UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Simone Souza Rodrigues

Problemas de maximização de área e volume aplicado ao Ensino Médio

RECIFE
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Simone Souza Rodrigues

Problemas de maximização de área e volume aplicado ao Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior

RECIFE
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R616p RODRIGUES, SIMONE
Problemas de maximização de área e volume aplicado ao Ensino Médio / SIMONE RODRIGUES. - 2019.
65 f. : il.

Orientador: Antonio José Ferreira Gomes Junior.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2019.

1. Otimização. 2. Ensino. 3. Método. 4. Aplicação. 5. Resultado. I. Junior, Antonio José Ferreira Gomes, orient. II. Título

CDD 510

Simone Souza Rodrigues

PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES APLICADOS AO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNANBUCO, como pré-requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovado em __/___/___

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Ferreira Gomes Junior (Orientador) - PROFMAT/UFRPE

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo – UFPB

Prof. Dra. Karla Ferreira Arruda Duque – PROFMAT/UFRPE

Dedico à minha mãe Lindalva Souza Silva Rodrigues pelo incentivo e a minha prima e também professora Elizabete Souza Silva que foi uma referência e exemplo.

AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus agradecimentos a todos que contribuiram para a realização deste trabalho. Agradeço aos meus professores, a minha mãe e ao meu irmão pelo incentivo. Agradeço ao Governo Dilma Rousseff por criar o PROFMAT. Agradeço aos meus colegas de curso que sempre estiveram dispostos a me auxiliar. E principalmente ao meu orientador pela paciência e disponibilidade.

D E C L A R A Ç Ã O

Título da Dissertação:	PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO DE ÁREAS E VOLUMES APLICADOS AO ENSINO MÉDIO

Autor:	SIMONE SOUZA RODRIGUE

Eu, Simone Souza Rodrigues, portador da Carteira de Identidade n° 984826530 e do CPF n° 026.291.765-33, residente à Rua: Nova Aliança, 149- Perpétuo Socorro- Paulo Afonso-Ba, declaro que o presente artigo é inédito, de minha autoria e não contém plágio (Prática ilegal de apropriar-se da obra de terceiros sem autorização e sem a referência devida)

Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito as sanções legais.

Recife, 05 de Dezembro de 2019.

....

Nome e Assinatura

RESUMO

A otimização pode ser entendida como a busca por uma condição que forneça o máximo benefício segundo algum critério. Este tema foi escolhido para ser trabalhado no ensino básico por apresentar a possibilidade de incorporar pensamento abstrato na resolução de problemas práticos. O assunto foi abordado na perspectiva do Cálculo Diferencial e da Geometria Euclidiana. Inicialmente, de maneira sucinta, apresentamos a determinação de máximos e mínimos de funções de duas variáveis. Em seguida, mostramos e resolvemos por meio do Cálculo os problemas elaborados para serem ministrados no ensino básico. Posteriormente, indicamos uma metodologia diferenciada que torne possível a compreensão do tema proposto. Além de relatar a aplicação do método em uma turma de Educação de Jovens e Adultos, mostrando, inclusive, o resultado de um pós-teste realizado pelos estudantes. No processo de concepção do minicurso idealizamos um problema cuja resolução por nós encontrada distoa das soluções usuais, por isso consideramos conveniente incluí-la neste trabalho.

Palavras-chave: Otimização; ensino; método; aplicação; resultado

ABSTRACT

Optimization can be understood as the search for a condition that provides the maximum benefit according to some criterion. This theme was chosen to be worked in basic education by presenting the possibility of incorporating abstract thinking in the resolution of practical problems. The subject was approached from the perspective of Differential Calculus and Flat Geometry. Initially we present, briefly, the determination of maximum and minimum functions of two variables. Next, we showed and solved by means of the Calculus the problems elaborated to be given in the basic education. Subsequently, we indicated a differentiated methodology that makes possible the understanding of the proposed theme. In addition to reporting the application of the method in a Youth and Adult Education class, showing, even, the result of a post-test accomplished by the students. In the process of conception the mini-course, we have idealized a problem whose resolution that we found differs from the usual solutions, so we considered convenient to include it in this work.

Keywords: Optimization; teaching; method; application; result

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A otimização constitui uma área de conhecimento de ampla abrangência tanto nas ciências quanto na vida prática, tendo em vista sua característica de buscar o melhor cenário para uma dada situação. Para Bazzo (2006, p.183) “otimização é o processo de procura por uma solução que forneça o máximo benefício segundo algum critério; ou seja, é a busca da melhor condição”.

O estudo de otimização pode ser trabalhado em diversos conteúdos da matemática, tais como: desigualdades das médias; mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum; vértice de uma função quadrática; cálculo diferencial; geometria; e grafos. É da geometria o primeiro problema de otimização documentado, conhecido como problema isoperimétrico clássico ou Problema de Dido.

> Problema de Dido. Uma amenidade. Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África, depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia, e cercou com a mesma um terreno circular. Essa é a lendária história da fundação de Cartago. (Figueiredo, 1989, p.85)

Aqui está presente a noção de que o círculo é a curva fechada retificável que abrange a maior área em comparação às demais de mesmo perímetro. Outro problema de otimização da antiguidade é o Princípio da Mínima Distância de Heron o qual mostra que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão permite o menor caminho percorrido pela luz entre um objeto refletido no espelho e o olho do observador.

Além da geometria, podemos fazer uso do Cálculo Diferencial para resolver problemas de otimização. De acordo com James Stewart (2009, p. 253) “algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa”. Por exemplo, em economia é possível maximizar o lucro e minimizar o custo, engenharia também faz uso desse mecanismo,

> O trabalho do engenheiro é uma incessante procura pela redução de peso, custo, consumo... e pelo aumento do rendimento de sistemas, da sua produtividade, utilidade (...) um bom profissional jamais estará satisfeito com o seu trabalho enquanto não conseguir melhorar uma solução até quanto lhe for possível. O procedimento utilizado para se chegar a estes objetivos é a otimização.(Bazzo, 2006, p.183)

Abordaremos otimização em Cálculo Diferencial e em Geometria Euclidiana. Este trabalho teve como norteadores quatro problemas de nossa autoria, sendo os três primeiros resolvidos pelo método do Cálculo e o quarto por Geometria.

Nossa proposta consistem em resolver os três primeiros problemas pelo método convencional e apresentar uma metodologia de resolução alternativa, de modo que, tais problemas possam ser trabalhados no ensino básico. Com isso, pretendemos aproximar o público do ensino básico ao método científico. Segundo o PCN+(2002, p. 111) Ensino Médio, "Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem".

Apresentaremos, ainda, o relato do desenvolvimento de um minicurso ministrado em uma turma da Educação de Jovens e Adultos - Ensino Médio (EJAEM) elaborado com base na metodologia aqui proposta. Além de expor a resolução do quarto problema, a intenção inicial foi de incluí-lo na mesma sugestão dos demais. Entretanto, percebeu-se que o uso de funções iria exigir uma quantidade excessiva de variáveis. Foi o Princípio da Mínima Distância, bem como outros resultados da Geometria que possibilitaram vislumbrar a configuração ótima. A resolução, apesar de complexa, é fundamentada em noções básicas, por isso, não houve a necessidade de criar uma transposição didática.

Os problemas envolvem maximização de área e volume, sendo no primeiro caso o perímetro fixo e no segundo caso fixou-se a soma de algumas arestas. Dessa forma, consideramos conveniente fazer uma breve explanação sobre determinação de valores máximos e mínimos de função de duas vaiáveis no primeiro capítulo. Para, em seguida, exibir a resolução dos problemas dois e três por meio do Cálculo Diferencial, no segundo capítulo.

1 DETERMINAÇÃO DE VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS

Por se tratar de um conhecimento amplamente difundido e de fácil acesso em livros de Cálculo 1 e 2, faremos apenas um compilado dos principais teoremas, definições e testes que orientam o método de determinação de valores máximo e mínimo absolutos, as demonstrações serão suprimidas. Tendo em vista que os problemas aqui propostos são de funções de duas variáveis, faremos a apresentação do conteúdo sob esse enfoque.

Entende-se como ponto máximo de uma função o maior valor que uma função pode assumir. Analogamente, o ponto mínimo será o menor valor que uma função poderá assumir. A determinação de tais valores é feita por teoremas e testes pré-estabelecidos que são verificados utilizando derivada de primeira e segunda ordem de uma função.

1.1 FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Seja o ponto $P(x, y) \in D$, sendo D subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Uma correspondência f é dita *função de duas variáveis* quando associa a cada par ordenado $(x, y) \in D$ um único número real z, denotaremos $z = f(x, y)$.

O conjunto D é o domínio da função e pode ser restringido. Nos casos de funções definidas pela regra, isto, onde o domínio não seja explicitado, entende-se o domínio como o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que contempla todos os pares ordenados (x_0, y_0) viáveis para a regra dada.

1.2 DERIVADAS PARCIAIS

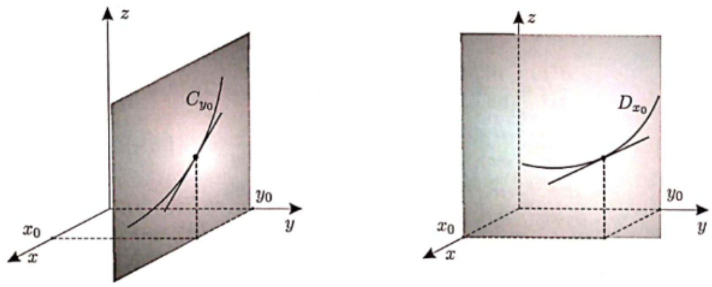
Seja $f(x, y)$ um função derivável. Se fixarmos o valor de uma das variáveis x ou y, obteremos uma função de uma variável. Fixando a variável y em y_0 teremos a função g de variável x, ou seja, $g(x) = f(x, y_0)$. Fixando a variável x em x_0 teremos a função g de variável y, ou seja, $g(y) = f(x_0, y)$.

