último, quando existem em muitos casos os computadores são sucateados e não funcionam. Nessa compreensão os PCNEM (2000,

p.94), concordam que a presença da tecnologia remete diretamente às atividades relacionadas à aplicação dos conhecimentos e habilidades adquiridas ao longo da educação básica. Outro fator que pesa bastante na prática didática do professor da educação básica são os baixos salários, fazendo com que os mesmos procurem outras fontes de renda, sendo outras escolas a principal delas, com objetivo de complementar seu rendimento mensal. Com isso esses profissionais ficam sem tempo para se qualificar e preparar boas aulas. No documento dos PCNEM (2012, p.33), destaca que o planejamento didático das atividades do professor a serem desenvolvidas assume lugar essencial entre as suas tarefas. Dessa forma, o papel do professor fica ampliado e se torna mais complexo.

### 3.2.1 O uso de recursos computacionais no ensino de matemática

Uma prática que supostamente se intensificou nos últimos anos foi o uso de software. Segundo dados do portal G1 Educação publicado em 07 de janeiro de 2016; o censo escolar realizado em 2014, a escola Brasileira conta com cerca de 90% das escolas públicas do Ensino Médio com laboratório de informática para uso dos alunos, isso supõe que existe um ambiente favorável ao uso desses computadores no ensino e a utilização de softwares gratuitos. Segundo Rocha, Poffal e Meneghetti (2015, p.22) a utilização de software na sala de aula de matemática, mesmo os alunos com dificuldades nas resoluções de alguns problemas, se mostraram interessados e teriam maior incentivo para participar das soluções dos problemas proposto.

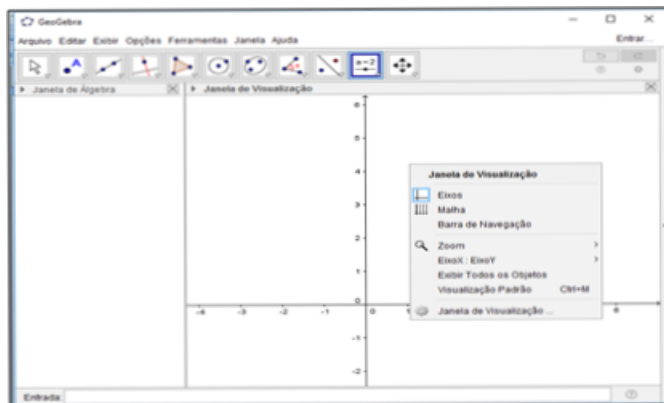
Sendo assim, buscamos encontrar nas atuais tendências metodológicas de ensino da matemática, uma proposta não tradicional que possa indicar uma alternativa para ajudar os educadores na mudança e melhoria de suas práticas metodológicas visando tornar o ensino dos conceitos de máximo e mínimo, de modo mais compreensível e com significado para os alunos. Além de tudo queremos que o aluno participe do processo de construção do seu conhecimento, oferecendo a ele a oportunidade de refletir, discutir, manipular materiais concretos, utilizar o computador usando softwares, formular hipóteses, indagar e expor suas ideias em relação ao objeto em estudo.

O nosso trabalho explora o software GeoGebra em uma situação-problema da sequência de atividade em que procura rever com os estudantes alguns conhecimentos básico quanto ao uso desse recurso no ensino de matemática. Acreditamos que esse software além de contribuir de forma significativa aos objetivos que buscamos atingir, traga outras vantagens quanto às discussões que serão levantadas no trabalho com uso de papel e lápis, comparando, por exemplo, em movimentar as formas gráficas em diferentes posições e direções, fazer simulações, e até comparar um retorno ao aspecto inicial do modelo construído, com aqueles observados no papel.

O GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter no ano de 2001, o qual foi desenvolvido para o ensino de matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Esse software reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o Geo-

Gebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, diferentes representações de um mesmo objeto que podem interagir entre si. A figura 1 a seguir, apresenta a tela principal do GeoGebra, com as principais janelas de representação e comando.

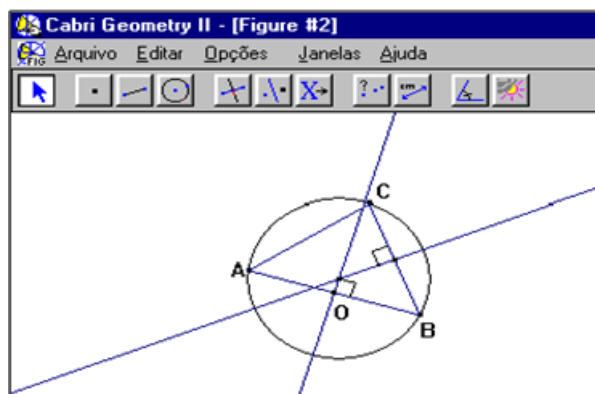
Figura 1 – Tela principal do GeoGebra



Fonte : Software GeoGebra visualizado no endereço: <http://www.geogebra.at/>

A tecnologia computacional voltada para educação dispõe de diversos softwares que são apresentados aos professores para enriquecer a prática do ensino de matemática, no sentido de ampliação da compreensão dos estudantes para aquisição de conceitos matemáticos. De modo que, além dos estudantes interagirem entre si e com seu professor, o aluno passa também a interagir com o computador, tornando-se personagem ativo no seu processo de aprendizagem. Um outro software que podemos destacar também é o Cabri-Geometry que é um software de geometria dinâmica que permite a exploração dos objetos da geometria e das suas relações. Jesus (2005, p.2 apud Gravina, 1996) destaca que “Os softwares de Geometria dinâmica proporcionam investigações, descobertas, confirmam resultados, realizam simulações e, sobretudo, levantam questões relacionadas com sua aplicação prática.” A seguir, a figura 2 é uma situação matemática construída no Cabri-Geometry.

Figura 2 – Construção de um triângulo inscrito em uma circunferência para apresentação do Circuncentro

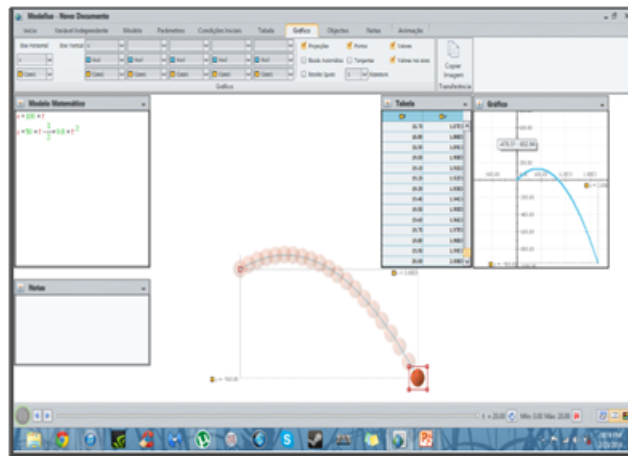


Fonte : <http://www.ebah.com.br/content/ABAAABhqEAF/a-geometria-cabri>

Além desses, GeoGebra e Cabri-Geometry, outro software bastante poderoso e atraente em que podemos utilizar no ensino-aprendizagem tanto na física quanto na matemática é o Modélus. Nascimento (2007, p.96) ao trabalhar esse recurso para explorar situações de modelagem destaca que: “esse software permite a construção de simulação a partir de um modelo algébrico que representa uma determinada situação-problema”. Desse modo, essa ferramenta possibilita um aumento das percepções dos alunos, pois incorpora a um só momento a escrita algébrica e o efeito visual provocado pelo modelo.

As quatro principais funções do Modélus são: realizar cálculos numéricos baseados em equações e dados especificados pelo usuário; apresentar os resultados na forma de gráficos e tabelas; facultar a montagem de animações; calcular medidas de distâncias e ângulos sobre uma imagem, entre outras atividades. A seguir apresentamos na figura 3 uma situação de simulação matemática construída no software Modélus.

Figura 3 – Gráfico, equação, tabela e simulação da trajetória do movimento de uma bola.



Fonte: [https://moodle.unipampa.edu.br/pluginfile.php/139161/mod\\_resource/content/1/Oficina20d%20Aprendizagem%20Modellus](https://moodle.unipampa.edu.br/pluginfile.php/139161/mod_resource/content/1/Oficina20d%20Aprendizagem%20Modellus)

### 3.2.2 A metodologia de resolução de problemas

A proposta de resolução de problemas utilizada na sala de aula tem como objetivo contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, em particular os conceitos de máximos e mínimos são tratados em diferentes situações contextualizadas, que são apresentadas nos livros didáticos. Proporcionando aos alunos a possibilidade de desenvolver seus conhecimentos acerca dos conceitos e procedimentos estudados dentro e fora da sala de aula. Essa ideia é confirmada pelo PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 40), ao afirmar que: “a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance”.

Segundo Rodrigues e Magalhães (2012, apud Dante, 1998, p.03), “um problema é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos específicos para solucioná-la”. Dessa maneira é importante que o problema matemático seja interessante, criativo e

desafiador, pois caso contrário o aluno ficará desmotivado e podendo não ocorrer à aprendizagem esperada.

Convém aqui fazer uma breve distinção entre problemas e exercícios. De acordo com Pereira (2002, p. 4):

O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida. Ou seja, o exercício envolve mera aplicação de resultados teóricos enquanto o problema necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa.

Nascimento (2007) baseado nos estudos de Arsac et al (1991), discute sobre a natureza do tipo de problema explorado na matemática, o qual apresenta discussão sobre os problemas do tipo aberto, semi-aberto, completamente aberto, que respectivamente, segundo ele são:

1. Problema ‘aberto’, utilizam situações-problema que deixam os alunos livres para decidir as estratégias de resolução e os conhecimentos matemáticos a utilizar.
2. Os problemas ‘semi-aberto’ utilizam os procedimentos padrões de resolução e alguns deixam os alunos livres para decidir o modo de resolução. Isto é, por indicarem pistas importantes e apresentarem dados para auxiliar a resolução dos mesmos.
3. Os problemas ‘completamente aberto’, congrega os mesmos objetivos do problema aberto (ARSAC et. al., 1991), acrescentando a esses objetivos, a necessidade de decidir pelos elementos construtores (grandezas envolvidas, Intervalos e valores que podem ser definidos para as grandezas, a composição das variáveis e o tratamento que se faz das mesmas, a seleção do campo de conhecimento e a delimitação do alcance quanto à aplicação do conhecimento envolvido) de forma a dar um sentido de resolução matemática ( torná-lo equacionável) ao mesmo.

### 3.2.3 A metodologia do tratamento da informação

A metodologia do tratamento da informação explorada no ensino da matemática procura estimular a leitura, coleta de dados, trabalhar com situações-problema envolvendo combinações e a interpretação da informação contida em tabelas e figuras. Além de oportunizar aos estudantes a construção e organização dos dados, estabelecer relações e construir justificativas.

Na atualidade vivemos em uma sociedade, na qual estamos imersos, de informação, por isso é essencial para a formação de todo cidadão o conhecimento da leitura e interpretação que se apresenta em diferentes contextos. Deste modo, saber ler e interpretar diferentes representações, que são expressas por tabelas e gráficos, tão presentes nos veículos da mídia, é fundamental para uma formação cidadã.

Nesse sentido, esse trabalho procura valorizar essa metodologia através de sua sequência de atividades, onde as situações a ser explorado pelos estudantes, o problema do triângulo somatório, o problema do cercado, o problema caracterizado como a velocidade no cruzamento e o problema da construção da caixa de papel por cortes e dobraduras, buscam incentivar a leitura, interpretação de figuras, coletas de dados e combinações. Oportunizando esses estudantes um melhor aproveitamento quanto à compreensão e significados dos conceitos estudados.

No caderno dos PCNs para o Ensino Médio (2013, p.125) é reforçada a ideia de que: “A produção rápida e excessiva de informações na sociedade atual requer um eficiente pensamento analítico para compreender pesquisas de opinião, índices econômicos, doenças, problemas ambientais etc”.

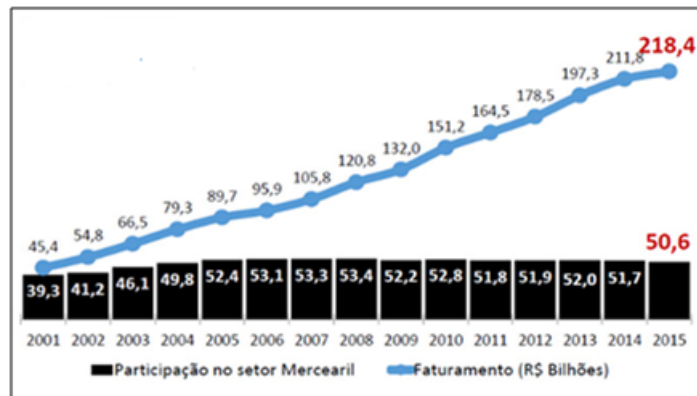
É notável a velocidade das informações que são produzidas pelas construções humanas. Esse dado nos coloca em um processo necessário de adaptação aos novos meios de informação e comunicação, no qual se destaca os mecanismos computacionais e a internet através de recursos tecnológicos. Esse fato vem gerando uma nova forma de comércio, que amplia os processos de negociação, propagandas e consumo pela sociedade. A inserção desses canais permite que o consumidor além do acesso a informação tenha também acesso a ferramentas tecnológicas para comparação de preços, produtos e serviços oferecidos pelas empresas de uma forma mais rápida. Dessa forma, tanto as pessoas quanto as empresas procuram se adequar ao uso da tecnologia para uma melhor divulgação/contato de um produto.

Por outro lado, o consumidor na tentativa de fugir dos altos preços de um produto, começam a trabalhar uma atividade de manipulação de dados bastante interessante, pois, optam por compra em atacado, melhor fabricante e garantias do produto, informações essas na palma da mão. Tal atividade de manipulação/tratamento da informação é uma prática comum nos últimos anos e que em certo sentido vem sendo necessária por uma prática também na escola. Saber entender uma informação divulgada em meios de comunicação e informação é uma característica da boa formação cidadã. Por exemplo, analisar os dados divulgados pela Associação Brasileira do Atacado de Autosserviço (ABAAS), quanto ao crescimento do setor em 2016, que foi de 14% em relação ao ano anterior, e para 2017, a estimativa do setor de atacados, apresenta uma expansão na casa de dois dígitos, pode ser um excelente trabalho para estudo da matemática nesse campo da economia e comércio. Pois se podem trabalhar estimativas, tendências, índices, variações, funções, entre outros saberes.

Com relação à compra por atacado, pesquisas apontaram no ano de 2016, que 3 em cada 10 brasileiros têm optado por fazer compras em grandes quantidades. A figura 4 a seguir mostra que no setor atacadista Mercantil seu faturamento e participação vêm crescendo ao longo dos anos obtendo seu maior faturamento e participação do setor em 2015. A proposta de entendimento de uma realidade desse fato gera bons conhecimentos de matemática aplicada.