Note que podemos utilizar os conhecimentos de Cálculo 1 para derivar as funções $g(x) = f(x, y_0)$ e $g(y) = f(x_0, y)$. Tais derivadas são chamadas de *derivadas parciais*.

No caso de $g(x) = f(x, y_0)$, temos a derivada parcial em relação a x, aqui denotaremos $f_x(x, y)$. O procedimento para encontrar $f_x(x, y)$ consiste em considerar y constante e derivar a função em relação a x. Analogamente, no caso de $g(y) = f(x_0, y)$, temos a derivada parcial em relação a y, aqui denotaremos $f_y(x, y)$. O procedimento para encontrar $f_y(x, y)$ consiste em considerar x constante e derivar a função em relação a y.

Geometricamente, $f(x, y_0)$ é a curva resultante da interseção entre a superfície $f(x, y)$ e o plano $y = y_0$. Assim, a derivada $f_x(x, y)$ será a derivada de tal curva, ou seja, será a inclinação da reta tangente a $f(x, y_0)$. Temos também que, $f(x_0, y)$ é a curva resultante da interseção entre a superficie $f(x, y)$ e o plano $x = x_0$. E a derivada $f_y(x, y)$ será a derivada de tal curva, ou seja, a inclinação da reta tangente a $f(x_0, y)$.

Figura 1 – DERIVADAS PARCIAIS



fonte: Cálculo das funções de múltiplas variáveis, 2011

1.3 DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM

As funções $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, vistas no item anterior, podem ser derivadas novamente. Tal processo resultaria em uma derivada de segunda ordem. Nesse caso, podemos ter as seguintes possilidades.

1. Derivar $f_x(x, y)$ em relação a x.
2. Derivar $f_x(x, y)$ em relação a y.
3. Derivar $f_y(x, y)$ em relação a x.
4. Derivar $f_y(x, y)$ em relação a y.

Para as derivadas resultantes utilizaremos as respectivas notações: $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ e $f_{yy}(x, y)$.

1.4 VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS

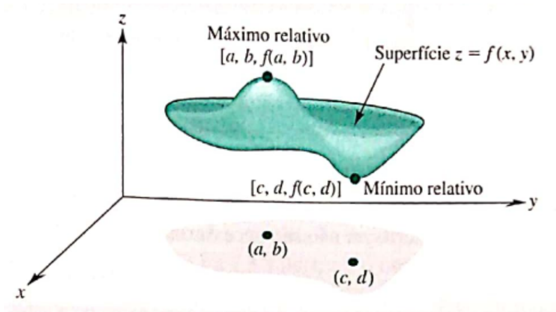
Definição: Seja f uma função de duas variáveis com domínio D. A função f terá *valor máximo* em um ponto $(a, b) \in D$ se $f(a, b) \geq f(x, y)$, para todo $(x, y) \in D$. Analogamente, f terá *valor mínimo* em um ponto $(c, d) \in D$ caso $f(c, d) \leq f(x, y)$, qualquer que seja $(x, y) \in D$.

No caso da definição acima $f(a, b)$ é o *máximo absoluto* e $f(c, d)$ é o *mínimo absoluto*, uma vez que as desiguadades valem para todo domínio de f. Para determinar o máximo e mínimo absoluto, caso existam, de uma função faz-se uso de procedimentos que envolvem o conceito e a determinação de máximo e mínimo local, cuja definição expomos a seguir.

Definição: Uma função f de duas variáveis tem um *máximo local* em (a, b) se $f(a, b) \geq f(x, y)$, para todo o ponto (x, y) situado no interior de algum disco circular de centro (a, b). Se $f(c, d) \leq f(x, y)$, para todo ponto (x, y) situado em algum disco circular de centro (c, d), então f tem um *mínimo local* em (c, d) e $f(c, d)$ é um valor mínimo local. Stewart

Geometricamente, podemos entender o máximo local com o topo de um monte na superficie do gráfico de $f(x, y)$ e o mínimo local como o ponto mais baixo de um vale.

Figura 2 – Máximo e mínimo locais



fonte: Cálculo: um curso moderno e suas aplicações, 2015

Teorema: Se f tem um máximo ou um mínimo local em (a, b) e as derivadas parcias de primeira ordem de f existem nesses pontos , então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$. (Hoffmann, 2015)

Isso ocorre pois o plano tangente a superficie $f(x, y)$ no ponto máximo ou mínimo local será paralelo ao plano xy. Note que $f_x(a, b)$ é a inclinação da função $f(x, b)$ no ponto $x = a$ e $f_y(a, b)$ é a inclinação da função $f(a, y)$ no ponto $y = b$. E tanto o máximo quanto o mínimo local de uma função de uma variável são pontos nos quais a derivada é nula.

Quando $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, o ponto $(a, b) \in D$ é chamado *ponto crítico*. É necessário esclarecer que existem casos em que o ponto crítico não fornece máximo ou mínimo local. Em um ponto crítico, a função pode ter máximo ou mínimo local, ou ainda nenhum dos dois, como no caso do ponto de sela.

Para determinar se o ponto crítico de uma função é um máximo ou mínimo local, ou um ponto de sela fazemos uso do teste a seguir.

1.4.1 TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ [ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f]. Seja $D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b) \cdot f_{yx}(a, b)$.

a Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

b Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

c Se $D < 0$, então $f(a, b)$ é um ponto de sela.

d Se $D = 0$, o teste não pode ser aplicado.

Uma maneira de memorizar a fórmula de D, é escrevê-la como o seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{yx}f_{xy}$$

1.5 VALORES MÁXIMO E MÍNIMO ABSOLUTO

1.5.1 *Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis*: Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D. Stewat

Sendo $f(x_1, y_1)$ ponto extremo de f , temos que (x_1, y_1) ou é ponto crítico ou pertence a fronteira de D. Logo, para encontrar os pontos extremos de uma função que atende as condições do teorema 1.5.1 devemos proceder da seguinte maneira.

1.6.2 *Método dos Intervalos Fechados* Para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma fu nçao contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1 Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.

2 Determine os valores extremos de f na fronteira de D.

3 O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor valor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Stewart(2015)

1.6 PROCEDIMENTO DE DETERMINAÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

A determinação de pontos máximos e mínimos, caso existam, de uma situação que possa ser descrita por uma **FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS** é realizada por meio do seguinte porcesso.

1. Determinação da função que representa a situação.

   Por meio das característica apresentada pela situação/problema, elabora-se uma regra que associa duas variáveis a algum grandeza a qual pretende-se maximizar ou minimizar.

2. Deteminação do domínio da função.

   Analisando as limitações de cada variável, é verificado se as variáveis pertencem a algum intervalo, estando o par orde ou se valem para qualquer número real.

3. Determinação das derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis.

4. Deterninação do ponto crítico.

   Para tanto basta investigar para quais pares ordenados $(a, b) \in D$ as derivadas parciais de primeira ordem são iguais a zero.

5. Determinação de todas as derivadas de segunda ordem.

6. Realização do teste da segunda devidada.

7. Determinação dos valores extremos da função na fronteira.

8. Comparação entre os valores da fronteia e a imagem no pontos crítico.

2 PROBLEMAS PROPOSTOS

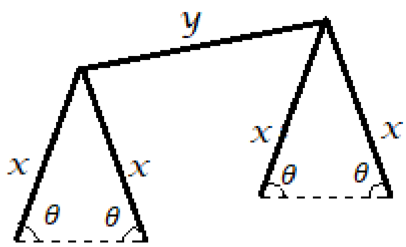
Como vimos, o cálculo diferencial fornece métodos para a resolução de problemas de otimização. Pretendemos trabalhar tais problemas em um minicurso na modalidade de ensino EJAEM (Educação de Jovens e Adultos – Ensino Médio). Com tal finalidade, elaboramos um método de resolução adequado ao alunado desta modalidade, que será apresentado no capítulo seguinte.

Contudo, consideramos importante demonstrar os resultados de cada problema por meio do cálculo diferencial. Visto que assim reforçaremos a confiabilidade dos resultados encontrados. Faz-se necessário explanar que aqui não aparece o problema 1 do minicurso, por ser amplamente conhecido que dentre todos os paralelogramos de perímetro fixo o quadrado possui área máxima.

2.1 PROBLEMA DA TENDA

Utilizando uma ripa de madeira que mede L m de comprimento, pretende-se construir uma tenda. Para tanto, a ripa será cortada em cinco partes, quatro delas medindo x e outra medindo y. Segue abaixo o esqueleto da estrutura da tenda. Quais devem ser as medidas de x, y e do ângulo θ para que a tenda possua volume máximo?

Figura 3 – Tenda



fonte: Produzido pelo autor

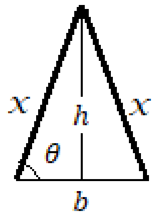
RESOLUÇÃO: Inicialmente, encontraremos a função que determina o volume da tenda, isso equivale a determinar o volume de um prisma cuja base é um triângulo isósceles e a altura mede y.