Figura 4 – Evolução e Participação do Setor atacadista



Fonte: [http://www.abad.com.br/ds\\_ancking.php](http://www.abad.com.br/ds_ancking.php)

### 3.2.4 A metodologia do uso de jogos e materiais manipulativos

A metodologia de ensino de matemática também prevê o uso de jogos e materiais concretos, no qual os alunos participam de um processo que provoca uma maior interatividade entre o tríptico Aluno  $\times$  Professor  $\times$  Material, proporcionando um ambiente favorável por meio de colaboração. Assim sendo, a metodologia de uso de material manipulável permite ao aluno compreensão de conceitos matemáticos por meio de manuseio. Uma ferramenta interessante dessa técnica é transformar exercícios em jogos, como o problema do ‘triângulo mágico’, que pode ser formatado em uma placa de madeira  $20 \times 20$ , um desenho de um triângulo com pequenos círculos em cada lado, resultando no jogo do ‘somatório triangular’, cujo objetivo consiste em preencher os círculos existentes nos seus lados, usando os números naturais consecutivos de 1 a 6, (1, 2, 3, 4, 5, 6), de modo que a soma seja a mesma em cada um dos três lados do triângulo, como apresentado na figura 9. Tal proposta gera várias questões relacionadas, tanto em nível fundamental quanto médio. Outro tipo de problema é o da construção da embalagem sem tampa em papel, que tem como objetivo encontrar a medida  $x$  de um corte apropriado numa folha A4, de tal maneira que a caixa obtida por dobraduras tenha o maior volume possível e podemos discutir como encontrar essa medida e as soluções de outros problemas relacionadas.

Em relação aos jogos matemáticos os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco (2012, p.37), destaca que:

Os estudantes não ficam na posição de meros observadores, tomando conhecimentos de novos fatos, mas se transformam em elementos ativos, na tentativa de ganhar a partida ou na busca de um caminho para a solução do problema posto a sua frente.

Desse modo, tal atitude contribui para o interesse e aprendizado dos estudantes na compreensão das ideias matemáticas implícitas aos jogos que favorecem a aquisição do conhecimento desejado.

Nos estudos de conceitos matemáticos existem muitas metodologias de ensino que o

professor pode adotar em sala de aula como recurso para aprendizagem. O recurso dos jogos matemáticos, por exemplo, é excelente, pois, pode trazer várias possibilidades. Nesse sentido, Marques, Perin e Santos (2013) destacam que:

Os jogos matemáticos desenvolvem o raciocínio lógico das crianças e suas habilidades; levam-nas a conceberem a matemática como uma disciplina prazerosa e proporcionam a criação de vínculos positivos na relação professor-aluno e aluno-aluno. Com os jogos matemáticos, os alunos podem encontrar equilíbrio entre o real e o imaginário e ampliarem seus conhecimentos e o raciocínio lógico-matemático.

A metodologia do uso de jogos pode promover aprendizagens satisfatórias, que são capazes de despertar saberes nos estudantes em seu processo de construção do conhecimento.

### 3.2.5 O uso de sequência didática como processo metodológico

A teoria da engenharia didática, organizada por Artigue (1995), destaca as sequências didáticas como metodologia de ensino, organizadas por um regime experimental com bases nas “realizações educacionais” em sala de aula, isto é, na concepção, implementação, monitoramento e análise de sequências de ensino. A autora ainda considera que esse processo experimental está delimitado em quatro fases:

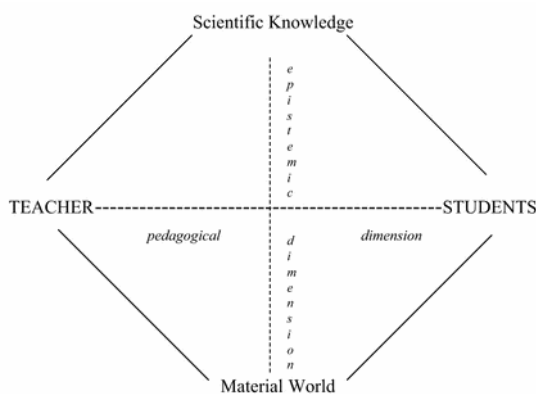
- A 1ª fase, das análises preliminares, onde são feitas observações envolvendo o quadro teórico didático mais geral, como também uma análise prévia dos conhecimentos didáticos adquiridos anteriores no campo de estudos, mas também um número determinado de análise preliminar.
- A 2ª fase, das concepções e análise a Priori das situações didática da engenharia. Artigue (1995, pp.42-43) destaca que o investigador, professor, toma a decisão de agir sobre um número determinado de variáveis de comando. Essas variáveis são consideradas importantes para facilitar a análise da engenharia.
- A 3ª fase, da experimentação. Siqueira (2013, p.55 apud Almouloud e Coutinho, 2008, pp.67-68) destaca: “É nessa fase que é posto em prática toda sequência didática construída. Corrigindo-a se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise a priori, em um processo de complementação”.
- A 4ª fase, da análise a posteriori e validação. Para Artigue (1995, pp.48-49), esta fase segue uma análise com base no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, ou seja, das observações do pesquisador, pela sequências de ensino, bem como as produções dos alunos em classe ou fora dela. Estes dados são frequentemente complementados com outros obtidos com o uso de metodologias externas, tais como questionários, entrevistas,

individuais ou em pequenos grupos, aplicados em diferentes momentos do ensino ou durante seu curso. Ainda segundo a autora, o confronto das duas análises, o a priori e a posteriori, com base na validação das suposições feitas na investigação, permite a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas.

Uma sequência didática é uma proposta metodológica que se configura como um conjunto de atividades interligadas que são planejadas no sentido de abordar um determinado conteúdo de estudo. Para planejar uma sequência de atividades, devemos apresentar os objetivos visando o alcance que se pretende atingir. Méheut (2005) discute que em uma sequência didática devemos nos preocupar com duas dimensões: a epistêmica e a pedagógica. Na consideração epistêmica devem ser considerados os processos de elaboração, métodos e validação do conhecimento científico que serão tratados buscando fazer uma relação entre estes fatos e o mundo real. Já na consideração pedagógica discutem-se os aspectos relativos ao trabalho metodológico do professor e às interações entre suas ações e o comportamento dos alunos, além das interações entre eles.

Uma figura apresentada por ela nos dá essa compreensão para o tratamento do saber científico, na qual é visualizando o conhecimento, sua relação com o mundo material e as ações dos sujeitos envolvidos.

Figura 5 – Losango didático.



Fonte: MÉHEUT, 2005, p.2

No nosso caso, a sequência didática que será abordada também pode servir como material didático de apoio, parcial ou total, para tratar deste assunto em turmas do Ensino Médio. Isso se justifica em Rocha, Poffal e Meneghetti (2015, p.21) ao afirmar que o “indivíduo aprende a todo o momento, em situações cotidianas, na relação com as pessoas, e com o passar do tempo, tudo flui naturalmente e a aprendizagem se torna significativa”. Nossa proposta inclui o recurso computacional, no qual buscamos analisar o ensino e aprendizagem em problema de otimização com o recurso do GeoGebra, que é um software de Matemática que permite construir e explorar objetos geométricos e algébricos, interativamente.

Nascimento (2007, p.45 apud PONTES 1992, p.19) destaca “o computador se constitui um auxiliar fundamental para gráficos, comparar valores, fazer mudanças em escalas, etc. e em alguns casos pode até simular através de animações realizadas pela computação, o próprio desenvolvimento de fenômenos dinâmico”. Ainda nesse sentido, Nascimento enfatiza que, o uso do computador e a realização de simulações é um auxiliar importante para a aplicação do conhecimento de função, valorizando as atividades de representação e no trabalho com modelagem. Dessa forma, uma situação-problema ganha um novo sentido, indo além do campo algébrico.

Uma dinâmica de trabalho em sala de aula durante a vivência de uma sequência didática é a utilização de um roteiro contendo os passos necessários a sua execução como observado por Allevatto e Onuchic (2014, pp.44-46), citados por Fernandes e Oliveira (2015, p.6), onde se propõe uma análise dos tópicos e a aplicação da sequência, abaixo apresentados.

- **Proposição do problema** - Selecciona ou elabora um problema e denomina-se de problema gerador.
- **Leitura individual** - Distribuir uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicitar a leitura do mesmo.
- **Leitura em conjunto** - Distribuir a turma em pequenos grupos e, solicitar uma nova leitura do problema.
- **Resolução do problema** - A partir do momento em que o aluno entendeu o problema tenta a resolver, em grupo, permitindo assim a construção de conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
- **Observar e incentivar** - Nesse momento, o professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.
- **Registro das resoluções na lousa** - Anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.
- **Plenária** - Assembléia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados, dessa forma, participam.
- **Busca do consenso** - Após discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.
- **Formalização do conteúdo** - Faz-se uma síntese daquilo que se objetiva “aprender” a partir do problema gerador. São colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações, etc.
- **Proposição e resolução de novos problemas** - Nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para fixação de aprendizagem.

Uma sequência de atividades, não deve ser vista como uma receita pronta para o ensino-aprendizagem. Mas sim, uma técnica diferenciada e não tradicional de se trabalhar a matemática em sala de aula. Tal proposta torna o ambiente escolar mais dinâmico e produtivo nos objetivos pretendidos, uma vez que o professor torna-se um observador, organizador, consultor, mediador e incentivador da aprendizagem, auxiliando os alunos diante das situações propostas, instigando-o, de forma a compreender e questionar os conceitos necessários a sua resolução e com isso acredita-se fazer gerar o conhecimento de forma mais significativa.

### 3.3 Campos da matemática em que geralmente se trabalham Máximo e Mínimo no Ensino Médio.

Nesta seção discutiremos alguns campos matemáticos, onde podemos encontrar importantes aplicações de uso de máximo e mínimo no Ensino Médio.

#### 3.3.1 Campo da álgebra com foco na função quadrática

Iniciamos com um estudo e compreensão do ponto de máximo e do ponto de mínimo de uma função quadrática. Selecionamos no livro, coleção-PROFMAT, Números e Funções Reais, 1<sup>o</sup> Edição, 2013, nas páginas 118 a 128, a verificação de definições importantes para as seguintes informações:

Chama-se de função quadrática, toda função do tipo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . O gráfico dessa função é chamada parábola, cuja direção da sua concavidade depende do sinal do coeficiente  $a$ : para cima quando  $a > 0$  ou para baixo, quando  $a < 0$ .

A forma canônica da função quadrática é escrita da seguinte maneira:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

onde, em geral, chama-se a expressão  $b^2 - 4ac$  de discriminante da equação e denotada pela letra maiúscula  $\Delta$  (lê-se delta) do alfabeto grego.

Assim podemos reescrever a igualdade anterior como:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Observando-a, podemos notar que apenas  $x$  é a variável e, por consequência,  $a$ ,  $\frac{b}{2a}$  e  $\frac{\Delta}{4a^2}$  são constantes. Observamos também que se  $a > 0$ , o valor mínimo de  $f(x)$  ocorre quando ocorrer o valor mínimo para:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a};$$

como  $(x + \frac{b}{2a})^2$  é sempre positivo ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando  $x + \frac{b}{2a} = 0$ , isto é,  $x = -\frac{b}{2a}$ ; nessa situação o valor mínimo de  $f(x)$  é  $f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ . De modo totalmente análogo, quando  $a < 0$ , o valor máximo de  $f(x)$  ocorre em:

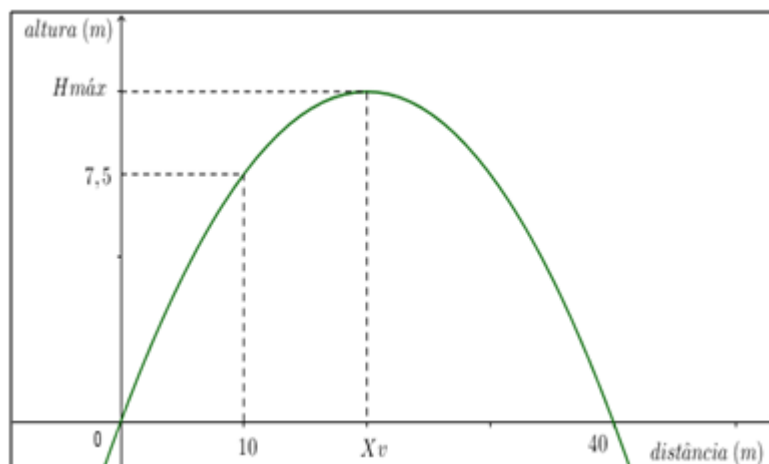
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Nessas situações os valores de  $x$  e de  $f(x)$  são conhecidos, respectivamente, por:  $x_v$  ("x" do vértice da parábola) e  $y_v$  ("y" do vértice da parábola).

Uma situação-problema, na qual podemos verificar a utilização desse conhecimento de modo que se visualize um gráfico característico de uma parábola, pode ser observado no seguinte problema que retrata a trajetória de uma bola.

(UCSal – BA) Um futebolista chutou uma bola que se encontrava parada no chão e ela descreveu uma trajetória parabólica, indo tocar o solo  $40m$  adiante, como mostra a figura 6. Se, a  $10m$  do ponto de partida, a bola atingiu a altura de  $7,5m$ . Então qual foi a altura máxima, em metros, atingida pela bola?

Figura 6 – trajetória da bola.



Fonte: Visualização gráfica construída pelo autor no GeoGebra .

**Solução do problema:** Como a trajetória da bola descreve uma parábola, temos que sua altura máxima é caracterizada pela função quadrática

$$h_x = h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

para algum  $x$  real onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são todos reais e  $a \neq 0$ . Podemos retirar as seguintes informações a partir do gráfico apresentado na figura 6:

1.  $a < 0$ , pois a direção da concavidade do gráfico está para baixo. Isso implica a dizer que a função admite um valor máximo que ocorre em  $x_v$ , 'x' do vértice da parábola.
2. O ponto  $x_v$  é um valor entre 10 e 40.

$$3. \quad h(0) = 0; h(10) = 7,5 \text{ e } h(40) = 0$$

Como:  $h(x) = ax^2 + bx + c$ , temos:

$$h(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = 0, \text{ isto é } c = 0.$$

$$h(10) = a \cdot (10)^2 + b \cdot 10 + c = 100a + 10b = 7,5.$$

$$h(40) = a \cdot (40)^2 + b \cdot 40 + c = 1600a + 40b = 400a + 10b = 0.$$

Das informações anteriores, obtemos o seguinte sistema de duas equações nas incógnitas  $a$  e  $b$ .

$$\begin{cases} 100a + 10b = 7,5 & (I) \\ 400a + 10b = 0 & (II) \end{cases}$$

Da equação (II), temos  $10b = -400a$ .

Substituindo esse valor,  $10b = -400a$ , na equação (I), obtemos:

$$100a + (-400a) = 7,5 \Rightarrow -300a = 7,5 \Rightarrow a = -\frac{1}{40},$$

substituindo agora esse valor na equação (II), encontramos  $b = 1$ . Assim  $x_v = -\frac{b}{2a} = 20$  e, portanto a altura máxima é

$$h_{mx} = h(x) = -\frac{1}{40}x^2 + x = -\frac{1}{40} \cdot (20)^2 + 20 = 10.$$

Ou seja, a bola atinge sua altura máxima em  $10m$ .

Essa é uma importante situação em que os profissionais de ensino podem valorizar o conhecimento do campo das funções para atividades do cotidiano dos estudantes.

### 3.3.2 Campo da estatística no trabalho com Médias

No livro, coleção-PROFMAT, Matemática Discreta, 2014, 1<sup>o</sup> Edição, nas páginas 172 a 185, consta uma ideia bastante importante, que é a ideia de médias. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista.

Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtemos a mais simples de todas as médias, a Média Aritmética. A média aritmética da lista de  $n$  números positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é o valor  $A$  tal que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = A + A + A + \dots + A = n \cdot A$$

isto é,

$$A = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n} \quad (3.1)$$

Se essa característica a ser mantida for o produto dos elementos da lista, obtemos a Média Geométrica. A média geométrica de uma lista de  $n$  números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é o

valor **G** tal que:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = G \cdot G \cdot G \cdots G = G^n$$

isto é,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \quad (3.2)$$

Se essa característica a ser mantida for à soma dos inversos dos elementos da lista, obtemos a Média Harmônica. A média harmônica de uma lista de **n** números positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é o valor **H** tal que:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H} = \frac{n}{H}$$

isto é,

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \quad (3.3)$$

Se essa característica a ser mantida for o quadrado dos elementos da lista, obtemos a Média Quadrática. A média quadrática de uma lista de **n** números positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é o valor **Q** tal que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = Q^2 + Q^2 + Q^2 + \cdots + Q^2 = n \cdot Q^2$$

isto é,

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \quad (3.4)$$

Outra média importante que não se pode esquecer é a Média Aritmética Ponderada (embora a ideia primitiva seja que a média ponderada é uma média aritmética). A média aritmética ponderada dos números positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  com pesos respectivamente iguais a  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  é definida por:

$$M_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \cdots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n} \quad (3.5)$$

Ou seja, a média aritmética ponderada é simplesmente a média aritmética com elementos repetitivos.

Uma proposta importante desse tópico matemático é que as desigualdades das médias mostram-se como um recurso poderoso em que podemos utilizar para resolver diversas situações de otimização mesmo no Ensino Médio. Esse recurso é pouco explorado nesse nível de ensino a partir de problemas de otimização, pois estas médias são tratadas no conteúdo de estatística, onde as aplicações restringem-se ao seu simples cálculo com base em informações dadas em gráficos ou tabelas.

No livro *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, escrito em 2010 por Oliveira e Fernández, páginas (241, 243), pode-se observar alguns resultados importantes que estabelecem relações de desigualdades entre as médias definidas acima.



Dados uma lista de números reais positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tem-se

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (3.6)$$

Ou seja, a Média Geométrica não supera a Média Aritmética. Além disso, a igualdade só ocorre se, e somente se,  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

#### Desigualdade das Médias Aritmética e Quadrática

Dados uma lista de números reais positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tem-se

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (3.7)$$

Ou seja, a Média Aritmética não supera a Média Quadrática. Além disso, a igualdade só ocorre se, e somente se,  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

#### Desigualdade das Médias Harmônica e Geométrica

Dados uma lista de números reais positivos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tem-se

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (3.8)$$

Ou seja, a Média Harmônica não supera a Média Geométrica. Além disso, a igualdade só ocorre se, e somente se,  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

Podemos observar, nessas três últimas desigualdades que:

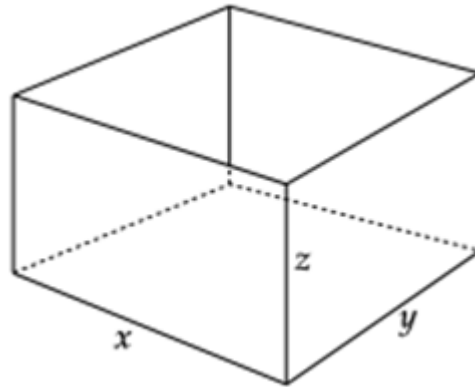
Se  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são números positivos e  $H, G, A$  e  $Q$  são suas médias harmônicas, geométrica, aritmética e quadrática, respectivamente, então  $H \leq G \leq A \leq Q$ . Além disso, duas quaisquer dessas médias serão iguais apenas quando  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

Uma situação-problema, na qual podemos verificar a utilização dessa ferramenta é como observado a seguir no problema:

**(Problema do PROFMAT-MA12-AV2-2011).** Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo  $x, y$  e  $z$  (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídas por alguma face).

1. Exprima a área e o volume da caixa em função de  $x, y$  e  $z$ .
2. Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.
3. Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

Figura 7 – Caixa retangular sem tampa.



Fonte: PROFMAT-MA12-Prova - AV2 – 2011.

**Solução:** Como  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os comprimentos das arestas da caixa retangular (Figura 7), e chamando de  $S$  a área da caixa retangular sem tampa e  $V$  o seu volume.

1) Sendo as faces da caixa retangulares, temos:

$$S = xy + 2xz + 2zy$$

$$V = xyz$$

2) Note que  $S$  representa a soma de três números reais e positivos. Utilizando a desigualdade da média aritmética e geométrica nessa soma, obteremos:

$$\frac{xy+2xz+2zy}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2zy} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2}$$

Sendo  $V = xyz = 32$ , teremos

$$\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{4(xyz)^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 32^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 32 \cdot 32} = \sqrt[3]{64 \cdot 64} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 4^3} = 16.$$

Então,  $\frac{xy+2xz+2zy}{3} \geq 16$ , multiplicando os dois lados da desigualdade por 3, obtemos;

$$xy + 2xz + 2zy \geq 48.$$

3) Sabendo que igualdade entre as médias aritmética e geométrica ocorre se, e somente se, os termos são iguais. Neste caso devemos ter:  $xy = 2xz = 2yz$ . Como o volume é positivo,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são positivos, isto é  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $z > 0$ . Então,

$$\begin{cases} xy = 2xz \Leftrightarrow y = 2z \\ xy = 2yz \Leftrightarrow x = 2z \Leftrightarrow z = \frac{x}{2} \\ 2xz = 2yz \Leftrightarrow x = y \end{cases}$$

Como o  $V = xyz = 32 \Leftrightarrow x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 32 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$ .

Portanto, sendo  $x = 4$  e pelo sistema acima, temos  $x = y = 4$  e  $z = 2$ , são as medidas da caixa que tornam a área mínima, quando o volume é 32.

Dessa forma, verificamos que podemos trabalhar esse tipo de abordagem com os estudantes do ensino médio como forma de explorar situações cotidianas do conceito de otimização.

### 3.3.3 Campo da aritmética nas situações-problema relativas a somatórios

As dificuldades de aprendizagem englobam uma série de fatores, que muitas vezes ficam fora de nosso alcance, um mais comum é aquele da deficiência de base em determinados conteúdos, por exemplo, resolver uma equação polinomial do 2º grau.

Segundo dados da EBC, Empresa Brasileira de Comunicação, Agencia Brasil publicado em 18 de janeiro de 2017, “apenas 3,6% dos alunos da escola pública têm aprendizado adequado em matemática, o que significa que 96,4% não aprendem o esperado na escola”. Esses são alguns pontos que nós, professores, enfrentamos na sala de aula. Portanto, devemos buscar que nossos alunos possam alcançar um nível de conhecimento desejado.

Um dos métodos bastante utilizado para essa superação é a proposta do uso de situações-problema nas atividades de ensino de matemática. No caderno dos PCN (1998, p.40), destaca-se que:

Situação-Problema é o ponto de partida de atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégias para resolvê-las.

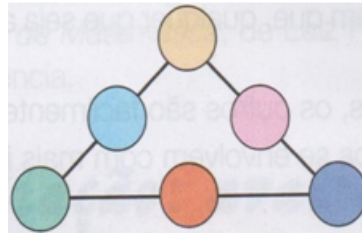
Explorar situação-problema no nosso caso é trabalhar o conteúdo de Máximo e Mínimo a partir de questões que possam ter interesse para o estudante, e a partir delas, trabalhar os conceitos abordados a fim de alcançar o objetivo pretendido. Desse modo podemos vencer a dificuldade a partir da curiosidade, pois eles, por sua vez, nesse tipo de situação, se tornam parcialmente responsáveis pelo desenvolvimento do seu conhecimento.

Uma situação-problema bastante simples que podemos vivenciar para a aquisição do conceito de máximo e mínimo, até entre estudantes do Ensino Fundamental é o somatório triangular de seis números ( 1, 2, 3, 4, 5 e 6 ), que pode também ser trabalhado no Ensino Médio. Baseado na seguinte situação:

- *Como devemos preencher em todas as posições dos lados do triângulo apresentado na figura 8, com os números da sequência (1, 2, 3, 4, 5 e 6), sem repetir nenhum número, de modo que em cada lado do triângulo tenha sempre a mesma soma?*

Tal situação-problema fornece saberes para se questionar o conhecimento de máximo e mínimo em uma das situações de preenchimento. Portanto, explorar um saber dessa natureza já nas primeiras séries é importante. Em níveis de ensino mais elevados podemos discutir como encontrar cada uma das soluções possíveis, que saberes estão envolvidos, que campo matemático participa da compreensão ou até compreender outras questões, como destacamos:

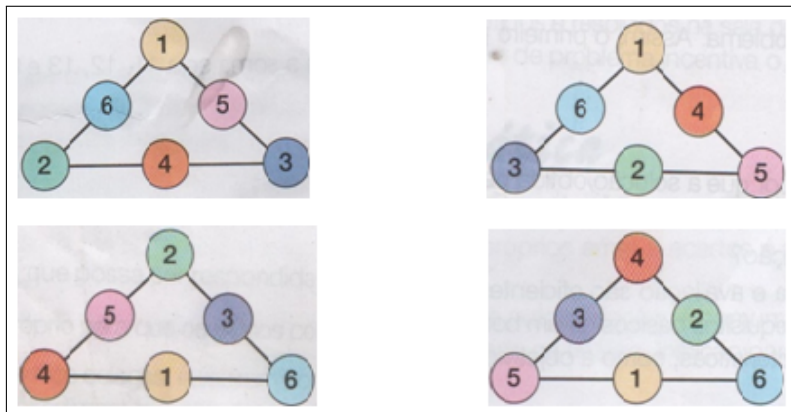
Figura 8 – Somatório triangular



Fonte: A conquista da matemática; Ed. renov; 9º ano; p.11, 2007.

**No Ensino Fundamental:** tal situação é na maioria das vezes resolvida por tentativa e erro pelos estudantes.

Figura 9 – triângulos de seis casas com somas (9, 10, 11 e 12)



fonte: A conquista da matemática Ed. renovada; 9º ano; p.12, 2007

Após a obtenção destas quatro soluções, é interessante incentivar os alunos a estabelecerem relações entre os números colocados nos vértices de cada triângulo e suas respectivas somas constantes, tal como veremos abaixo. Por conveniência denotamos os triângulos cujos vértices possibilitam soma mínima e soma máxima nesta ordem por 1 e 4. E os triângulos com vértices compostos de números ímpares e pares nesta ordem por 2 e 3.

- Existe alguma relação entre os números dos vértices e a soma constante? Se sim, qual?

### **Comentário:**

Nesse item os alunos podem encontrar várias relações. Mas o que se pretende neste caso, é que o aluno consiga perceber que: quando os valores dos vértices são os menores da sequência (1,2, 3), que resulta em soma mínima dos três vértices (6), a soma constante dos lados do triângulo também assumirá seu valor mínimo (9) ou quando os valores dos vértices são os maiores da sequência (4, 5, 6), resultando em soma máxima dos vértices (15), a soma constante dos lados do triângulo também assumirá seu valor máximo (12). Desse modo, os

alunos introduzem em seus saberes, os conceitos de máximo e mínimo de modo peculiar.

### Solução esperada:

Tabela 1 – Somatório dos vértices e dos lados constantes dos triângulos contidos na figura 9

Triângulos	1°	2°	3°	4°
Soma dos vértices	6	9	12	15
Soma constantes dos lados	9	10	11	12

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

Analisando a tabela acima, observamos que: quando a soma dos vértices for mínima a soma constante será mínima e, quando a soma dos vértices for máxima a soma constante será máxima. E daí podemos também concluir a impossibilidade da soma constante ser maior que 12 ou menor que 9, já que os números ( 1 a 6) no triângulo são fixos.

- Existe alguma relação entre as somas dos números dos vértices dos triângulos de cada caso do item (1)? Se sim, qual?.

### Comentário:

Dentre as possíveis relações encontradas pelos alunos. O que se pretende nesse caso é que eles percebam que as somas desses números, que compõe os vértices dos triângulos, são sempre múltiplos de 3 (três).

### Solução esperada:

Tabela 2 – Somatório dos vértices dos triângulos contidos na figura 9.

Triângulos	1°	2°	3°	4°
Soma dos vértices	6	9	12	15

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

Analisando a tabela acima, observamos que a soma dos vértices de cada triângulo é sempre múltiplo de 3.

- Encontre uma equação polinomial que expresse a soma constante em função dos vértices do triângulo proposto.

### Comentário:

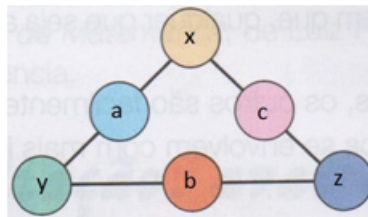
A solução desse item fornece uma equação, que reforça no aluno a idéia de observar algebricamente a existência de um valor mínimo e um valor máximo para as somas constantes dos lados desse triângulo. Essa situação envolvendo sistemas de equações também pode ser

trabalhada tanto com alunos dos Ensinos Fundamental (8º ano e 9º ano) ou Médio.

### Solução:

Sejam as/os circunferências/círculos dos lados do triângulo denotados pelas letras:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  como na figura abaixo. Denotando por  $k$  a soma constante de cada lado do triângulo, podemos montar o seguinte sistema abaixo de três equações nas incógnitas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $k$ .

Figura 10 – Representação do somatório triangular para montar o sistema de solução.



Fonte: A conquista da matemática; Ed. renov; 9º ano; p.11, 2007.

$$\begin{cases} x + a + y = k \\ x + b + z = k \\ x + c + z = k \end{cases}$$

Fazendo a adição das equações do sistema linear, obtemos a equação:

$2x + 2y + 2z + a + b + c = 3k$ ; como  $x + y + z + a + b + c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ; temos  $x + y + z + 21 = 3k$  e daí resulta  $k = 7 + \frac{x+y+z}{3}$ .

Podemos notar que essa última equação polinomial também define uma função  $f : A \rightarrow B$ , uma vez que consideramos  $A$  o conjunto das somas  $(x + y + z)$  múltiplo de três dos vértices do triângulo e  $B$  o conjunto das somas constantes de cada lado desse mesmo triângulo. Para cada  $a \in A$ , existe um único  $b \in B$  definido pela lei de correspondência  $k = 7 + \frac{x+y+z}{3}$ . Assim nessa situação-problema em particular foi possível encontrar uma função injetiva que fornece tanto o seu valor mínimo quanto o seu valor máximo.