Seja S área da base do prisma, b a base do triângulo isósceles e h a altura do triângulo isósceles.

Das relações trigonométricas no triângulo retângulo sabemos que $sen\theta = \frac{h}{x}$ e $\cos\theta = \frac{\frac{b}{2}}{x}$, assim, $h = xsen\theta$ e $b = 2x\cos\theta$.

Logo, $S = \frac{2x\cos\theta xsen\theta}{2} = x^2\cos\theta sen\theta$.

Figura 4 – Base da tenda



fonte: Produzido pelo autor

Desta forma, o volume é calculado por $V = x^2y\cos\theta sen\theta$, como pelo enunciado temos que $4x + y = L \Leftrightarrow y = L - 4x$, a função que determina o volume pode ser escrita $V(x,\theta) = x^2(L-4x)\cos\theta sen\theta$.

Convém observar que se trata de uma função contínua. Convém ainda, estudar o domínio da função fundamentado-se nas informações do enunciado, assim, notamos que por ser ângulo interno de um triângulo isósceles o ângulo θ tem sua medida variando entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Já no caso de x temos que $x, y > 0$, $y = L - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{L}{4}$. Dessa forma, consideraremos o conjunto $D = \{(x,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{L}{4}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ como domínio da função . Escolhemos utilizar o intervalo fechado para o domínio com objetivo de obter o valor máximo absoluto.

Agora verificaremos em qual ponto (a,b) a função $V(x,\theta)$ atinge seu valor máximo, se existir. Para tanto, buscaremos o ponto crítico da função calculando as derivadas parciais relativas a x e a θ e o ponto (a,b) que zera as duas derivadas. Para em seguida averiguar, pelo teste da segunda derivada se o ponto crítico maximiza a função.

Derivando em relação a x, temos

$$\begin{aligned} V_x(x,\theta) &= 2x(L-4x)cos\theta sen\theta + x^2(-4)cos\theta sen\theta \\ &= (2xL - 8x^2)cos\theta sen\theta + x^2(-4)cos\theta sen\theta \\ &= (2xL - 8x^2 - 4x^2)cos\theta sen\theta \\ &= (2xL - 12x^2)cos\theta sen\theta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Neste caso, como θ é ângulo da base de um triângulo isósceles, $\theta \,\epsilon\,]0, \frac{\pi}{2}[$ e neste intervalo todos os valores para o seno ou o cosseno são diferentes de zero. Sendo assim, é necessário que $2xL - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(L-6x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{L}{6}$, para zerar (2.1), pois $x \neq 0$ já que se trata de uma medida.

Derivando em relação a θ, temos

$$\begin{aligned} V_\theta(x,\theta) &= x^2(L-4x)cos^2\theta - x^2(L-4x)sen^2\theta \\ &= x^2(L-4x)(cos^2\theta - sen^2\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aqui, existe duas possibilidades zerar (2.2). Uma é efetuar $L - 4x = 0$, assim $x = \frac{L}{4}$, mas esse valor não é adequado pois já encontramos que x deve ser igual a $\frac{L}{6}$ para que (2.1) seja igual a zero. A outra possibilidade é que $cos^2\theta - sen^2\theta = 0 \Leftrightarrow sen^2\theta = cos^2\theta \Leftrightarrow \sqrt{sen^2\theta} = \sqrt{cos^2\theta} \Leftrightarrow sen\theta = cos\theta$, a última etapa pode ser realizada pois $\theta \epsilon\ ]0, \frac{\pi}{2}[$ e nesse intervalo $sen\theta > 0$, $cos\theta > 0$, logo $\sqrt{sen^2\theta} = sen\theta$ e $\sqrt{cos^2\theta} = cos\theta$. Da igualdade $sen\theta = cos\theta$ conclui-se que $\theta = \frac{\pi}{4}$, visto que $\theta \epsilon [0, \frac{\pi}{2}]$.

Tendo encontrado o ponto crítico $(\frac{L}{6}, \frac{\pi}{4})$ devemos, agora, verificar sua natureza utilizado o teste da segunda derivada.

Derivando (2.1) em relação a x, temos

$$\begin{aligned} V_{xx}(x,\theta) &= (2L - 24x)cos\theta sen\theta \Rightarrow \\ V_{xx}(\frac{L}{6}, \frac{\pi}{4}) &= (2L - 24\frac{L}{6})cos\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi}{4} \\ &= (2L - 4L)\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -2L < 0. \end{aligned}$$

Note que o valor da derivada de segunda ordem V_{xx} no ponto crítico é negativo, pois $L > 0$ por ser uma medida.

Derivando (2.2) em relação a θ, temos

$$\begin{aligned} V_{\theta\theta}(x,\theta) &= x^2(L-4x)(-2sen\theta cos\theta - 2cos\theta sen\theta) \\ &= x^2(L-4x)(-4sen\theta cos\theta) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} V_{\theta\theta}\left(\frac{L}{6}, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{L}{6}\right)^2 \left(L - 4\frac{L}{6}\right)\left(-4sen\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{L}{6}\right)^2 \left(\frac{L}{3}\right)\left(-4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{L^3}{108}(-2) \\ &= -\frac{L^3}{54} \end{aligned}$$

Derivado (2.2) em relação a x e (2.1) em relação a θ obtemos os seguintes resultados.

$$\begin{aligned} V_{x\theta}(x,\theta) &= (2xL - 12x^2)cos^2\theta - (2xL - 12x^2)sen^2\theta \\ &= (2xL - 12x^2)(cos^2\theta - sen^2\theta). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_{\theta x}(x,\theta) &= (2xL - 12x^2)cos^2\theta - (2xL - 12x^2)sen^2\theta \\ &= (2xL - 12x^2)(cos^2\theta - sen^2\theta). \end{aligned}$$

Dessa forma, como $V_{x\theta} = V_{\theta x}$ temos que

$$\begin{aligned} V_{\theta x}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) = V_{x\theta}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) &= \left(2\frac{L}{6}L - 12\left(\frac{L}{6}\right)^2\right)\left(\left(sen\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right) \\ &= \left(2\frac{L}{6}L - 12\left(\frac{L}{6}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 0 \end{aligned}$$

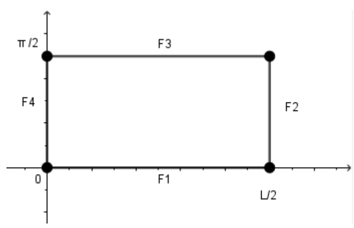
Por fim,

$$\begin{aligned} D &= V_{xx}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right)V_{\theta\theta}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) - V_{\theta x}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right)V_{x\theta}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) \\ D &= (-2L)\left(-\frac{L^3}{54}\right) - 0\cdot 0 = \frac{L^4}{27} > 0 \end{aligned}$$

Como $D > 0$ e $V_{xx}\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) < 0$ o ponto $\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ é um ponto máximo local, cujo valor corresponde a $V\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{L}{6}\right)^2\left(L - 4\cdot\frac{L}{6}\right)cos\frac{\pi}{4}sen\frac{\pi}{4} = \frac{L^3}{216}$.

Vamos, agora, determinar os valores extremos de V na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta F1, F2, F3 e F4, mostrado na figura abaixo.

Figura 5 – Fronteira



fonte: Produzido pelo autor

Em F1, temos $\theta = 0$ e $V(x,0) = x^2(L-4x)cos0sen0 = x^2(L-4x)\cdot 1\cdot 0 = 0$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

Em F2, temos $x = \frac{L}{2}$ e $V(\frac{L}{4},\theta) = \left(\frac{L}{4}\right)^2\left(L-4\cdot\frac{L}{4}\right)cos\theta sen\theta = \left(\frac{L}{4}\right)\cdot 0\cdot cos\theta sen\theta = 0$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Em L3, temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $V(x,\frac{\pi}{2}) == x^2(L-4x)cos\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi}{2} = x^2(L-4x)\cdot 0\cdot 1 = 0$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$.

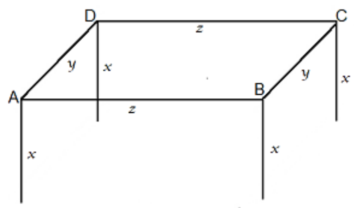
Em L4, temos $V(0,\theta) = 0^2(L-4\cdot 0)cos\theta sen\theta = 0$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Note que em qualquer ponto da fronteira temos a imagem igual a zero e como $\frac{L^3}{216} > 0$, pois $L > 0$, o ponto $\left(\frac{L}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ é o máximo absoluto. Portanto, a tenda terá volume máximo se $x = \frac{L}{6}$, $y = L - 4\frac{L}{6} = \frac{L}{3}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2.2 ESTRUTURA TIPO CAIXA

Utilizando L metros de ripa, pretende-se construir uma estrutura tipo caixa. Para esse fim, a ripa será cortada em 8 partes, 4 delas medindo x, 2 medindo y e 2 medindo z. Sabendo que a disposição dos pedaços de ripa será de acordo com a figura 6 e que as ripas concorrentes são perpendiculares. Quais deverão ser as medidas de x, y e z para que a estrutura possua volume máximo?

Figura 6 – Estrutura tipo caixa



fonte: Produzido pelo autor

RESOLUÇÃO:

Determinar o volume máximo da estrutura equivale a determinar o volume máximo de um paralelepípedo reto de base $ABCD$ e altura x. Dessa forma, o volume da estrutura é calculado por $V = xyz$, pelos dados da questão temos que $4x + 2y + 2z = L$, logo $z = \frac{L}{2} - 2x - y$.