A compreensão dos conceitos de máximo e mínimo no nível fundamental tem sua importância, uma vez que, esses conceitos aparecem na Matemática, Ciências e Educação Física, disciplinas obrigatórias nessa modalidade de ensino. Além disso, esses estudantes voltam a rever esses conceitos no Ensino Médio, como forma de aprofundar e consolidar esses conhecimentos. Por outro lado se esses conceitos, no Ensino Fundamental, forem bem construídos os estudantes encontrarão maior facilidade em atribuir significados aos novos conhecimentos, em particular, no que diz respeito ao conhecimento abstrato e simbólico da matemática.

**No Ensino Médio:** Resolver o problema e apresentar o conhecimento matemático envolvido requer a compreensão de sistema de equações.

- Será que este estudo também pode ser feito com outras sequências numéricas no campo dos inteiros?

### Comentário:

Um objetivo para a atividade é que os alunos possam concluir com maior rigor matemático algumas relações referentes ao problema proposto, tais como: que a sequência dos números (1 a 6) pode ser até outra, gerando um novo problema. Que os números localizados nos vértices do triângulo e os numéricos não pertencentes aos vértices dos triângulos são sempre múltiplos de 3, no caso do intervalo (1, 2, 3, 4, 5, 6). E que há uma soma mínima e outra máxima para os lados do triângulo.

### Solução esperada:

De maneira análoga ao caso anterior e utilizando os dados da figura 10, obtemos as equações

$$\begin{cases} x + a + y = k \\ x + b + z = k \\ x + c + z = k \end{cases}$$

Fazendo uma adição das equações do sistema linear, obtemos a equação:

$$3k = 2x + 2y + 2z + a + b + c$$

Como

$$3k = (x + y + z + a + b + c) + (x + y + z)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por  $\frac{1}{3}$ , encontramos

$$k = \frac{(x + y + z + a + b + c)}{3} + \frac{(x + y + z)}{3}$$

Dessa última igualdade podemos concluir que: na(s) sequência(s) procurada assim como os números localizados nos vértices do(s) triângulo(s) devem ser necessariamente múltiplo de 3.

No livro, coleção PROFMAT, Aritmética, 1<sup>a</sup> edição, 2<sup>a</sup> impressão, 2014, na página 48, consta a seguinte proposição 3.4: Sejam  $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ , tais que  $a'|(b' \pm c')$ . Então  $a'|b' \Leftrightarrow a'|c'$ .

Advertimos que: dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , a notação  $a|b$  não representa nenhuma operação em  $\mathbb{Z}$ , nem representa uma fração. Escrevemos  $a|b$  apenas para indicar que  $a$  divide  $b$ .

Assim, tomando  $a' = 3$ ,  $b' = x + y + z$  e  $c' = a + b + c$ , suponha, agora, que  $3|x + y + z + a + b + c$  e  $3|x + y + z$ , decorre da proposição 3.4 que  $3|a + b + c$ . Isto é, a soma dos números da(s) sequência(s) não pertencente aos vértices do triângulo(s) também são necessariamente múltiplo de 3.

Como 3(três) ou 6(seis) números inteiros e consecutivos são sempre múltiplos de 3. Podemos concluir que toda sequência de 6 (seis) números inteiros e consecutivos, obedece as condições da situação-problema proposto e admite uma constante mínima e outra constante máxima, ou seja:

- $k$  é mínimo, se  $(x, y$  e  $z)$  assumirem os menores valores da sequência numérica.
- $k$  é máximo, se  $(x, y$  e  $z)$  assumirem os maiores valores da sequência numérica.

No Ensino Médio esses conceitos estão presentes em diversas áreas do saber, tais como: Matemática, Ciências Biológicas, Educação física, Ensino de Física e Química. Também estão presentes em diversas atividades do mundo moderno, como por exemplo: no comércio, na indústria, na bolsa de valores, no esporte, entre outras situações. Nesse sentido nossa sequência de atividades busca enfatizar a importância da compreensão desses conceitos, máximo e mínimos, para uma melhor compreensão, valorização e fluidez na resolução de problemas matemáticos por partes dos estudantes.

**Vejamos uma nova abordagem e resolução do problema, triângulo somatório, possível de ser trabalhado nos níveis Fundamental e Médio:**

Pode-se discutir a combinatória e adições da organização dos números utilizados, na resolução do problema proposto, oferecendo aos estudantes uma nova forma de abordagem, solução e compreensão dos conceitos, máximo e mínimo na situação proposta.

### Uma possível Solução:

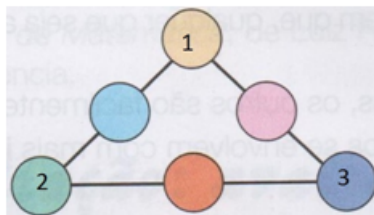
Dentre os números (1; 2; 3; 4; 5 e 6 ) temos todas as 20 combinações possíveis para quaisquer 3 números da sequência:

$$\begin{array}{cccc}
 1 + 2 + 3 = 6 & 1 + 3 + 5 = 9 & 2 + 3 + 4 = 9 & 2 + 5 + 6 = 13 \\
 1 + 2 + 4 = 7 & 1 + 3 + 6 = 10 & 2 + 3 + 5 = 10 & 3 + 4 + 5 = 12 \\
 1 + 2 + 5 = 8 & 1 + 4 + 5 = 10 & 2 + 3 + 6 = 11 & 3 + 4 + 6 = 13 \\
 1 + 2 + 6 = 9 & 1 + 4 + 6 = 11 & 2 + 4 + 5 = 11 & 3 + 5 + 6 = 14 \\
 1 + 3 + 4 = 8 & 1 + 5 + 6 = 12 & 2 + 4 + 6 = 12 & 4 + 5 + 6 = 15
 \end{array}$$

Seja na figura a seguir os números 1, 2 e 3 localizados nos vértices do triângulo.



Figura 11 – Indicativo de solução a partir dos vértices que possibilitam soma mínima



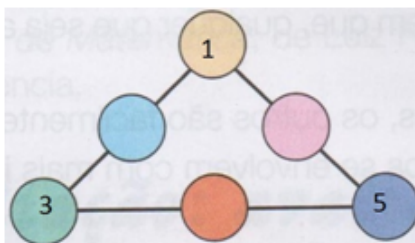
Fonte: A conquista da matemática; Ed. renovada; 9º ano; p.11, 2007.

Esse caso deverá ser combinado com as 19 ternas de números restante que deverão ser colocados nos lados do triângulo não pertencente aos vértices. Mas é fácil perceber que isso não é necessário, uma vez que entre cada duas adições dos lados do triângulo apenas existam um número em comum. Nesse sentido, podemos concluir que há apenas a terna (4, 5, 6) com soma 15, candidata a uma solução do problema. Após algumas combinações encontramos a soma constante 9:

$$1 + 6 + 2 = 1 + 5 + 3 = 2 + 4 + 3 = 9.$$

De maneira análoga considere os números 1, 3 e 5 localizados nos vértices do triângulo.

Figura 12 – triângulo com vértices composto de números ímpares.



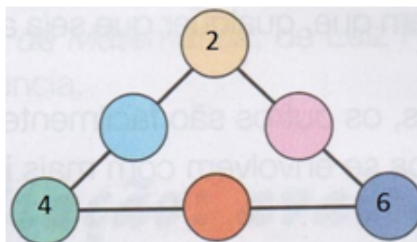
Fonte: A conquista da matemática; Ed. renovada; 9º ano; p.11, 2007.

Pode-se notar que apenas a terna (2, 4 e 6) é candidata a solução, de fato a constante encontrada é:

$$1 + 6 + 3 = 1 + 4 + 5 = 3 + 2 + 5 = 10.$$

De maneira análoga aos casos anteriores, considere o terno (2, 4 e 6) localizado nos vértices da figura 13.

Figura 13 – triângulo com vértices composto de números pares.



Fonte: A conquista da matemática; Ed. renovada; 9º ano; p.11, 2007.

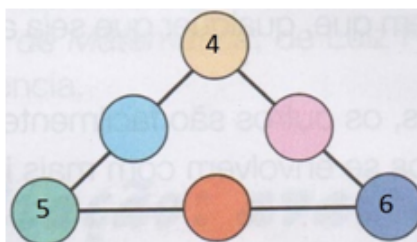
Pelo mesmo motivo acima podemos observar que apenas a terna (1, 3 e 5) é candidato a solução, de fato após algumas combinações encontramos a constante 11.

$$2 + 5 + 4 = 2 + 3 + 6 = 4 + 1 + 6 = 11.$$

Podemos observar que nenhuma outra terna iniciada pelo número 2 ou 3, presente nos vértices do triângulo da figura 13 pode existir uma constante para os lados. Já que não existe outra terna que possa ser combinada com essas e contenha apenas um número comum entre as adições.

Resta agora verificar a terna 4, 5 e 6, nos vértices da figura abaixo, com a única terna (1, 2 e 3) candidata a solução desejada.

Figura 14 – triângulo com vértices indicando os valores que possibilitam soma máxima.



Fonte: A conquista da matemática; Ed. renovada; 9º ano; p.11, 2007.

Dessa maneira, podemos notar que:

$$4 + 3 + 5 = 4 + 2 + 6 = 5 + 1 + 6 = 12$$

Portanto, as somas constantes procuradas são: 9, 10, 11 e 12.

Convém notar que dentre as soluções encontradas existem uma soma mínima (9) e outra soma máxima (12), para os lados dos triângulos.

Como se pode averiguar nas soluções da situação proposta, notamos que as relações envolvidas em sua solução compreendem alguns campos matemáticos, que podem ser discutidos nos níveis educacionais, Fundamental e Médio. Tais como: Adição, Divisibilidade, Funções, Combinatória, Sistema de Equações, entre outros.

No caderno dos PCNs (BRASIL, 1998, p.40), destaca-se que um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações.

Segundo Carvalho e Aguiar (2008, p. 211 apud VERGNAUD, 1998), o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio por parte do aprendiz vai acontecendo ao longo de um extenso período de tempo, por meio da experiência, maturidade e aprendizagem. Os pesquisadores ainda consideram que na concepção de Vergnaud, o campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.

Dessa forma, a teoria dos campos conceituais, além de oferecer um caminho para a construção do conceito matemático, oferece importantes elementos para análise da competência e dificuldades dos alunos, constituindo uma ferramenta poderosa para a construção de diagnóstico a partir das estratégias adotadas por eles na resolução dos problemas.

Assim para Vergnaud é preciso interagir com o aluno com uma diversidade de situações para que os mesmos se apropriem de um dado conceito. Mas cada situação traz consigo vários conceitos, e daí a necessidade de uma visão integradora do conhecimento e uma formação no campo conceitual definido pelo autor.

Portanto, para Vergnaud (1988) um conceito nunca estará completo quando ele necessita de outros subconceitos que o compõem, que ainda não foram apreendidos pelos estudantes. Para ser mais completo o saber sobre o conceito, o estudante deve se apropriar desses complementos e incorporar ao novo conceito, esse é o processo que acompanha a aprendizagem. O problema do triângulo dá a eles essa possibilidade de ver em loco o que é um máximo e um mínimo. De forma contextualizada e por sua própria manipulação. Assim eles valorizam o conceito e sabe seu significado.

Apesar do tema acima discutido estar presente em nosso estudo, não vamos nos aprofundar nessa discussão sobre a teoria dos conceitos de Vergnaud.



## 4 Metodologia

Nesse capítulo, apresentamos as bases dos procedimentos da investigação sobre a compreensão e valorização pelos estudantes do ensino médio para o conceito de máximo e mínimo.

### 4.1 Local de aplicação do estudo

O campo de trabalho no qual aplicamos a sequência de atividades do estudo, foi na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Tristão Ferreira Bessa, que trabalha o nível de Ensino Médio. No colégio funcionam as modalidades: Semi-Integral, Regular e Travessia.<sup>1</sup>

O espaço físico consta de 11 (onze) salas de aulas, um laboratório de Informática, um laboratório de Física e um laboratório de Química. O colégio está localizado no município de Lagoa do Itaenga-PE, cidade distante 68 km de Recife.

Atualmente o corpo docente é formado por 30(trinta) professores, dos quais 5 (cinco) são graduados em Licenciatura em Matemática e com especialização. E 1(um) professor é Graduado em Licenciatura em Matemática e Doutorando.

### 4.2 Os sujeitos da pesquisa

Para nossa pesquisa foram selecionados 12 (doze) estudantes do Ensino Médio Semi-integral do 2º Ano C, da Escola Estadual Tristão Ferreira Bessa, que participaram inicialmente de uma reunião sobre algumas informações em que conversamos sobre a possibilidade da realização da pesquisa aos sábados e dos procedimentos de utilizar uma sequência de atividades através dos recursos: uso de papel e lápis, uso do GeoGebra e manipulação de material.

Na oportunidade foi conversado com os estudantes selecionados, se eles tinham estudado ou conheciam alguns tópicos da matemática que consideramos pré-requisito para resolver as situações-problema que seriam propostas. Também houve uma conversa com o professor de matemática da escola que leciona a esses alunos, o mesmo informou que trabalhou no 1º ano do Ensino Médio, o estudo do gráfico da função quadrática e o vértice da parábola, assim como sistema de equação lineares com 2 (duas) equações. Mas ainda não tinha estudado o tópico de geometria espacial e sistemas de equações lineares. Quanto à média geométrica e a desigualdade entre a média aritmética e geométrica, ele afirmou que esses estudos não foram abordados, apenas o estudos da média aritmética e ponderada.

---

<sup>1</sup> Travessia – Programa de Aceleração de Estudos de Pernambuco configura-se como uma política pública de ensino do governo de Pernambuco cuja finalidade é reduzir a defasagem idade/série dos estudantes do Ensino Médio da Rede Estadual de educação pública.

Diante da ausência de conhecimento matemático de alguns conteúdos, pré-requisitos, necessários e indispensáveis para a realização da sequência de problemas a ser investigados e do relato de alguns estudantes em ter dificuldades com os estudos da matemática e não estarem lembrados em como utilizar algumas relações matemáticas importantes para a resolução da mesma. Tratamos de trabalhar previamente uma breve revisão ou estudos teóricos sobre os itens 3.3.1; 3.3.2 e 3.3.3, presente na nossa dissertação com suas respectivas situações-problema nele contida.

A seleção dos estudantes decorreu a partir da observação de que os mesmos possuem conhecimento básico do uso do Software GeoGebra, pois o professor de matemática desses alunos no primeiro ano do Ensino Médio trabalhava com eles o uso dessa ferramenta para auxiliar no trabalho de alguns conteúdos matemáticos, e tal habilidade em software seria um pré-requisito para nossa investigação, visto que os estudantes teriam que utilizar esse software para desenvolver uma das atividades da sequência.

Outro fator importante a ser considerado para a seleção desses estudantes foi que eles deveriam residir na Zona Urbana de Lagoa de Itaênga, e que não deveriam ter atividades de trabalho aos sábados, pois é muito comum na região, os alunos exercerem ofícios nas feiras livres que acontecem aos sábados e este fator impossibilitaria a execução da pesquisa.

## 5 A sequência de atividades trabalhadas com os estudantes

Na concepção de sequência didática é importante salientar a importância do trabalho de Michèle Artigue quando constrói um estudo sobre Engenharia Didática como suporte teórico e metodológico na construção do conhecimento. Segundo Artigue (1995, pp.35-36),

A engenharia didática como metodologia de investigação, se caracteriza em primeiro lugar como um esquema experimental baseado nas realizações educacionais em sala de aula, isto é, na concepção, implementação, monitoramento e análise de sequências de ensino.