Note que $x, y, z > 0$ e $L > 0$. Assim, como $2y+2z$ é positivo temos, $4x < 4x+2y+2s = L$, logo, $4x < L \Leftrightarrow x < \frac{L}{4}$. Analogamente, como $4x+2z$ é positivo temos, $2y < 2y+4x+2z = L$, logo, $2y < L \Leftrightarrow y < \frac{L}{2}$. Com isso, $0 < x < \frac{L}{4}$ e $0 < y < \frac{L}{2}$. Assim, encontraremos as medidas que maximiza a estrutura maximizando a função $V(x,y) = xy\left(\frac{L}{2} - 2x - y\right)$. Cujo domínio será o conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{L}{2}\right\}$. Utilizamos o intervalo fechado no domínio para encontrar o máximo absoluto.

Para esse fim, iniciaremos investigando o ponto crítico da função encontrando o ponto que zera simultaneamente as derivadas parciais relativas a x e a y, e em seguida será aplicado o teste da segunda derivada com vista a descobrir a natureza do ponto crítico.

Derivando em relação a x, temos

$$\begin{aligned} V_x(x,y) &= y\left(\frac{L}{2} - 2x - y\right) + xy(-2) \\ &= y\left(\frac{L}{2} - 2x - y - 2x\right) \\ &= y\left(\frac{L}{2} - 4x - y\right) \end{aligned}$$

Para que $V_x(x,y)$ seja igual a zero devemos ter ou $y = 0$ ou

$$\frac{L}{2} = 4x + y. \tag{2.3}$$

Derivando em relação a y, temos

$$\begin{aligned} V_y(x,y) &= x\left(\frac{L}{2} - 2x - y\right) + xy(-1) \\ &= x\left(\frac{L}{2} - 2x - y - y\right) \\ &= x\left(\frac{L}{2} - 2x - 2y\right). \end{aligned}$$

Para que $V_y(x,y)$ seja igual a zero devemos ter ou $x = 0$ ou

$$\frac{L}{2} = 2x + 2y. \tag{2.4}$$

Assim, um dos pontos que zera as funções $V_x(x,y)$ e $V_y(x,y)$ é tal que

$$2x + 2y = 4x + y \Leftrightarrow y = 2x. \tag{2.5}$$

Com isso, substituindo (2.5) a relação em (2.4), temos $2x + 2 \cdot 2x = \frac{L}{2} \Leftrightarrow x = \frac{L}{12}$ e $y = 2 \cdot \frac{L}{12} = \frac{L}{6}$.

Tendo encontrado o ponto crítico $\left(\frac{L}{12}, \frac{L}{6}\right)$ devemos verificar se trata-se do ponto máximo. Os casos em as devivadas parciais são zeradas em $y = 0$ e em $x = 0$ serão verificados na análise dos valores extremos da função.

Derivando $V_x(x,y)$ em relação a x, temos

$$\begin{aligned} V_{xx}(x,y) &= y(-4) = -4y \Rightarrow \\ V_{xx}\left(\frac{L}{12}, \frac{L}{6}\right) &= -4\frac{L}{6} = -\frac{2L}{3}. \end{aligned}$$

Note que no ponto crítico o valor de $V_{xx}(x,y)$ é negativo, visto que $L > 0$ por ser medida.

Derivando $V_y(x,y)$ em relação a y, temos $V_{yy}(x,y) = x(-2) = -2x$, logo,

$$V_{yy}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) = -2\cdot\frac{L}{12} = -\frac{L}{6} < 0$$

.

Calculando a derivada de $V_x(x,y)$ em relação a y, temos

$$\begin{aligned} V_{xy}(x,y) &= \left(\frac{L}{2} - 4x - y\right) + y(-1) \\ &= \frac{L}{2} - 4x - 2y \end{aligned}$$

Calculando a derivada de $V_y(x,y)$ em relação a x, temos

$$\begin{aligned} V_{yx}(x,y) &= \left(\frac{L}{2} - 2x - 2y\right) + x(-2) \\ &= \frac{L}{2} - 4x - 2y \end{aligned}$$

Note que, $V_{xy}(x,y) = V_{yx}(x,y)$, assim temos,

$$\begin{aligned} V_{xy}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) = V_{yx}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) &= \frac{L}{2} - 4\frac{L}{12} - 2\frac{L}{6} \\ &= \frac{L}{2} - \frac{L}{3} - \frac{L}{3} = -\frac{L}{6} \end{aligned}$$

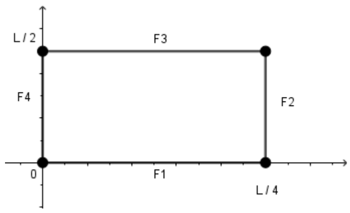
Agora verificaremos o sinal de

$$\begin{aligned} D &= V_{xx}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right)\cdot V_{yy}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) - V_{xy}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right)\cdot V_{xy}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) \\ &= \left(-\frac{2L}{3}\right)\cdot\left(-\frac{L}{6}\right) - \left(-\frac{L}{6}\right)\cdot\left(-\frac{L}{6}\right) \\ &= \frac{2L^2}{18} - \frac{L^2}{36} = \frac{3L^2}{36} > 0. \end{aligned}$$

Logo, com $D > 0$ e $V_{xx}\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) < 0$, pelo teste da segunda derivada, $\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right)$ é ponto máximo local, cujo valor corresponde a $f\left(\frac{L}{12},\frac{L}{6}\right) = \frac{L}{12}\cdot\frac{L}{6}\left(\frac{L}{2} - 2\frac{L}{12} - \frac{L}{6}\right) = \frac{L^3}{432}$.

Vamos, agora, determinar os valores extremos de V na fronteira de D, que é constituído por quatro segmentos de reta F1, F2, F3 e F4, mostrado na figura 7.

Figura 7 – Fronteira



fonte: Produzido pelo autor

Em F1, temos $y = 0$ e $V(x,0) = x \cdot 0 \cdot \left(\frac{L}{2} - 2x - 0\right) = 0$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$.

Em F2, temos $x = \frac{L}{4}$ e $V\left(\frac{L}{4}, y\right) = \frac{L}{4} \cdot y \left(\frac{L}{2} - 2 \cdot \frac{L}{4} - y\right) = -\frac{Ly^2}{4}$, com $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$, nesse caso, como L é positivo $-\frac{Ly^2}{4} \leq 0$.

Em F3, temos $y = \frac{L}{2}$ e $V\left(x, \frac{L}{2}\right) = x \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - 2x - \frac{L}{2}\right) = -Lx^2$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{4}$, nesse caso, como L é positivo $-Lx^2 \leq 0$.

Em F4, temos $x = 0$ e $V(0,y) = 0 \cdot y \left(\frac{L}{2} - 2 \cdot 0 - y\right) = 0$, com $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$.

Note que em qualquer ponto da fronteira temos a imagem igual ou menor que zero e como $\frac{L^3}{432} > 0$, pois $L > 0$, o ponto $\left(\frac{L}{12}, \frac{L}{6}\right)$ é o máximo absoluto. Portanto, o volume será máximo em $x = \frac{L}{12}$, $y = \frac{L}{6}$ e $z = \frac{L}{2} - 2\frac{L}{12} - \frac{L}{6} = \frac{L}{6}$.

2.3 VARIAÇÕES DA ESTRUTURA TIPO CAIXA

Verificaremos variações deste problema analisando como as medidas de x, y e z que maximizam o volume se comportam caso sejam acrescentados pares de pilares de comprimento x sustentando a estrutura. Na questão anterior, a estrutura possui dois pares de pilares x cuja medida total desses pilares é dada por $2 \cdot 2x$, caso possuísse n pares de pilares x o comprimento total desses pilares seria $2nx$.

Consideremos uma estrutura semelhante a do quesito anterior que possua n pares de vigas x, um par viga de y e um par viga de z, cuja soma seja igual a uma constante L. Podemos encontrar quais valores de x, y e z viabilizam o maior volume utilizaremos procedimento análogo a resolução precedente.

Assim, por razões similares a resolução anterior, o volume da estrutura é obtido por $V = xyz$, e como $2nx + 2y + 2z = L \Leftrightarrow z = L/2 - y - nx$ devemos encontrar, se existir, o ponto máximo da função $V(x,y) = xy\left(\frac{L}{2} - y - nx\right)$, cujo domínio é o conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \frac{L}{4} \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{L}{2n}\right\}$, para solucionar o problema.

Para tanto, derivaremos a função em relação a x e a y, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} V_x(x,y) &= y\left(\frac{L}{2} - nx - y\right) - nxy \\ &= y\left(\frac{L}{2} - nx - y - nx\right) \\ &= y\left(\frac{L}{2} - 2nx - y\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

e

$$\begin{aligned} V_y(x,y) &= x\left(\frac{L}{2} - nx - y\right) - xy \\ &= x\left(\frac{L}{2} - nx - y - y\right) \\ &= x\left(\frac{L}{2} - nx - 2y\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aqui temos que a função 2.6 pode ser zerada tanto se $y = 0$ quanto se $\frac{L}{2} - 2nx - y = 0$. No caso da função 2.7 temos que a função pode ser zerada em $x = 0$ ou em $\frac{L}{2} - nx - 2y = 0$. Como $x = 0$ e $y = 0$ estão na fronteira do domínio verificaremos esses casos em conjunto a análise da fronteira. Logo, avaliaremos o caso em que devemos ter $\frac{L}{2} - 2nx - y = 0$ e $\frac{L}{2} - nx - 2y = 0$ para que $V_x(x,y)$ e $V_y(x,y)$ sejam iguais a zero.