Nesse sentido a Engenharia Didática se caracteriza como atividade educacional que compreende plano de ensino e a criação de materiais didáticos baseados em esquema experimental e nas realizações didáticas em sala de aula. Por outro lado, tais atividades educacionais permitem uma validação interna a partir da confrontação das análises a priori e a posteriori.

Artigue (1995, pp.13-14) destaca que a Engenharia Didática passou a ser vista como uma prática de pesquisa ou de desenvolvimento de uma intervenção controlada tendo como base a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996a). Nesse entendimento as atividades a ser proposta, em sala de aula, devem ser concebidas como situações de aprendizagem.

Outra definição colocada por Peretti e Costa (2013, p. 6, apud ZABALA, 2007) é que uma “sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos.”

Acreditamos que o uso de uma sequência didática para investigar como os estudantes valorizam o conceito de máximo e mínimo pode ser um ponto de discussão importante, visto que proporciona um trabalho organizado e pautado em uma estratégia de ensino, que vai possibilitando o crescimento e o aprofundamento de conceitos e saberes, gradativamente, de acordo com as intervenções.

É comum se enfatizar que “através de uma sequência didática com foco também em atividades investigativas, a construção do conhecimento pode acontecer de modo a possibilitar a experimentação, generalização, abstração e a formação de significados” (PERETTI; TONIN DA COSTA, 2013, p. 8 apud LINS E GIMENEZ 2001).

Assim a opção por utilizar uma sequência de atividades para analisar a construção de conceitos e significados é uma prática que valorizou nosso experimento, uma vez que essa ferramenta permite a organização do trabalho pedagógico que queremos tratar, no sentido de podermos olhar sobre esse processo que permite analisar a construção do conhecimento dos

alunos.

A sequência didática proposta, foi planejada para discutir no ambiente escolar saberes relativos aos problemas matemáticos em diferentes níveis de dificuldades, ligados ao contexto real do aluno, com objetivo de entender como ele compreende e valoriza os conceitos de máximo e mínimo.

Ainda, cabe ressaltar, nesse trabalho, que serão considerados como valorização dos conceitos estudados, pelos alunos pesquisados, aquilo que for percebido em seus depoimentos ou nas realizações das atividades da sequência como: significativo, fundamental ou importante para sua formação. Cabendo também como valorização, a verificação pelo pesquisador que o aluno sente-se atraído pela possibilidade de se apropriar dos conceitos, máximo ou mínimo. Ou que a compreensão dos conceitos estudados ou a resolução de algum problema proposto na situação didática o leve a uma satisfação pessoal percebida pelo pesquisador, entre outras situações associadas nesse sentido.

A sequência foi trabalhada em 3 blocos de atividades, fotografada como registro da realização da sequência e aplicada pelo autor da dissertação na escola mencionada.

O 1º (primeiro) bloco de atividades foi vivenciado por duas atividades: o ‘problema do triângulo somatório de seis casas’ e o ‘problema do cercado’ que foram trabalhados com uso de lápis e papel.

Nessa fase foram distribuídas fichas com anotações das situações-problema. Os alunos trabalharam a atividade 1.a de forma individual e a atividade 1.b em grupos formados por 2 (dois) estudantes. As discussões ocorridas de forma individual e em cada grupo, nesse bloco de atividades assim como nos demais blocos, foram coletadas e armazenadas para posterior análise, como fruto dos saberes que necessitamos entender. Essas atividades foram vivenciada em 3 (três) hora/aula, com 50 minutos cada.

No 2º (segundo) bloco de atividade, foi vivenciado 1 (uma) situação-problema, na qual utilizamos o software GeoGebra. Nessa atividade os alunos trabalharam em duplas, em uma sala da escola, com notebooks no qual foi desenvolvida a atividade. Esta atividade teve duração de 1(uma) aula de 50 minutos.

No 3º (terceiro) bloco de atividades, foi vivenciada 1 (uma) atividade prática de manipulação, onde os alunos foram divididos em 4(quatro) grupos de 3 (três) estudantes na qual foi montado uma caixa sem tampa com papel folhas A4 de modo que o volume conseguido (capacidade de conter um produto), seja o maior possível.

Nessa atividade foram utilizados os seguintes recursos: tesoura, lápis, tubo de cola e régua de 30 cm, fazendo: Cortes, dobraduras e colagem simples, sob supervisão e orientação do professor pesquisador.

O desenvolvimento dessa atividade ocorreu em 3 fases as quais podem ser verificadas na

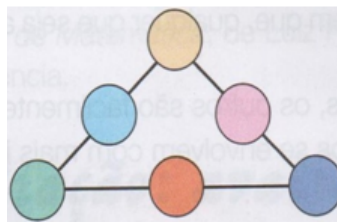


descrição do problema. Essas atividades foram vivenciadas em 3 (aulas ) de 50 minutos cada.

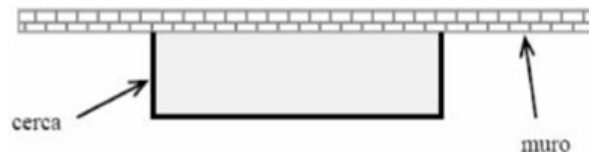
## ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA

### Problemas etapa 1:

- a) *Como devemos preencher em todos os lados do triângulo apresentado na figura, com os números da sequência (1, 2, 3, 4, 5 e 6), sem repetir nenhum número, de modo que em cada lado do triângulo tenha sempre a mesma soma?*



- b) *(PROFMAT- 2012) um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

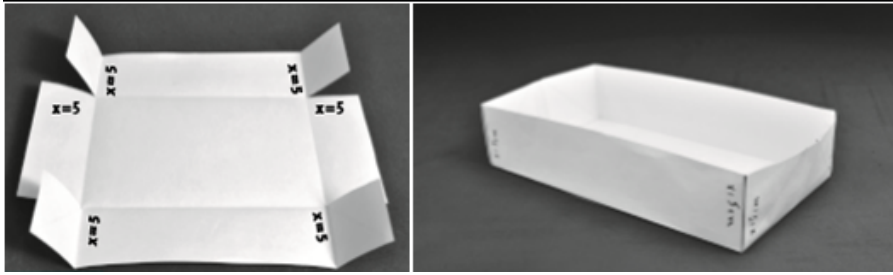


### Problema etapa 2:

*Crie uma representação no GeoGebra para indicar a solução do seguinte problema: O departamento de trânsito de certa cidade resolveu investigar em um final de semana qual seria a velocidade que os veículos passavam em certo cruzamento. Os resultados apontaram que entre 7 e 10 horas da manhã essa velocidade tinha uma característica e era dada pela função  $V(t) = -t^2 + 15t + 20$ , sendo  $V$  em km/h e  $t$  representando o número de horas do dia. Qual o instante desse intervalo variando de 7 a 10 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?*

### Problema etapa 3:

*(Matemática multimídia, 2009): Dada uma folha A4, qual a medida de  $x$  para que a caixa, sem tampa, obtida pela dobradura dos cantos, como indicado nas figuras a seguir, tenha o maior volume possível?*



## 5.1 Uma breve análise das soluções dos problemas da sequência.

Quanto ao problema 1.a da etapa 1, no item 3.3.3 do nosso trabalho já apresentamos uma boa discussão para este problema do triângulo de somatório, que deixa os estudantes em possibilidade de vivenciar o conceito de máximo e mínimo de forma concreta quando os valores dos vértices são analisados (considerando os maiores da sequência ou os menores números da sequência apresentada). Dessa forma, não nos deteremos aqui nesse propósito.

Quanto ao problema 1.b da etapa 1, problema do (PROFMAT-2012), em que um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.

Figura 15 – Representando a situação do problema



Fonte: Caderno de Prova do Exame Nacional de Acesso-2012-PROFMAT.

**Solução do problema 2 da etapa 1:** Vamos chamar de  $x$  os lados aparentemente menores da figura. Assim sendo, o terceiro lado do retângulo será representado como  $40 - 2x$ . Como a área de um retângulo é calculada fazendo o produto do comprimento pela largura, teremos  $A(x) = x \cdot (40 - 2x) = -2x^2 + 40x$ , ou seja, a área desse retângulo representa uma função quadrática representada pela expressão

$$A(x) = -2x^2 + 40x,$$

cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, dessa forma a função apresenta um ponto de máximo. Sendo assim, para encontrar as dimensões desse retângulo que torna sua área máxima, precisamos encontrar o valor de  $x_v$  da função  $A(x)$ .

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = \frac{-40}{-4} = 10, \text{ isto é } x_v = 10m.$$

Logo, substituindo esse valor em

$$40 - 2x = 40 - 2 \cdot 10 = 40 - 20 = 20, \text{ isto é, } 20m \text{ é a outra dimensão do retângulo.}$$

Portanto, as dimensões do retângulo que tornam a área máxima são  $10m$  de largura por  $20m$  de comprimento.

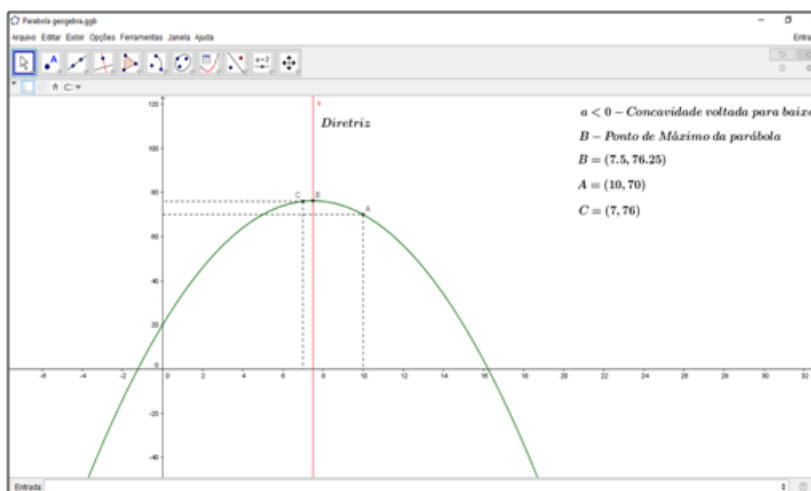
Nessa atividade, buscamos verificar como os alunos a partir de uma situação-problema do cotidiano que envolve o conceito de máximo e mínimo compreendem e valorizam esse conceito no ensino de matemática.

Quanto ao problema 3 da etapa 2, problema da velocidade dos veículos em certo cruzamento, em que é solicitado aos alunos com auxílio do software GeoGebra, que apresente uma representação da solução para seguinte situação:

*P – Crie uma representação no GeoGebra para indicar a solução do seguinte problema: O departamento de trânsito de certa cidade resolveu investigar em um final de semana qual seria a velocidade que os veículos passavam em certo cruzamento. Os resultados apontaram que entre 7 e 10 horas da manhã essa velocidade tinha uma característica e era dada pela função  $V(t) = -t^2 + 15t + 20$ , sendo  $V$  em km/h e  $t$  representando o número de horas do dia. Qual o instante desse intervalo variando de 7 a 10 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?*

Nessa atividade esperamos que os alunos possam construir representações gráficas, tabelas ou simulações com auxílio das ferramentas disponíveis no software GeoGebra e apresentem solução da situação-problema proposta. Buscamos colocar o aluno diante de uma situação “concreta” do seu dia a dia e com isso verificar qual o nível de compreensão e a valorização que eles dão ao conceito de máximo e mínimo presente na situação matemática.

Figura 16 – Gráfico representando as velocidades de veículos passando em certo cruzamento.

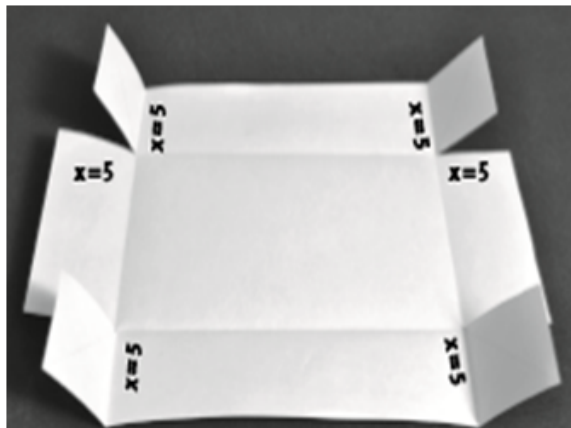


Fonte: Construída através do software GeoGebra pelo autor.

Quanto ao item trabalhado na fase 3:

(Matemática multimídia, 2009) Dada uma folha de papel A4, qual a medida de corte  $x$  para que a caixa, sem tampa, obtida pela dobradura dos cantos, como indicado nas figuras a seguir, tenha o maior volume possível?

Figura 17 – Visualização da folha A4 cortada nas laterais para montagem da caixa.



Fonte:< <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367>> Acesso em 04 de novembro de 2016.

Figura 18 – Caixa sem tampa já montada a partir de uma folha A4.



Fonte:< <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367> > Acesso em 04 de novembro de 2016.

Nessa atividade será discutido o conceito de volume máximo, obtido da construção das caixas a partir da folha de papel A4. Dessa forma, descrevemos a seguir como ocorreu essa atividade.

### **Construção da caixa de papel e percepção visual do aluno.**

Em posse dos seguintes materiais: Folhas A4, tesoura, lápis, tubo de cola e régua de 30 cm. Os alunos divididos em grupos de 3 (três), foram entregues para cada grupo 6 (seis) folha A4. Os alunos realizaram, sob supervisão do pesquisador, os seguintes procedimentos:

1. Fazer, com o auxílio de régua, quadrados de lado  $x$  nos quatro cantos da folha A4. Anote, próximo ao lado desse quadrado, o valor de  $x$  utilizado. Por último, pra montar a caixa, corte um dos lados de cada um dos quadrados, como mostram as figuras 19 ; 20 ; 21 e 22.

Figura 19 – Folha A4 sendo construído quadrados nos cantos de lado 5 cm.



Fonte:< <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367>> Acesso em 04 de novembro de 2016.

Figura 20 – Folha A4 sendo dobradas nas laterais.



Fonte:< <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367>> Acesso em 04 de novembro de 2016.

Figura 21 – Folha A4 sendo cortada.



Fonte:< <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367>> Acesso em 04 de novembro de 2016.

- 2 . Colar a face do quadrado de forma a montar uma caixa. Faça isso com todos os quadrados. A caixa ficará como mostram as figuras 23 e 24 Observação: ao cortar em um dos lados do quadrado, devemos considerar a colagem que será feita a seguir. Se  $x \geq 7$ , teremos que o corte deverá ser no lado paralelo ao lado menor da folha A4.

Figura 22 – Folha A4 cortada nas laterais.



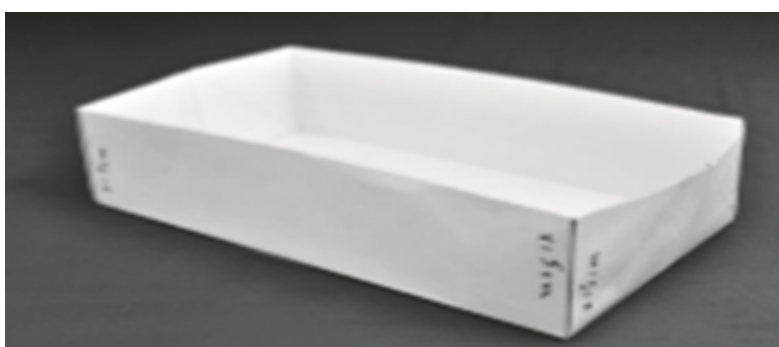
Fonte: < <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367> > Acesso em 04 de novembro de 2016.

Figura 23 – Folha A4 sendo dobrada nas laterais.



Fonte: < <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367> > Acesso em 04 de novembro de 2016.

Figura 24 – Caixa sem tampa formada por uma folha A4.



Fonte: < <http://m3.ime.unicampe.br/recursos/1367> > Acesso em 04 de novembro de 2016.

### Comparação dos volumes

Cada grupo construiu seis caixas, escolhendo para cada uma delas diferentes valores de  $x$ . Depois, colocando-as uma ao lado da outra, o grupo discutiu e tentou descobrir qual delas tem maior volume. Feito isso, eles as enumeraram em relação ao volume, do maior para o menor. Essa numeração serviu de registro para a verificação da percepção visual dos alunos acerca dos

volumes das caixas.

### Cálculo do volume

Chamaremos de 1<sup>o</sup> numeração aquela realizada na fase 1, na qual os alunos ordenaram as caixas com base em suas percepções visuais e as classificaram em relação aos seus volumes. Nesta parte da atividade, os alunos calcularam os volumes das caixas algebricamente e as chamaremos de 2<sup>o</sup> numeração. Para isso, com o auxílio de uma régua, mediram o comprimento, a largura e a altura de cada caixa. Depois de calculados os volumes de todas as caixas, os alunos realizaram a 2<sup>o</sup> numeração, do maior para o menor volume obtido. Neste momento, eles puderam comparar a percepção visual que têm do volume com o seu valor real. Com os dados obtidos, eles fizeram uma tabela como mostrado na tabela 3.

Tabela 3 – Tabela preenchida com dados fornecidos pelo grupo A com volumes das caixas.

caixas			
Enumeração 1	Enumeração 2	Altura E 2	Volume E 2
1 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4cm	1128,4cm <sup>3</sup>
2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5cm	1083,5cm <sup>3</sup>
3 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3cm	1066,5cm <sup>3</sup>
4 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	2,5cm	988cm <sup>3</sup>
5 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	7cm	769,3cm <sup>3</sup>
6 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	8cm	548cm <sup>3</sup>

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Após a confecção dessa tabela, os grupos esboçaram o gráfico do volume da caixa em função de sua altura  $x$  em um sistema de eixos de coordenadas. Quando terminaram o esboço, os alunos foram questionados com a seguinte pergunta: qual seria o maior volume possível? Esta caixa com o maior volume está entre as que vocês obtiveram ou alguma outra que vocês desconhecem?

### Socialização dos dados e fechamento da atividade

Nesse momento, foram reunidos os dados obtidos pelos diversos grupos e fizemos um gráfico (volume  $x$  altura), figura 34, na lousa. A partir dele, identificamos qual dos grupos obteve a melhor estimativa ou construiu a caixa com maior volume, que são aproximadamente 1144cm<sup>3</sup>, e foi observado com o gráfico, que o valor aproximado de  $x$  para essa caixa é 4cm percebido na caixa com essa medida.

Antes de fazer o cálculo do volume, por que vocês, alunos, achavam que a caixa escolhida visualmente possuía maior volume?

Neste caso, o volume da caixa é o produto:

$$V = A \cdot B \cdot C$$

Onde,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são as medidas das arestas da caixa.

Sendo a construção feita a partir de uma folha de lados  $a$  e  $b$ , temos:

$$A = a - 2x$$

$$B = b - 2x$$

$$C = x$$

Identificando  $x$  como a altura da caixa, concluímos que seu volume é caracterizado pela função

$$V(x) = (a - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x$$

Supondo  $a < b$ , temos que a altura  $x$  pertence ao intervalo

$$0 < x < \frac{a}{2}$$

## 5.2 Análise e discussão dos dados

Nesse capítulo apresentamos os dados coletados através de produções, observações, registros em papel, discussões realizadas entre os estudantes e entre os estudantes e o professor pesquisador. Este último ocorreu ao longo dos questionamentos e discussões durante os estudos ou revisões dos itens 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 realizadas com esses estudantes na escola mencionada com auxílio do datashow.

O acompanhamento das atividades, foi realizado no sentido de que não houvesse interferência, isto é, sem nenhuma informação prévia que levasse os estudantes a responder as situações propostas. Apenas orientamos sobre algumas indagações relevantes a outras ações feitas por eles quando necessário. Desta forma, a atuação do pesquisador ficou restrita a responder apenas as solicitações dos estudantes em casos de extrema necessidade e de forma que a imparcialidade prevalecesse para não influenciar no resultado da atividade.

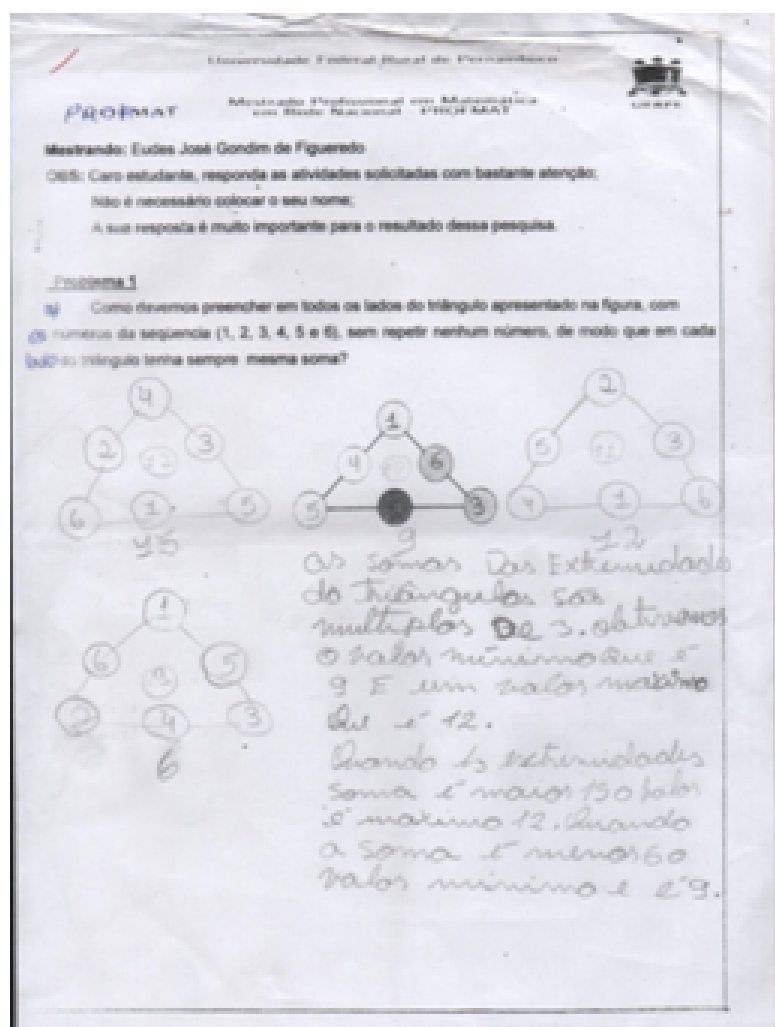
Na investigação dos dados foram analisadas as estratégias utilizadas pelos estudantes para obtenção da solução das situações propostas, o nível de entendimento, a compreensão e a valorização dada por eles aos conceitos que buscamos entender e que são abordados em atividades matemática do Ensino Médio.

**Problema 1.a:** Nessa atividade, Somatório Triangular, cada um dos estudantes recebeu uma folha com a situação-problema e foram informados que deveriam realizar individualmente. Enfatizamos que essa atividade já tinha sido trabalhada com esses estudantes no início do semestre, no qual não enfatizamos os conceitos de máximo e mínimo, apenas exploramos a resolução do problema.



Analisando os dados obtidos nessa atividade, dos 12 estudantes selecionados, apenas cinco desenvolveram pelo método da tentativa e erro, e todos apresentaram as quatro possíveis soluções quanto ao preenchimento correto dos lados do triângulo, apresentando as suas respectivas somas constantes 9, 10, 11 e 12. Após essas soluções eles deixaram uma anotação na folha de atividade. Duas anotações relacionaram a soma dos vértices desses triângulos como sendo múltiplo de 3 (três) e ainda destacaram que essa soma está relacionada com a soma constante dos lados do triângulo, isto é, se os vértices possuírem soma mínima a constante assumirá um valor mínimo ou se os vértices possuírem soma máxima a constante assumirá um valor máximo.

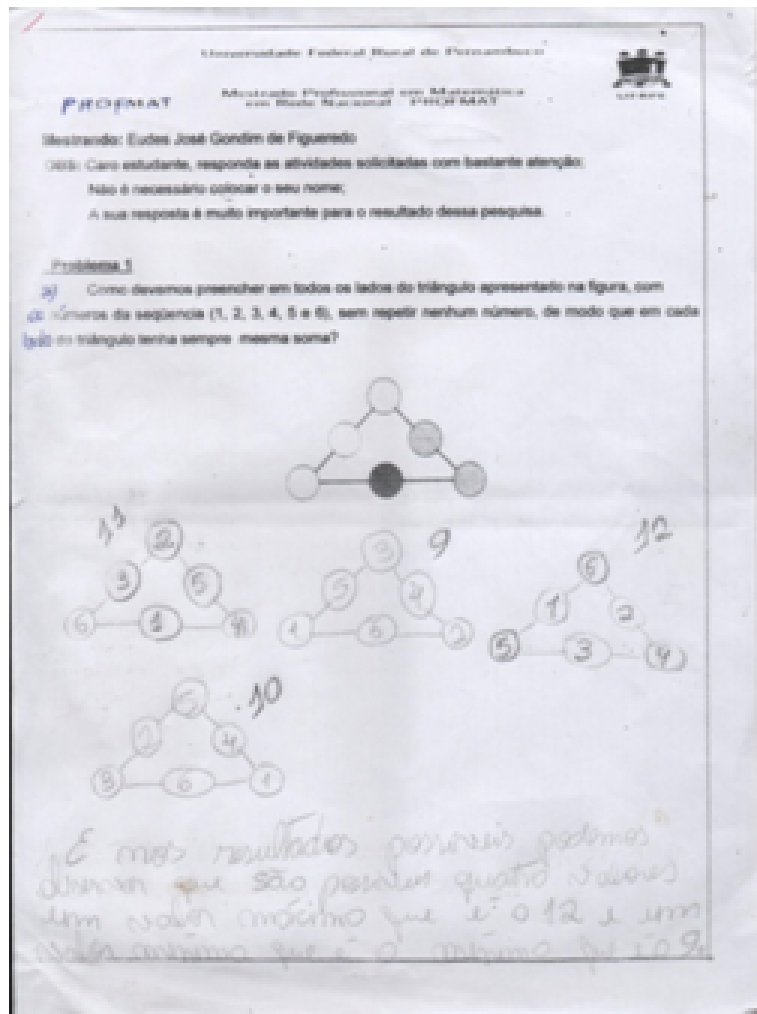
Figura 25 – Folha de resposta do aluno A1 analisando os vértices com as somas constantes dos triângulos.



Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

Outros três alunos destacaram que entre as quatro possibilidades para a soma, a constante 9 (nove) seria a menor e 12 (doze) seria a maior possível para os lados.

Figura 26 – Folha de resposta do aluno A2 analisando as somas constantes.



Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

Sete alunos desenvolveram a situação utilizando sistemas de equações como proposto no item 3.3.3, encontrando a equação polinomial abaixo, da mesma forma que tínhamos trabalhado em um breve relato sobre esse tipo de atividade

$$k = 7 + \frac{x + y + z}{3}$$

Percebemos que  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as variáveis dos vértices do triângulo. Três deles deixaram anotados, em síntese, na folha de atividade que  $x + y + z$  devem ser múltiplo de 3. E todos os setes estudantes concluíram a soma constante, 9, 10, 11 e 12, fazendo combinações e destacando 9 como menor soma e 12 como a maior soma para os lados do triângulo.

Figura 27 – Folha de resposta do aluno A3 analisando algebricamente a soma constante dos triângulos.

The image shows a student's handwritten solution to a math problem. At the top, the header of the document is visible, including the name of the institution: 'Universidade Federal Rural de Pernambuco' and the course: 'Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT'. The problem is titled 'Problema 1' and asks for a constant sum 'K' for a triangle with vertices X, Y, and Z, where each side has two nodes. The student has drawn a triangle with nodes X, Y, Z at the vertices and nodes a, b, c, z, y, x on the sides. The student's work includes:

- Handwritten equations for the sides:  $X + a + Y = K$ ,  $X + b + z = K$ , and  $Y + c + z = K$ .
- A system of equations:  $2X + 2Y + 2Z + a + b + c = 3K$ .
- A derivation:  $3K = 2(7 + X + Y + Z)$ , leading to  $K = \frac{2(7 + X + Y + Z)}{3}$ .
- Another derivation:  $K = 7 + \frac{X + Y + Z}{3}$ .
- Examples of sums:  $1 + 2 + 3 = 6$ ,  $2 + 3 + 4 = 9$ ,  $3 + 4 + 5 = 12$ , and  $4 + 5 + 6 = 15$ .
- The student concludes with 'maior soma' (largest sum).

Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

As abordagens, estratégias e compreensão apresentadas por esses 12 estudantes, a partir de suas produções, foram:

- Utilizando o método da tentativa e erro, dentre os quais:

Dois estudantes analisando os vértices e as somas constantes por meio desses valores indicaram perceber que há a presença do conceito de máximo e mínimo;

Três estudantes analisando as somas constantes encontradas e com base nesses valores relacionaram aos conceitos de máximo e mínimo.

- Via sistema de equações, dentre os quais:

Três estudantes analisando a equação polinomial encontrada

$$k = 7 + \frac{x + y + z}{3},$$

associaram os valores dos vértices como sendo múltiplo de três e por meio dessa informação encontraram as quatro somas constantes e ainda indicaram sua menor e maior soma para as constantes;

Quatro estudantes analisando a equação polinomial e fazendo algumas combinações possíveis para os valores dos vértices, perceberam que as somas para os vértices nesses casos só podem ser múltiplo de três, do mesmo modo que tínhamos trabalhado em um curto relato, na revisão teórica do item 3.3.3, e indicaram a maior e a menor soma para as constantes.

Os resultados para essa atividade, já eram esperados pelo pesquisador pelo fato que essa discussão ter sido trabalhada na escola como um exercício.

Dessa forma, nessa atividade, as observações feitas para as discussões realizadas no estudo apontam que os estudantes se apropriaram desses conceitos e passaram a valorizar ou reconhecer o que seria um valor máximo e o que seria um valor mínimo através de suas próprias manipulações. Além disso, se observou durante as discussões certa satisfação dos mesmos na compreensão desses conceitos em atividade e abordagem não convencional, ou seja, atividade e abordagem que segundo eles são vivenciadas na escola, mas que não dão importância pela forma como o professor trabalha, apenas explorando como mais um exercício de matemática, pois não é comum serem vivenciadas da forma como foi feita. Assim, tal resultado responde aos objetivos esperados no estudo.