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} - 2nx - y = \frac{L}{2} - nx - 2y = 0 &\Leftrightarrow \\ -2nx - y = -nx - 2y &\Leftrightarrow \\ 2y - y = 2nx - nx &\Leftrightarrow \\ y = nx & \end{aligned}$$

Como $\frac{L}{2} - nx - 2y = 0$, temos $\frac{L}{2} - nx - 2nx = \frac{L}{2} - 3nx = 0$, assim, $\frac{L}{2} = 3nx \Leftrightarrow x = \frac{L}{6n}$ e $y = n\frac{L}{6n} = \frac{L}{6}$.

Agora verificaremos a natureza do ponto crítico $\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right)$.

Derivando $V_x(x,y)$ em relação a x temos, $V_{xx}(x,y) = y(-2n) = -2ny$, assim temos $V_{xx}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) = -2n\frac{L}{6} = -\frac{nL}{3} < 0$, pois $n, L > 0$.

Derivando $V_y(x,y)$ em relação a y temos, $V_{yy}(x,y) = x(-2) = -2x$, assim temos $V_{yy}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) = -2\frac{L}{6n} = -\frac{L}{3n}$.

Derivando $V_x(x,y)$ em relação y e $V_y(x,y)$ em relação x, teremos respectivamente

$$\begin{aligned} V_{xy}(x,y) &= \frac{L}{2} - 2nx - y - y \\ &= \frac{L}{2} - 2nx - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{yx}(x,y) &= \frac{L}{2} - nx - 2y - nx \\ &= \frac{L}{2} - 2nx - 2y. \end{aligned}$$

Assim temos, $V_{xy}(x,y) = V_{yx}(x,y)$, logo,

$$\begin{aligned} V_{xy}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) = V_{yx}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) &= \frac{L}{2} - 2n\frac{L}{6n} - 2\frac{L}{6} \\ &= \frac{L}{2} - \frac{L}{3} - \frac{L}{3} = -\frac{L}{6} \end{aligned}$$

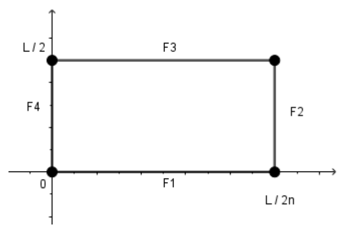
Logo,

$$\begin{aligned} D &= V_{xx}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) \cdot V_{yy}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) - V_{xy}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) \cdot V_{yx}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) \\ &= \left(-\frac{nL}{3}\right) \cdot \left(-\frac{L}{3n}\right) - \left(-\frac{L}{6}\right) \cdot \left(-\frac{L}{6}\right) \\ &= \left(\frac{L^2}{9}\right) - \left(\frac{L^2}{36}\right) = \left(\frac{3L^2}{36}\right) > 0 \end{aligned}$$

Como $D > 0$ e $V_{xx}\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) < 0$, pelo teste da segunda derivada $\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right)$ é um máximo local, cujo valor corresponde a $V\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right) = \frac{L}{6n} \cdot \frac{L}{6}\left(\frac{L}{2} - n\frac{L}{6n} - \frac{L}{6}\right) = \frac{L^3}{216n}$.

Vamos, agora, determinar os valores extremos de V na fronteira de D, que é constituido por quatro segmentos de reta F1, F2, F3 e F4, mostrado na figura abaixo.

Figura 8 – Fronteira



fonte: produzido pelo autor

Em F1, temos $y = 0$ e $V(x,0) = x \cdot 0 \cdot \left(\frac{L}{2} - nx - 0\right) = 0$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{2n}$.

Em F2, temos $x = \frac{L}{2n}$ e $V\left(\frac{L}{2n}, y\right) = \frac{L}{2n} \cdot y\left(\frac{L}{2} - n \cdot \frac{L}{2n} - y\right) = -\frac{Ly^2}{2n}$, com $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$, nesse caso, como L e n são positivos, temos $-\frac{Ly^2}{2n} \leq 0$.

Em F3, temos $y = \frac{L}{2}$ e $V\left(x, \frac{L}{2}\right) = x \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - 2x - \frac{L}{2}\right) = -Lx^2$, com $0 \leq x \leq \frac{L}{2n}$, nesse caso, como L é positivo, temos $-Lx^2 \leq 0$.

Em F4, temos $x = 0$ e $V(0,y) = 0 \cdot y\left(\frac{L}{2} - 2 \cdot 0 - y\right) = 0$, com $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$.

Note que em qualquer ponto da fronteira temos a imagem igual ou menor que zero e como $\frac{L^3}{216n} > 0$, pois $L > 0$, o ponto $\left(\frac{L}{6n}, \frac{L}{6}\right)$ é o máximo absoluto. Portanto, a função analisada tem valor máximo em $x = \frac{L}{6n}$, $y = \frac{L}{6}$ e $z = \frac{L}{2} - nx - y \Leftrightarrow z = \frac{L}{2} - n \cdot \frac{L}{6n} - \frac{L}{6} \Leftrightarrow z = \frac{L}{6}$.

3 MINICURSO SUGERIDO

O minicurso tem como proposta apresentar a otimização de áreas e volumes de funções de duas variáveis. É certo que tal conteúdo é normalmente trabalhado nos cursos de Ensino Superior por meio de Cálculo Diferencial. Devido a isso, será empregada uma metodologia distinta da usual, pensada de forma a propiciar a compreensão e/ou assimilação do conteúdo proposto.

De início, será aplicado um pré-teste para verificar os conhecimentos preexistentes sobre o cálculo de áreas e volumes, bem como, sobre otimização e sua importância na sociedade. Caso o pré-teste mostre a necessidade, será ensinado os conceitos básicos de Geometria Plana, uma vez que esta área do conhecimento é fundamental para o entendimento dos problemas propostos.

Em seguida ou caso o pré-teste indique que a turma compreende as noções de cálculo de área e volume, iniciaremos o minicurso de fato. Para isso, apresentaremos o conceito formal de otimização conforme Bazzo (2006, p.183), como "*o processo de procura por uma solução que forneça o máximo benefício segundo algum critério*", abordaremos, ainda, a abrangência do tema em diversas áreas do conhecimento e na vida prática. Posteriormente, especificaremos que o minicurso será direcionado a maximização de áreas e volumes fazendo uso de uma quantidade predeterminada de material.

Feito isso, exporemos os problemas propostos concomitante às respectivas resoluções, cuja elaboração de ambos, problemas e resoluções, é de nossa autoria. Ao conceber esta sugestão de trabalho nos fundamentamos nos Parâmetros Curriculares Nacional (PCN' s) de matemática, que trata das prioridades e orienta métodos de ensino no seguinte texto.

> A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. O ensino da Matemática deve relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras) e também relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. (PCN, 1997, p. 19).

Visto que o minicurso será ministrado a uma turma da modalidade de ensino EJAEM (Educação de Jovens e Adultos – Ensino Médio), atendemos o parágrafo 1º do artigo 37 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN, que aponta a necessidade de considerar as características do alunado. Apresenta-se a seguir os problemas propostos e suas respectivas soluções.

3.1 PROBLEMAS PROPOSTOS

3.1.1 PROBLEMA DA CERCA

PROBLEMA 1 - Com 24 metros de aramado a prefeitura pretende cercar uma área para construir uma horta comunitária. Sabendo que o contorno da horta deve ser um quadrilátero, cujos lados opostos devem possuir medidas iguais, quais devem ser as medidas de cada lado e o ângulo formado entre os lados para que a horta possua área máxima?

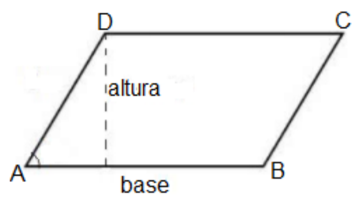
RESOLUÇÃO SUGERIDA:

Começaremos verificando se a turma tem alguma noção do conceito de ângulo, se eles já se depararam com alguma situação em seu cotidiano que fosse necessário seu uso. Caso não conheçam, apresentaremos a definição de ângulo como a medida da abertura entre duas retas, como também a existência um de instrumento de medida chamado transferidor. Além disso, será ressaltado o ângulo reto, além de mencionar sobre a sua importância na construção civil e fabricação de móveis.

Em seguida, iniciaremos a resolução averiguando o ângulo que maximiza a área. Para tanto, seguindo as instruções da questão, desenharemos o paralelogramo $ABCD$ e será questionado qual a medida do ângulo DB que possibilita a maior altura. Neste momento esclareceremos que a altura do paralelogramo é a distância entre os segmentos AB e DC e que a altura deve formar um ângulo de $90°$ com a base.

Neste momento, investigaremos qual deve ser a medida do ângulo DB para que a área seja máxima. Como a área do paralelogramo é calculada por $A = base \times altura$, fixando a base AB, a área será máxima quando a altura for a maior possível. Usaremos o fato que em um triângulo a hipotenusa é maior que qualquer um dos dois catetos, para fazer perceber que a maior medida que a altura pode assumir é a medida de AD, logo $DB = 90°$.

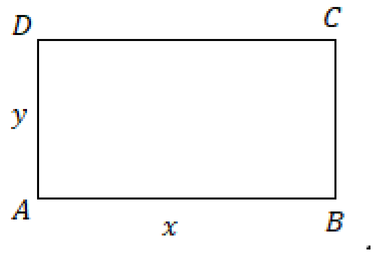
Figura 9 – Cerca



fonte: Produzido pelo autor

Sendo assim, a horta deverá ser retangular. Agora falta encontrar as medidas dos lados do retângulo que maximiza a área. Nomearemos $AB = x$ e $AD = y$, como o perímetro é 24, temos $2x + 2y = 24$, logo $x + y = 12$, daí $y = 12 - x$. Encontraremos a área por meio da fórmula $A = xy$, como $y = 12 - x$ temos, $A(x) = x.(12 - x)$.

Figura 10 – Cerca com formato retengular



fonte: Produzido pelo autor

Trata-se de uma função quadrática e poderíamos encontrar as medidas ótimas calculando as coordenadas do vértice. No entanto, como a metodologia da EJA deve se adequar ao alunado, utilizaremos a atribuição de valores. Explicaremos que a letra x representa um conjunto de números que variam entre 0 e 12, pois $x + y = 12$ e como se trata de medidas os valores devem ser positivos. Além disso x não pode ser 0 ou 12 pois, nos dois casos, a área seria 0. Assim, substituiremos x por cada número natural entre 0 e 12, com isso construiremos a Tabela 1 fazendo o aluno perceber que a área altera conforme a variação de x.

Tabela 1 – Área da cerca

valor de x	$A(x) = x.(12 - x)$
0	$0 \cdot (12 - 0) = 0$
1	$1 \cdot (12 - 1) = 11$
2	$2 \cdot (12 - 2) = 20$
3	$3 \cdot (12 - 3) = 27$
4	$4 \cdot (12 - 4) = 32$
5	$5 \cdot (12 - 5) = 35$
6	$6 \cdot (12 - 6) = 36$
7	$7 \cdot (12 - 7) = 35$
8	$8 \cdot (12 - 8) = 32$
9	$9 \cdot (12 - 9) = 27$
10	$10 \cdot (12 - 10) = 20$
11	$11 \cdot (12 - 11) = 11$
12	$12 \cdot (12 - 12) = 0$

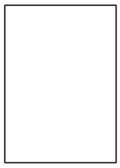
fonte: Produzido pelo autor

Podemos verificar que dentre os valores atribuídos a x o que forneceu a maior área foi $x = 6$, bem como a regularidade e simetria quanto a medida de área, visto que esta cresce até $x = 6$ e posteriormente decresce. Do ponto de vista da função quadrática esta simetria é devido a simetria da parábola. Já geometricamente a simetria acontece, pois, a partir no intervalo]6,11] o retângulo sofre uma rotação de 90°, assim o que era base em [1,6[passa a ser altura em]6,11] e o que era altura em [1,6[passa a ser base em]6,11]. Por exemplo, em $x = 5$ e $x = 7$ temos o mesmo retângulo, conforme as figuras 11 e 12, nos demais casos ocorre de maneira igual.

Figura 11 – Retângulo

fonte: Praduzido pelo autor

Figura 12 – Rotação



fonte: Produzido pelo autor

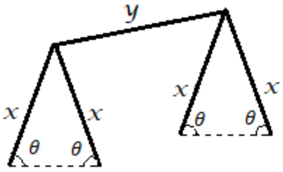
Com finalidade de não restringir a análise a números naturais calcularemos, ainda, a área para $x = 5,5$ e $x = 6,5$ e verificamos que ambas são menores que 36. Com isso, concluiremos que para $x = 6$ a área é será máxima. Como $y = 12 - x$, temos $y = 12 - 6$, logo $y = 6$. Portanto, a horta deverá possuir formato quadrangular para que tenha área máxima.

Este problema viabiliza apontar ao aluno que dentre todos paralelogramos de perímetro fixado o quadrado possui a maior área.

3.1.2 PROBLEMA DA TENDA

Problema 2- Utilizando uma ripa de madeira que mede 12 m de comprimento, pretende-se construir uma tenda. Para tanto, a ripa será cortada em cinco partes, quatro delas medindo x e outra medindo y. Segue abaixo o esqueleto da estrutura da tenda. Quais devem ser as medidas de x, y e do ângulo θ para que a tenda possua volume máximo?

Figura 13 – Tenda

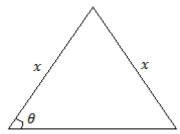


fonte: Produzido pelo autor

RESOLUÇÃO SUGERIDA:

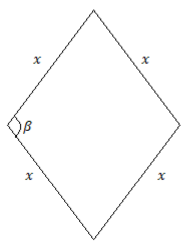
Iniciaremos fazendo o aluno perceber que encontrar o volume da tenda equivale a determinar o volume de um prisma triangular, no qual a base é um triângulo isósceles, cujos lados iguais medem x e os ângulos da base medem θ, e a altura é y. Sabemos que o volume do prisma depende tanto da área da base quanto da altura, sendo assim, considerando y um número fixo o volume será máximo se maximizarmos a área base. Para tanto, vamos refletir a Figura 14 sobre a base obtendo a figura 15. Observe que a figura 15 é um paralelogramo e pelo problema anterior já descobrimos que o quadrado possibilitará a maior área, assim $\beta = 90\,^\circ$ e como $\beta = 2\theta$, temos $\theta = 45\,^\circ$.

Figura 14 – Triângulo ABC



fonte: Produzido pelo autor

Figura 15 – Losango ABCD



fonte: Produzido pelo autor

Tendo descoberto a medida do ângulo θ, falta determinar as medidas de x e de y. Como a figura 15 é um quadrado de lado x sua área será x^2 e como a área da figura 14 é metade da área da figura 15, temos que $readabase = \frac{x^2}{2}$. Pelo enunciado temos que $4x + y = 12$, assim, $y = 12 - 4x(I)$. Como $Volume = readabase \cdot altura$, temos $V = \frac{x^2}{2}(12 - 4x)$, daí $V = x^2(6 - 2x)$.

Neste ponto, investigaremos a medida de x que possibilita o maior volume, mas primeiro é necessário conhecer o intervalo a que x pertence. Bem, x e y devem ser maiores que zero por se tratar de medidas. Além disso, temos que $4x + y = 12$, desta forma, quando retiramos y a medida de $4x$ deve ser menor que 12, logo como $4x < 12$, temos $x < 3$. Resumindo $0 < x < 3$, a tabela abaixo exibe o resultado do volume para possíveis valores de x.

É possível perceber que a função cresce no intervalo (0,2] e decresce em [2,3) atingindo seu valor máximo em $x = 2(II)$, substituindo (II) em (I), temos $y = 12 - 4.2 = 4$. Portanto, a tenda terá volume máximo quando $x = 2, y = 4$ e $\theta = 45\,^\circ$.

Tabela 2 – Volume da tenda

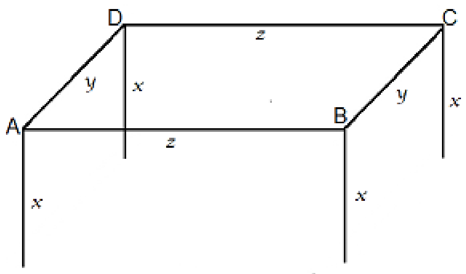
x	$V = x^2(6-2x)$
0	$V = 0^2(6-2\cdot 0) = 0$
0,5	$V = 0,5^2(6-2\cdot 0,5) = 1,25$
1,0	$V = 1^2(6-2\cdot 1) = 4$
1,5	$V = 1,5^2(6-2\cdot 1,5) = 6,75$
2,0	$V = 2^2(6-2\cdot 2) = 8$
2,5	$V = 2,5^2(6-2\cdot 2,5) = 6,25$
2,8	$V - 2,8^2(6-2\cdot 2,8) = 3,136$
3,0	$V = 3^2(6-2\cdot 3) = 0$

fonte: Produzido pelo autor

3.1.3 ESTRUTURA TIPO CAIXA

PROBLEMA 3 - Utilizando 48 metros de ripa, pretende-se construir uma estrutura tipo caixa. Para esse fim, a ripa será cortada em 8 partes, 4 delas medindo x, 2 medindo y e 2 medindo z. Sabendo que a disposição dos pedaços de ripa será de acordo com a figura 13 e que as ripas de medida x devem ser postas a 90 do solo, quais deverão ser as medidas de x, y e z para que a estrutura possua volume máximo?

Figura 16 – Estrutura tipo caixa



fonte: Produzido pelo autor

RESOLUÇÃO SUGERIDA

A resolução dessa questão é semelhante a resolução anterior. Desta forma, mostraremos ao aluno que encontrar o volume da tenda equivale a calcular o volume do prisma de base retangular, no qual x é a altura e a base é o retângulo formado por y e z. Vamos considerar o valor de x fixo, apesar de desconhecido. Com isso, devemos maximizar a área do retângulo $ABCD$ para maximizarmos o volume. Pelo problema 1, $ABCD$ deve ser um quadrado, sendo assim, $y = z$. Além disso, $4x + 2y + 2z = 48$, com $y = z$, temos $4x + 2y + 2y = 48$, daí $4x + 4y = 48$, dividindo os dois membros por 4, temos $x + y = 12$, logo $x = 12 - y$.

Encontraremos o volume por meio da fórmula, $V = xyz$, como $y = z$, teremos $V = x.y^2$ e como $x = 12 - y$, temos $V = (12 - y)y^2$. Como x e y são positivos por se tratar de medidas e $x + y = 12$, y deve ser maior que zero e menor que 12. De posse dessas informações construiremos a Tabela 3 para encontrar qual valor de y dentro do intervalo aberto (0, 12) possibilita o maior volume.