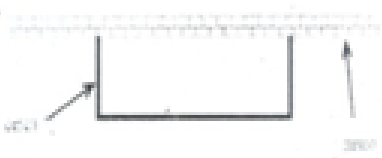
**Problema 1.b:** Nessa atividade, caracterizada como o problema do cercado, foram solicitados aos estudantes que formassem duplas e que cada dupla deveria ser fixa até o término das atividades. Além disso, as duplas foram informadas que só podiam conversar entre si, caso houvesse necessidade em relação a alguma dúvida quanto à atividade eles podiam perguntar apenas ao professor pesquisador. Também foi convencionado nessa e na próxima atividade que as duplas seriam representadas por A, B, C, D, E e F.

Análise dos dados obtidos pela dupla C.

Essa dupla não conseguiu desenvolver a atividade, pois se mostraram confusos e indecisos sobre o que fazer para resolver o problema. Eles diziam que a adição de uma largura com o comprimento do retângulo seria  $40m$ , já em outro momento falavam que as quatro dimensões do retângulo seriam  $40m$ . Observamos claramente que a dupla não compreendeu muito bem o problema. O registro deixado pela dupla na folha de atividades mostra claramente as dificuldades enfrentadas por eles, quanto à compreensão e cálculos básicos de matemática.

Figura 28 – Folha de resposta da duplas C, analisando o problema 1.b

b) (PROFMAT- 2012) um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.



40m  
 $x + y = 40$   
 $x + x + y = 40$   
 $2x + 40 = -40$   
 $2x = 40 + 40$   
 $\frac{-2x}{2} = \frac{80}{2}$   
 $x = 40$

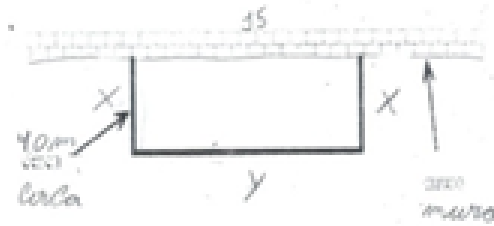
Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

Análise dos dados obtidos pelas duplas A, B, D, E e F.

Todas as demais duplas conseguiram desenvolver corretamente o problema, ou seja, encontrou com sucesso os lados do retângulo que o tornam máximo. As estratégias adotadas por essas duplas foram parecidas, isto é, após encontrar a função quadrática que modela o problema eles encontraram o valor de  $x_v = 10m$ , correspondente as larguras comuns do retângulo de maior área, e depois de algumas tentativas decidiram em utilizar a equação do primeiro grau, associada às dimensões do retângulo e o cercado, construída por eles para finalizar o problema. Nesse momento se observa uma valorização do conceito estudado por esses estudantes para desenvolver a situação proposta no contexto teórico relacionado à situação prática.

Figura 29 – Folha de resposta da duplas A, analisando o problema 1.b

b) (PROFMAT- 2012) um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40 m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40 m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.



$x + x + y = 40$   
 $2x + y = 40$   
 $y = 40 - 2x$

$A_{R} = b \cdot h$   
 $A_{R} = (40 - 2x) \cdot x$   
 $A_{R} = 40x - 2x^2$   
 $A_{R} = 40x - 2x^2$

$A = -2$   
 $B = 40$   
 $C = 0$

$\frac{-B}{2 \cdot A}$   
 $\frac{-40}{2 \cdot (-2)}$   
 $\frac{-40}{-4} = 10$

$y = 40 - 2 \cdot 10$   
 $y = 40 - 20$   
 $y = 20$

Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

**Problema 2:** Nessa atividade, caracterizada como a velocidade no cruzamento, em que foi solicitado as duplas já formadas para a atividade que criassem uma representação no GeoGebra no sentido de representar a solução do problema proposto.

Ocorreu antes da sua realização uma breve intervenção, pois foi realizada, em síntese, com auxílio do datashow uma breve revisão teórica da versão  $N^{\circ} 5$  do software GeoGebra para revisar o uso de suas barras de ferramentas, menus, janela de álgebra, janelas de visualização e campo de entrada. Pois alguns alunos relataram que ainda não tiveram um contato seguro com essa versão do software no corrente ano de 2017 e gostariam de uma breve revisão antes da realização da atividade.

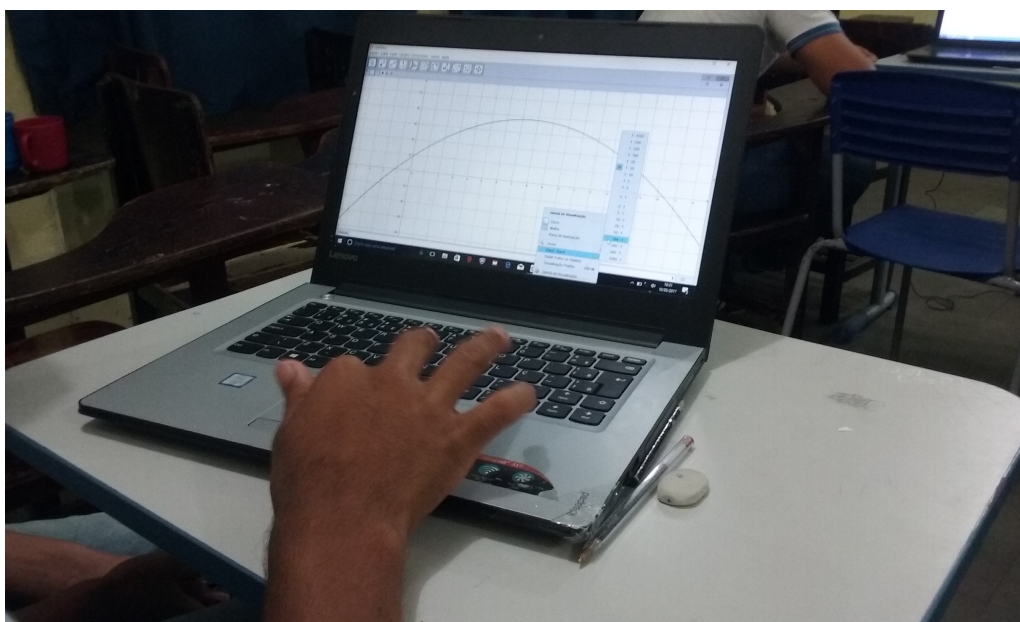
Dado um grande imprevisto na sala de informática da referida escola, isto é, por motivo de uma provável descarga na rede elétrica da escola, todos os computadores do laboratório deixaram de funcionar. E segundo a gestora da escola a previsão para o conserto era incerta, uma vez que a escola não dispõe de recursos financeiros suficientes. Esse fato prejudicou em parte nosso

objetivo. Portanto, como saída solicitamos aos estudantes que tinham notebook ou pudessem conseguir emprestado que o fizessem para darmos andamento as atividades. Posteriormente, a realização da atividade ocorreu em uma sala de aula com utilização de 06 (seis) notebooks, sendo dois notebooks cedidos pela escola, dois notebooks do pesquisador, um notebook cedido por um professor da escola e um notebook de uma das alunas participante da pesquisa.

As duplas, A, B, C, D, E e F, já estabelecidas receberam o problema relativo as velocidades dos veículos no cruzamento. Após ler e discutir entre si a situação apresentada, os participantes construíram as representações necessárias, analisando cada construção, em duplas, e em seguida compartilharam suas conclusões com o pesquisador.

Todas as duplas apontaram as maiores e menores velocidades nos instantes solicitados pelo problema. Percebeu-se que essas duplas, de fato, compreendem e valorizam os conceitos estudados e, além disso, a valorização é percebida ao relacionar uma situação real simulada no software.

Figura 30 – A dupla D utilizando GeoGebra na resolução do problema 2.



Fonte: autor a partir do material do aluno (2017).

**Problema 3:** Nessa atividade, construção da caixa de papel por recorte e dobraduras, os alunos foram solicitados a formarem grupos com três estudantes para a realização da tarefa, aos quais chamaremos de grupos A, B, C e D. Com o auxílio do datashow foi apresentado o problema e as etapas de construção da mesma. No experimento utilizamos folhas de papel A4 medindo  $(21\text{cm} \times 29,7\text{cm})$ .

Antes de iniciarem os cortes na folha, foi discutido com os estudantes que, sendo  $a$  o menor lado da folha, o corte de medida  $x$  deve ser:  $0 < x < \frac{a}{2}$ , pois se  $a = 0$  ou  $a = \frac{a}{2}$  não

haverá volume algum.

**Primeira parte da atividade:** Construção e classificação das caixas em ordem decrescente dos volumes de acordo com a percepção visual de cada grupo.

Após algumas discussões entre os grupos verificou-se que os mesmos construíram caixas com as seguintes alturas:

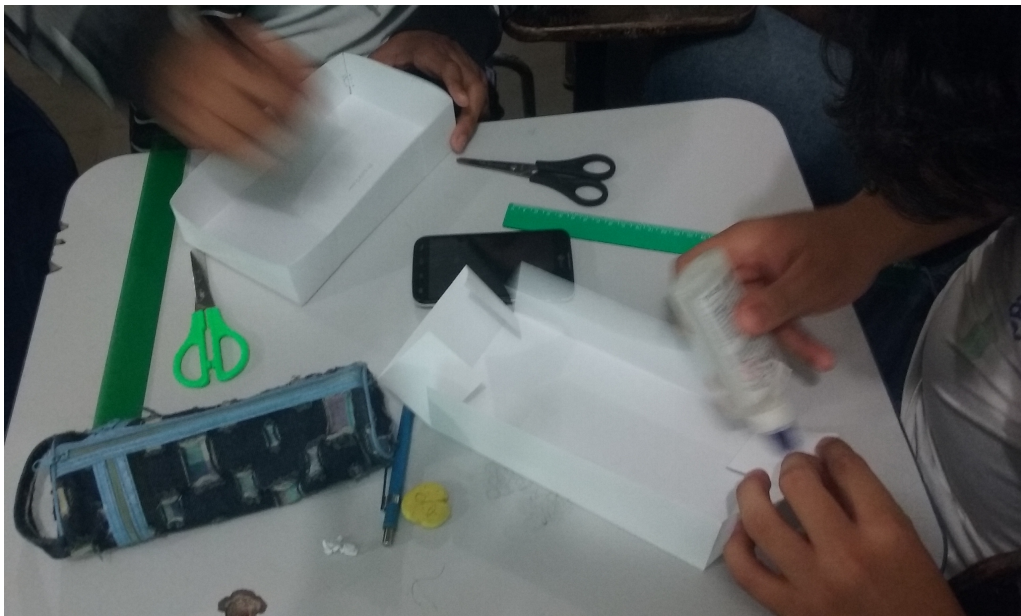
**Grupo A:** 2,5 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 7 cm e 8 cm.

**Grupo B:** 2 cm; 2,5 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm e 6 cm.

**Grupo C:** 1 cm; 2 cm; 3,1 cm; 4 cm, 6,2 cm e 8 cm.

**Grupo D:** 2 cm; 3 cm; 3,5 cm; 4,5 cm; 5 cm e 6 cm.

Figura 31 – O grupo C, construindo as caixas do problema 3.



Fonte: Arquivo do professor pesquisador (2017).

Classificação das caixas, em ordem decrescente dos volumes de acordo com a percepção visual de cada equipe, primeira enumeração. Mas por conveniência apresentamos às enumerações dessas caixas segundo suas alturas na ordem citada.

**Grupo A:** 2,5 cm; 3 cm; 4 cm; 5 cm; 7 cm e 8cm.

**Grupo B:** 6 cm; 5cm cm; 4 cm; 3 cm; 2,5 cm e 2cm.

**Grupo C:** 1 cm, 2 cm, 3,1 cm; 4 cm; 6,2 cm e 8 cm.

**Grupo D:** 6 cm; 5 cm; 4,5 cm; 3 cm; 3,5 cm e 2cm.

Nessas situações, construção e classificação das caixas, foi observada em síntese, que os estudantes dos grupos divergiam na escolha da caixa de maior volume. Notamos que nesse



momento havia uma valorização pelo conceito de Máximo e Mínimo. Eles ficavam tentando relacionar esse valor as arestas do bloco, isto é, ora esse valor estava condicionado ao bloco de maior comprimento, de maior largura ou de maior altura. Mostravam ainda não ter conhecimento sobre qual aresta e suas relações poderiam dar o significado do maior volume.

Figura 32 – Visualização da ordenação das caixas para identificação dos volumes, de acordo com a percepção visual dos estudantes.



Fonte: Arquivo do professor pesquisador (2017).

Um questionamento foi feito aos grupos, após eles concluírem essa etapa: Por que vocês acreditam que essa primeira caixa escolhida possui maior volume? As respostas continuaram divergindo entre os grupos em que apontavam às dimensões do bloco construído, como o comprimento, largura ou altura, onde podemos observar nos dados anteriores.

**Segunda parte da atividade:** Cálculo das medidas das arestas, volumes e segunda enumeração das caixas.

**Grupo A:** 4 cm; 5 cm; 3 cm 2,5 cm; 7 cm e **8 cm**.

**Grupo B:** 4 cm;**5 cm**; 3 cm; 2,5 cm; 6 cm e **2 cm**.

**Grupo A:** 4 cm; 3,1 cm; 6,2 cm; 2 cm; 8 cm e 1 cm.

**Grupo A:** 4,5 cm; 3,5 cm; 3 cm; 5 cm; 6 cm e **2 cm**.

De acordo com os dados e as observações realizadas em sala no momento dessa etapa da atividade 3. Observamos que os estudantes ficaram surpresos com os resultados na comparação das duas enumerações, isto é, classificação em ordem decrescente dos volumes de acordo com suas percepções visuais e o valor real. No qual, nenhum grupo conseguiu identificar a caixa

de maior volume, segundo suas concepções prévias realizadas de forma visual. Isso os levou a refletir e iniciar uma curta discussão da importância desse pensamento matemático, ou seja, quanto ao uso de máximo e mínimo no cotidiano e nesse momento se percebeu uma forte valorização desse conceito matemático quando relacionados à teoria, prática e cotidiano.

Figura 33 – Caixas Ordenadas em ordem decrescente dos volumes.



Fonte: Arquivo do professor pesquisador (2017).