Tabela 3 – Volume da estrutura tipo caixa

MEDIDA DE y (m)	$V = (12 - y)y^2\ (m^3)$
0,00	$V = (12 - 0,00)0,00^2 = 0,00$
1,00	$V = (12 - 1,00)1,00^2 = 11,00$
2,00	$V = (12 - 2,00)2,00^2 = 40,00$
3,00	$V = (12 - 3,00)3,00^2 = 81,00$
4,00	$V = (12 - 4,00)4,00^2 = 128,00$
5,00	$V = (12 - 5,00)5,00^2 = 17,005$
6,00	$V = (12 - 6,00)6,00^2 = 216,00$
7,00	$V = (12 - 7,00)7,00^2 = 245,00$
7,50	$V = (12 - 7,50)7,50^2 \approx 253,12$
7,75	$V = (12 - 7,75)7,75^2 \approx 255,26$
8,00	$V = (12 - 8,00)8,00^2 = 256,00$
8,25	$V = (12 - 8,25)8,25^2 = 255,23$
8,50	$V = (12 - 8,50)8,50^2 = 252,87$
9,00	$V = (12 - 9,00)9,00^2 = 243,00$
10,0	$V = (12 - 10,0)10,0^2 = 200,0$
11,0	$V = (12 - 11,0)11,0^2 = 121,0$
12,0	$V = (12 - 12,0)12,0^2 = 0,00$

fonte: Produzido pelo autor

Neste caso, a função cresce no intervalo]0, 8] e decresce em [8, 12[, atingindo seu valor máximo em $y = 8$. Assim, temos $x = 12 - y = 12 - 8 = 4$ e $z = 8$, pois $z = y$.

4 RELATO DO MINICURSO

O minicurso ocorreu no Colégio Estadual Dom Juvêncio de Britto, que está localizado na cidade Canindé do São Francisco, Sergipe. Sendo ministrado a uma turma de EJAEM 2ª Etapa, composta em sua maioria por adultos cujas profissões variavam entre trabalhadores do campo, donas de casa, operários e comerciários.

No estado de Sergipe, o EJAEM é dividido em quatro etapas, cada uma correspondendo a um semestre. A disciplina de matemática deve ser ministrada na primeira e segunda etapa, devendo esse período de um ano corresponder aos três anos do Ensino Médio.

4.1 RESULTADO DO PRÉ-TESTE

Inicialmente, foi aplicado a turma o pré-teste para verificar o conhecimento prévio que a turma possuía sobre otimização e cálculo de áreas. Com essa avaliação diagnóstica foi observado que dos 18 estudantes, 7 responderam não sei para todas as perguntas, os demais responderam as questões 3, 4 e/ou 5 relativas a otimização, mas não souberam responder as 1 e 2 relativas ao cálculo de área de retângulo. Quanto aos 11 pré-testes em que as questões 3, 4 e/ou 5 foram respondidas temos o cenário conforme às tabelas 4, 5 e 6.

Analisando as respostas, percebemos que alguns alunos possuem conhecimento sobre otimização, ainda que intuitivo. No caso dos alunos 3 e 11 as respostas estão diretamente ligadas a atuação profissional de cada um. Além disso, a turma mostrou desconhecer o cálculo da área do retângulo, com isso, foi necessário o ensino de tal conteúdo.

Tabela 4 – Questão 3

Para você, o que significa otimização?	
ESTUDANTE	RESPOSTA
1 e 2	um objetivo
3	limpador de luxo
4, 5, 6 e 7	deixa algo mais leve ou seja limpo
8 e 9	tornar ótimo ou ideal e extrairo melho rendimento possível, em qualquer área de atividade (sic)
10	diminuir para ter um bom aproveitamento
11	processo através do qual obtem o melhor valor de uma grandeza (sic)

fonte: respostas do pré-teste

Tabela 5 – Questão 4

Você considera a otimização importante para a sociedade? Por quê?	
ESTUDANTE	RESPOSTA
1 e 2	Sim, por ter objetivo de valores
3	Sim, porque sem a otimização nossos celulares e computadores ficão (sic) lentos
4	Sim, porque tiraria muita coisa que faz mal para sociedade
5	Sim, por ter objetivo de valores
6 e 7	Sim porque ter otimização e (sic) muito importante para a sociedade
8	Não sei
9	Sim, por que tem muitas coisas que os professores venham nos mostrar
10	Sim, com a otimização, e (sic) possivel (sic) ter um melhor aproveitameto (sic)
11	Por que (sic) o fluxo de caixa é importante para otimiza (sic) a gestão finaceira (sic) assim levando em considera assim o futuro pode se bosseado (sic)

fonte:respostas do pré-teste

Tabela 6 – Questão 5

Como a otimização pode ajudar em sua vida?	
ESTUDANTE	RESPOSTA
1	sem resposta
2, 5 e 8	não sei
3	Poder mim (sic) ajudar nas redi (sic) sociais e no meu trabalhar de informatico (sic) e no meu dia-dia (sic).
4	deixando mas (sic) leve
6	Deixando ela leve
7	Ajuda organiza a vida deixando mais leve
9	Porque na vida é preciso organiza e otimizar todos os processos.
10	Sim, ajuda a ter mais espaco (sic)...
11	Pode sim na área adiminitrativa (sic), economica (sic).

fonte: resposta do pré-teste

4.2 MINICURSO

Desta forma, foram ministradas aulas de Geometria Plana com enfoque em apresentar os principais tipos de figuras planas paralelogramos, retângulos, quadrados, triângulos, losango e trapézios, bem como suas características e principais elementos, além de abordar o conceito de ângulo e ensinar como calcular perímetro e a área de cada figura. Em seguida, aprenderam sobre prismas e o cálculo de seu volume.

Tais conteúdos estão presentes no referencial curricular do Ensino Médio e devem ser ensinados na EJAEM uma vez que o currículo desta modalidade de ensino deve acompanhar o currículo do ensino regular. Desta forma, as aulas relativas a Geometria Plana não estão incluídas no minicurso.

Os problemas 1, 2 e 3 foram trabalhados após a turma demonstrar conhecimento sólido sobre os conteúdos citados acima. Apresentaremos, agora, o relato do desenvolvimento do minicurso proposto. A resolução de cada problema teve duração de 1 hora e meia.

Primeiramente, o conceito de otimização foi apresentado, conforme Bazzo (2006, p.183), como *"o processo de procura por uma solução que forneça o máximo benefício segundo algum critério"*, além de discorrer sobre a ampla abrangência do tema em diversos campos, como por exemplo na informática, economia, engenharia, entre outros. Logo após, foi esclarecido que o minicurso abordaria problemas que buscam maximizar áreas e volumes utilizando a mesma quantidade de material. Com isso, foi iniciado a resolução do problema 1.

4.2.1 PROBLEMA DA CERCA

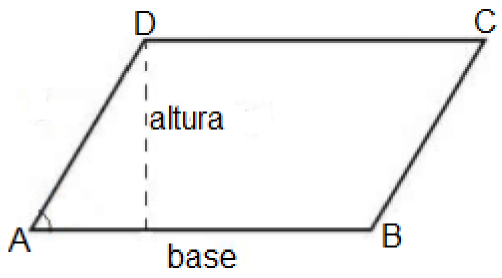
PROBLEMA 1 Com 24 metros de aramado a prefeitura pretende cercar uma área para construir uma horta comunitária. Sabendo que a horta deve possuir 4 lados e que os lados opostos devem possuir medidas iguais, quais devem ser as medidas de cada lado e o ângulo formado entre os lados para que a horta possua área máxima?

Para a resolução deste problema começamos analisando seus principais pontos, sendo eles, o objetivo, os critérios e o significado de ângulo. Bem, o objetivo é identificar a forma e as medidas dos lados da figura para que a horta apresente a maior área dento dos parâmetros estabelecidos, neste ponto alguns alunos fizeram suposições, escolhidas ao acaso, sobre o resultado e um deles adivinhou que seria um quadrado, porém, não soube explicar o que tornava o seu palpite correto, bem como, o método empregado para chegar ao resultado.

Quanto aos critérios, foi enfatizado que a medida total o arame deve ser $24m$ e discutido qual seria o tipo de figura que está de acordo com as instruções do enunciado. Neste momento, afirmaram, de início, que a figura exigida era um quadrado, mas ao serem alertados sobre a não existência da solicitação que os quatro lados fossem iguais, perceberam que o formato poderia ser diferente de um quadrado e sobre a necessidade de a figura possuir lados opostos iguais declararam prontamente que se tratava de um retângulo. Diante disto, foram precavidos que a questão não estabelece qual a medida do ângulo interno, logo, este pode ser diferente de $90°$, assim, a única opção que se justapõe as instruções do enunciado é o paralelogramo. Por fim, recordou-se que o retângulo e o quadrado são tipos especiais de paralelogramos.

Diante da constatação anterior, o paralelogramo $ABCD$ foi desenhado no quadro e a turma, ao ser inquirida sobre o cálculo da área do paralelogramo, afirmou que deveria multiplicar a base AB pela altura, nisso a fórmula $A = b \cdot h$ foi escrita no quadro. Foi esclarecido que, fixando a base, poderíamos maximizar a área encontrando o valor do ângulo que possibilita a maior altura.