### **Esboço do gráfico do volume da caixa em função de sua altura $x$ em um sistema de eixos de coordenadas.**

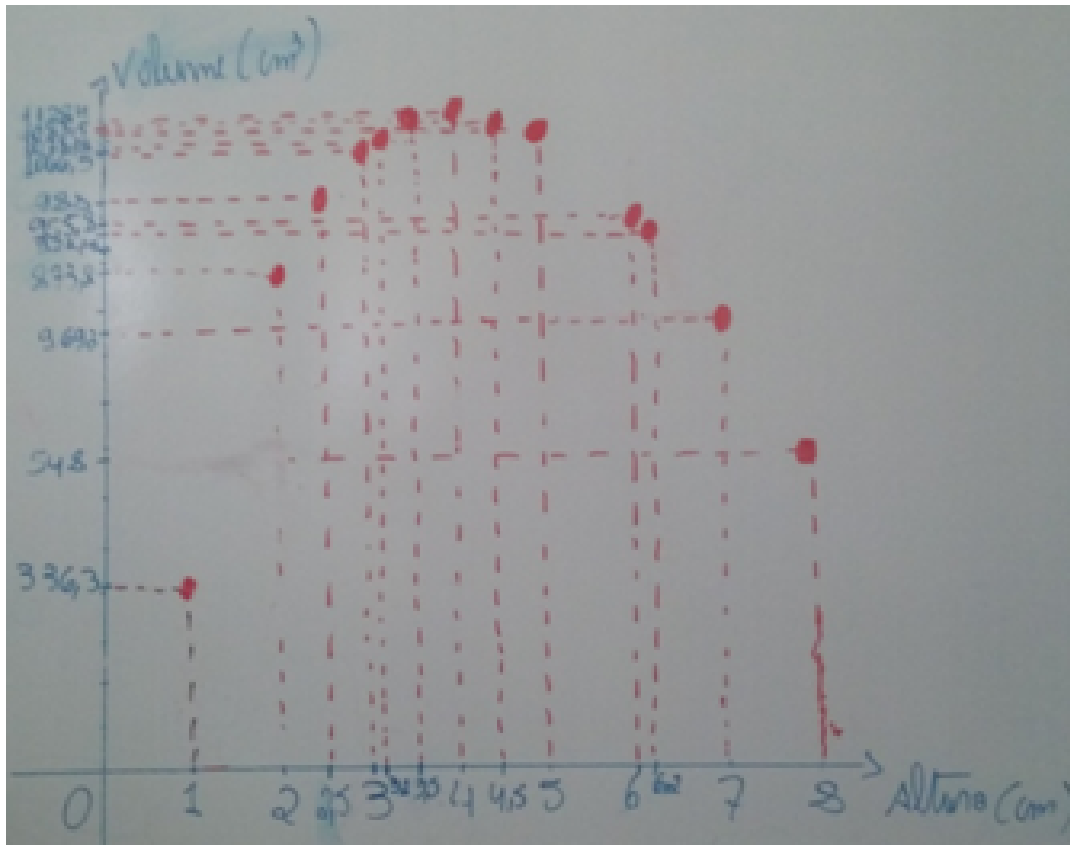
Após a realização da etapa anterior, foi solicitado a cada grupo que construíssem no papel um esboço do gráfico do volume da caixa em função de sua altura  $x$  em um sistema de eixos de coordenadas. Em seguida os grupos foram questionados com a seguinte pergunta: com base no gráfico traçado pelos estudantes, é possível dizer se existe uma caixa com um volume maior do que o informado por vocês?

Após a visualização dos gráficos construídos por cada grupo e a partir de algumas discussões, três dos grupos A, B e D, relataram que sim, ou seja, deve existir tal caixa. Segundo esses grupos A, B e D suas respostas devem-se ao fato que os gráficos construídos, por eles, foram todos com pontos no plano com representação semelhante a uma parábola e por isso, segundo suas percepções preliminares visuais do gráfico devem existir alguma caixa que possua volume maior dentre as construídas. O grupo C falou que não, pois a maior caixa seria a que possui altura  $4\text{cm}$ . Esse grupo C informou que sua resposta foi dada com base na visualização do gráfico e com uma caixa com essa altura construída por eles.

### Socialização dos dados e fechamento da atividade

Após as discussões anteriores foram reunidos todos os dados obtidos pelos quatro grupos e foi construído o gráfico, volume  $X$  altura, na lousa e a partir dele os estudantes observaram qual dos grupos obteve a melhor estimativa ou construiu a caixa de maior volume.

Figura 34 – Esboço do gráfico (Volume  $X$  Altura) construído na lousa.



Fonte: Autor a partir dos dados fornecidos pelos alunos (2017).

Nessa ocasião da socialização da atividade 3 em que foi explorado, via gráfico, os conceitos abordados. Esta socialização contribuiu significativamente, pois se percebeu uma compreensão e valorização dos conceitos de máximo e mínimo por partes desses estudantes.



# Resultados

O conhecimento de Máximo e Mínimo desenvolvido na escola, a partir das aulas de matemática, torna-se importante na vida dos estudantes, pois tais conceitos estão presentes em várias outras áreas do saber e, em várias atividades do mundo moderno, como: no comércio, na indústria, no esporte, entre outras situações.

A proposta de atividades possibilitou ao pesquisador identificar as possíveis dificuldades que ocorrem na compreensão e valorização desse conceito entre os estudantes do ensino médio, como a ausência de outros processos metodológicos que reforcem a comparação do conceito compreendido.

Constatamos também que na escola, o currículo estabelecido para programação desse conteúdo escolar não é obrigatório. Ficando a critério do professor dependendo de uma situação pedagógica abordá-lo. Quando discutido pelo professor, o mesmo utiliza pouco tempo de estudo para o conceito de Máximo e Mínimo. Por isso, a compreensão e valorização por parte dos estudantes a esses conceitos ficam comprometida.

Ficou nítido que a utilização de várias abordagens metodológicas para explorar o conceito de Máximo e Mínimo, consegue mostrar que os estudantes passam a inferir, comparar e explorar tal conceito de forma mais significativa.

Notamos que o conceito de Máximo e Mínimo são percebidos como de grande complexidade pelos estudantes. Identifica-se na escola, através de relato dos estudantes, que essa complexidade parece não ser percebida pelos professores e o mesmo trabalha de forma a não caracterizar o significado que ele merece nas atividades que são exploradas com os estudantes.

Observamos durante a resolução da sequência didática, algumas dificuldades enfrentadas por alguns alunos em desenvolver cálculos algébricos, por exemplo, solucionar uma equação do primeiro ou segundo grau. Isso prejudicou em parte, um melhor aproveitamento desses alunos quanto ao tópico abordado e aos objetivos pesquisados.

Ficou claro que os tipos de situações selecionadas na sequência e a realização de algumas atividades em grupos, colaboraram para um melhor aproveitamento desses estudantes, levando os mesmos a uma melhor compreensão e valorização dos conceitos abordados.

Devemos discutir o fato de que o professor não vem trabalhando às várias formas de exploração e abordagens desse conteúdo na escola.

Outro fato é que por não se trabalhar às várias formas de exploração e abordagens desse conteúdo na escola, deixa-se uma lacuna no aprendizado dos estudantes, impedindo uma compreensão e valorização desse conteúdo.



## Considerações finais

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma análise de como os conceitos de máximo e mínimo está sendo ministrada na escola, uma reflexão quantos aos benefícios dos diferentes recursos didáticos utilizados no sentido de colaborarem para um maior aproveitamento dos alunos, no entendimento de promover uma aprendizagem significativa proporcionando desta forma uma melhor compreensão e valorização dos conceitos estudados.

O estudo possibilita novas abordagens no sentido de investigar o trabalho do professor quanto as suas metodologias empregadas para esse conteúdo em sala de aula, ou ainda que importância o professor promove a esse saber matemático bastante presente no nosso cotidiano.

De um modo geral os alunos participantes da pesquisa demonstraram que compreenderam e valorizaram os conceitos abordados em atividades da matemática, envolvendo situações do cotidiano, quando trabalhada com diferentes recursos didáticos. Além disso, eles demonstraram interesse em continuar os estudos desse tópico em série posteriores.

O uso do lápis e papel nas atividades do triângulo somatório e o problema do cercado permitiram aos alunos, analisar, identificar e compreender o que seria um valor máximo e um valor mínimo, além disso, se percebeu uma valorização desses conceitos diante de suas falas.

O uso do software GeoGebra contribuiu para enriquecer a compreensão e valorização dos conceitos vivenciados. Uma vez que os alunos em dupla puderam observar, analisar, comparar e identificar esses valores através desse recurso em uma simulação virtual envolvendo uma atividade 'próxima' do seu cotidiano.

O uso de material manipulável forneceu aos estudantes um ambiente enriquecedor e motivador da aprendizagem, constituindo dessa forma como um recurso excepcional, onde foi verificado que os alunos de fato se apropriaram e valorizaram os conceitos estudados.

Em estudo posterior, deixamos como sugestão para o leitor verificar e aprofundar os estudos e abordagens no problema do triângulo somatório de seis casas, em outro(s) campo(s) numérico(s), a ser trabalhada na Educação Básica ao Ensino Superior, e que possam provocar competências e habilidades nos estudantes no sentido de garantir um ensino de maior qualidade.

Outra proposta que podemos buscar em um estudo mais aprofundado é verificar se os estudantes classificam o conceito de Máximo e Mínimo como um saber do cotidiano ou puramente matemático. Pois, ao não dar a importância devida de sua presença no dia a dia, o conceito passa a ser percebido apenas como um saber do campo matemático, sem de fato, ter uma valorização como um saber incorporado às situações cotidianas.

Finalmente, de um modo geral, como proposto no nosso maior objetivo, a utilização de uma sequência de atividades com variados recursos didáticos, ficou evidente que efetivamente

proporciona uma melhor aprendizagem significativa, no sentido de assegurar aos alunos uma melhor compreensão e valorização desses conceitos estudados.



# Refêrencias

ARTIGUE, M. Ingenieríe Didática. In ARTIGUE, M. DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. **Ingenieríe Didáctica en educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, p.33-56,1995. Disponível em: <http://funes.unidades.edu.co/676/1/Artigueetal.195.pdf>. Acesso em: 07/02/2017.

AUGUSTO, P. **Consumidores Estão Comprando mais por Atacado**. Jornal VANGUARDA. Postado em Notícia. Publicado em 12.03.2016. Página consultada no link: <http://blogdowagnergil.com.br/vs1/2016/03/12/consumidores-estao-comprando-mais-por-atacado/>.

BRASIL, I, G. **Analisando a Mobilização do Conhecimento Pedagógico do Professor do 3ª ano (Anos iniciais),no Campo das Estruturas Aditivas**. Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE . 2015 . Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/5192>. Acesso em: 02/03/2017.

BROUSSEAU, G.:**Referência na didática da Matemática.Pesquisa sobre os estudos do educador francês definiram as condições de ensino e aprendizagem**. Revista Nova Escola,on-line, Edição219,p.28-29,Janeiro/ fevereiro2009.Disponível: <<http://acervo.novaescola.org.br/matematica/fundamentos/pai-didatica-matematica-427127.shtml?page=a>>Acesso:02/03/2017.

CARVALHO, G. D. Jr.; AGUIAR, O. Jr.**OS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD COMO FERRAMENTA PARA O PLANEJAMENTO DIDÁTICO**, 2008, p.207-227. [Artigo]. Faculdade de Educação, UFMG. Belo Horizonte, MG.Página consultada no link:[http://www.academia.edu/1070421/Os campos conceituais de Veranaud como ferramenta para o planejamento did%C3%A1tico](http://www.academia.edu/1070421/Os_campos_conceituais_de_Veranaud_como_ferramenta_para_o_planejamento_did%C3%A1tico) Acesso:02/02/2017.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**, Editora Ática, 3º Edição, São Paulo, 2004.

Escola de Referência em Ensino Médio Tristão Ferreira Bessa - **Portal SIEPE**. Código da escola: 26090309. Endereço: Rua, Adel Pedroso – 188. Bairro: Centro. Município: Lagoa do Itaenga Página consultada em 30 de julho de 2017, em: < [www.siepe.educacao.pe.gov.br/diarioclassee/DiarioClasse.do](http://www.siepe.educacao.pe.gov.br/diarioclassee/DiarioClasse.do) > .

FERNANDES, J. A. S.; OLIVEIRA, E. B.; **A resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática em Sala de Aula**. 2015. Trabalho apresentado no X Encontro Capixaba de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Vitória-ES, Ifes e Ufes, 23 a 25 de julho de 2015. Página visitada em 24.11.2016 no link:[http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ECEM/X\\_ECEM/paper/viewFile](http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ECEM/X_ECEM/paper/viewFile).

FARJADO, V.; MORENO, A. C.; **43% das escolas públicas têm banda larga, contra 80% das privadas**. Do G1 em São Paulo, 2016. Disponível em: <http://glo.bo/1RkkfFm>. Página consultada em: 14.01.2017.

HERFEZ, A. **Aritmética, coleção PROFMAT**, Sociedade Brasileira de Matemática, 1<sup>o</sup> edição, 2<sup>o</sup> impressão, Rio de Janeiro, 2014.

LEAL, C. A. **Sequência Didática: Brincando em sala de aula; Uso de Jogos cooperativos no Ensino de Ciências**, 2011. Disponível em:  
< [http://www.ifrj.edu.br/webfm\\_send/5416](http://www.ifrj.edu.br/webfm_send/5416) > Acesso em : 17.02.2017.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nesta Área**. Investigações em Ensino de Ciências, v.7, n.1. Publicação Eletrônica:<http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>. 2002. acesso em: 28/02/2017.

MAGARINUS, R. **Uma Proposta para o Ensino de Funções Através da Utilização de Objetos de Aprendizagem**, Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional-PROFMAT, UFSM (2013).

MARCOLINO, F. R. **Problemas de Máximo e Mínimo: Abordagem na Educação Básica**, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, UB(2016). Acesso: [http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/20979/1/2016\\_FabianoRodriguesMarcolino.pdf](http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/20979/1/2016_FabianoRodriguesMarcolino.pdf)

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P., **Matemática Discreta, Coleção PROFMAT**, Sociedade Brasileira de Matemática, 1<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro, 2014.

MÉHEUT, M. **Teaching-Learning sequence tools for learning and/or research**. Créteil IUFM and LDS-Paris 7 University, France. 2005. Visitado em 06.11.2016 no link: [http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F1-4020-3673-6\\_16page-1](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F1-4020-3673-6_16page-1)

NASCIMENTO, R. **A Modelagem Matemática com Simulação Computacional na Aprendizagem de Funções**, Tese de Doutorado apresentado ao programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, 2007.

---

ROCHA, A.S., CRISTIANA, A.P., CINTHYA, M.S. M.A. **utilização de Softwares no Ensino de Funções Quadráticas**, Revista do Centro de Ciências Natura e Exatas-UFSM, Santa Maria, V. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p.19-35.

ROCHA, A. M. **Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio**. Programa de Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - profmat, UFG(2013). Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tde/2955>>.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática: Um Curso Com Problemas e Soluções**, Sociedade Brasileira de Matemática, 1<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro, 2010.

OLIVEIRA, S.R.; ALUANI, T. **Recursos educacionais multimídia para a Matemática do Ensino Médio**: Caixa de papel. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367>. Acesso em 04.11.2016.

PCN (1998) Parâmetros Curriculares Nacionais.

TOKARNIA, M.; **Só 7,3% dos alunos atingem aprendizado adequado em Matemática no Ensino Médio**. EBC Agência Brasil. Brasília, 2017. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com>. Página consultada em: 23.01.2017.

GIOVANNI, C.; GEOVANNI, Jr. **A conquista da Matemática**, Editora FTD S.A, Ed. Renovada, Vol. 4, São Paulo, 2007.