Figura 17 – Cerca

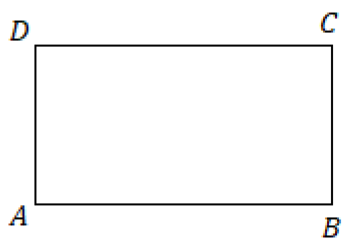


fonte: Produzido pelo autor

Objetivando a compreensão da turma que o lado AD e a altura do paralelogramo deveriam coincidir para que a altura fosse máxima, foi questionado se eles poderiam identificar qual o elemento que apresenta maior medida: o lado AD ou a altura. Três alunos afirmaram que seria o lado AD, mas o restante da sala não soube responder. O entendimento dos demais se deu ao se empregar uma analogia entre os elementos do paralelogramos e o exemplo de uma escada apoiada na parede, onde a escada seria o lado AD e a altura alcançada pela escada seria a altura do paralelogramo.

De posse desta informação, verificamos que a maior altura alcançada pela escada seria atingida quando a escada estivesse totalmente encostada na parede e que da mesma forma o lado AD deveria estar totalmente encostado na altura do paralelogramo, ou seja, os dois elementos devem coincidir para que a altura seja a maior possível. Assim, concluiu-se que o ângulo entre AD e AB deve ser de $90°$. E como o tema havia sido discutido ainda nessa aula, a classe notou que a figura deveria ser um retângulo.

Figura 18 – Quadrado ABCD



fonte: Produzido pelo autor

O problema agora se resumia em maximizar a área do retângulo, desta forma, o retângulo acima foi posto no quadro. Sendo enfatizado que as medidas dos lados eram desconhecidas e que existia a necessidade de representá-las, questionou-se como poderíamos fazê-lo. Um aluno respondeu de prontidão que deveríamos nomear um lado de "x"e o outro de "y", então indicamos $AB = x$ e $AD = y$.

Ao se perguntar qual era o perímetro da figura, todos afirmaram que era 24 metros, também recordamos que o perímetro é obtido pela soma dos lados, resultando assim a seguinte equação $2x + 2y = 24$, que ao dividir o primeiro e segundo membro por dois e em seguida subtrair x dos dois membros encontra-se o resultado $y = 12 - x$.

Foi ressaltado que a finalidade era maximizar a área e que para isso era necessário utilizar sua fórmula. Com isso, ao ser indagada sobre como é calcula a área do retângulo a turma respondeu que deveria fazer base vezes altura. Já sabíamos que a base media x e a altura y, bem como, $y = 12 - x$, assim, a fórmula da área deste retângulo seria $rea = (12 - x)x$.

Isso feito, foi esclarecido que o valor de x, por se tratar de uma medida, não poderia ser menor que zero, como também, ser maior que 12, uma vez que $x + y = 12$ e nenhum dos dois pode ser negativo, bem como, não poderia ser igual a 0 ou a 12, pois nesses casos a área seria nula. Desta forma, o valor de x poderia variar entre 0 e 12, então, preenchemos a tabela 1 com os valores naturais inseridos neste intervalo e calculamos a área relativa a cada valor atribuído a x.

Ao completar a tabela, foi solicitado que a classe apontasse o que notavam. Primeiro uma aluna disse que $x = 6$ apresentava a maior área, em seguida outra aluna observou que o resultado de $x = 1$ e $x = 11$ eram iguais. Nesse momento, foi explanado o fato da área ir aumentando até chegar em $x = 6$ e reduzir após $x = 6$, além de mostrar a simetria nos valores da área. Verificamos, ainda, que uma interpretação possível para a simetria é a rotação do retângulo em $90\,^{\circ}$.

Por fim, calculamos o valor de y, encontrando que $y = 12 - 6 = 6$, assim observou-se que x e y apresentam a mesma medida, logo a horta deveria ter o formato de um quadrado. Concluímos, então, que dentre todos os paralelogramos de mesmo perímetro o que apresenta maior área é o quadrado.

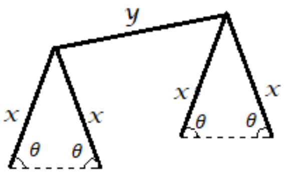
No dia seguinte, tendo concluído a resolução do problema 1, foi dada continuidade ao minicurso com o problema 2, cujo enunciado apresenta-se a seguir.

4.2.2 PROBLEMA DA TENDA

PROBLEMA 2 Utilizando uma ripa de madeira que mede 12 m de comprimento, pretende-se construir uma tenda. Para tanto, a ripa será cortada em cinco partes, quatro delas medindo x e outra medindo y. Segue abaixo o esqueleto da estrutura da tenda. Quais devem ser as medidas de x, y e do ângulo θ para que a tenda possua volume máximo?

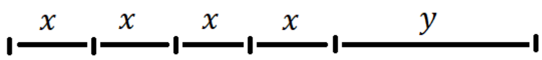
Para um melhor entendimento, desenhamos a figura 20 representando os cortes a serem realizados na ripa conforme as especificações do enunciado, reiterando que com tais pedaços iriamos construir a tenda como indicado na figura 19.

Figura 19 – Tenda



fonte: Produzido pelo autor

Figura 20 – Cortes da ripa

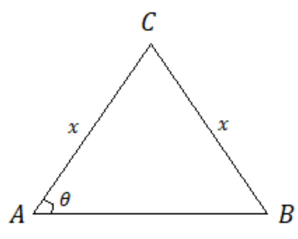


fonte: Produzido pelo autor

Argumentou-se que o volume da tenda era equivalente ao volume de um prisma triangular, logo poderíamos resolver o problema maximizando o volume de um prisma que possua as mesmas características da tenda. Assim, ao ser questionada sobre a maneira de encontrar o volume de um prisma, a turma respondeu que deveríamos multiplicar a área da base pela altura.

Com isso, propusemos o uso da técnica no quesito anterior, que consiste em fixar a altura e procurar qual deve ser a configuração da base para que a área seja a maior possível. Para tanto, desenhando a base do prisma ABC, argumentamos que refletindo-a no eixo AB iriamos obter uma figura cuja a área equivale ao dobro da base do prisma, bem como, o ângulo β formado pelos lados CA e AC' é o dobro de θ.

Figura 21 – Triangulo ABC

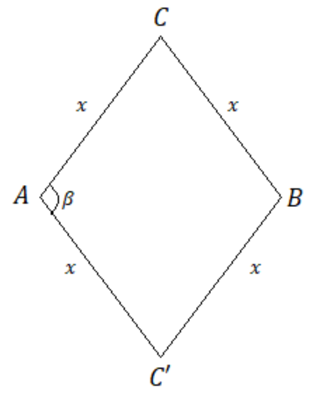


fonte: Produzido pelo autor

Ao analisar as características da figura 22, vimos que se trata de um paralelogramo, visto que as medidas dos lados opostos são iguais. Assim, pediu-se para a turma rever o problema 1 e indicar como um paralelogramo de perímetro fixo poderia ter a maior área possível. A resposta foi que deveria ser um quadrado.

Desta forma, sendo a figura 21 um quadrado, $\beta = 90\,°$ e consequentemente $\theta = 45\,°$. Logo, aprontamos que as ripas de medida x devem ser fincadas no solo formando $45\,°$ com o

Figura 22 – Losango ABCD



fonte: Produzido pelo autor

mesmo. Além disso, pontuou-se que por ser um quadrado a área da figura 21 é x^2 e como a base do prisma possui metade da área da figura 22, temos que a área da base do prisma é $\frac{x^2}{2}$.

Tendo encontrado a melhor configuração da base do prisma, demos seguimento à resolução procurando a fórmula do volume do prisma em questão. Para isso, perguntou-se à turma sobre como se calcula o volume de um prisma, responderam que deveríamos multiplicar a área da base pela altura. Ao ser questionada sobre quais eram a altura e a área da base do prisma analisado, a turma afirmou que a altura media y e a área da base media $\frac{x^2}{2}$. Com isso, encontramos que o volume deste prisma é dado por $V = \frac{x^2}{2}$.

Sendo assim, argumentou-se que pela fórmula anterior temos o volume do prisma dependendo de duas variáveis, contudo, no caso deste problema, podemos encontrar uma fórmula que dependa apenas de uma variável. Lembramos, então, que a ripa é formado por quatro partes de medida x e uma de medida y, bem como que seu comprimento total é de 12 metros. Tal situação pode ser traduzida pela equação $4x + y = 12$.

Em seguida, foi colocada a necessidade de isolar o y no primeiro membro, para que ficasse em função de x. Com esse objetivo, alegamos que se os quatro pedaços x mais o pedaço y medem 12 metros, então, a medida do pedaço y poderia ser encontrada retirando a medida dos quatro pedaços x da medida total, 12 metros. E essa circunstância pode ser representada pela equação $y = 12 - 4x$.

De posse dessas informações, substituímos o y de $V = \frac{x^2}{2}y$ por $(12 - 4x)$, encontrando a fórmula $V = \frac{x^2}{2}(12 - 4x)$, na qual o volume depende de apenas uma variável. Mencionamos ainda sobre a possibilidade de simplificar $V = \frac{x^2}{2}(12 - 4x)$ dividindo 12 e $4x$ por 2, o que resulta em $V = x^2(6 - 2x)$. Dessa forma, o problema agora se restringe em procurar qual valor de x maximiza o volume.

Para tanto, enfatizou-se que como no problema 1 o valor de x não poderia ser menor que zero, além disso, como $4x + y = 12$ e y não pode ser menor que zero, os quatro pedaços juntos não poderiam ser maiores que 12, logo x não pode ser maior que 3. Com isso, a tabela 2 foi construída no quadro e calculamos cada área de acordo com cada valor atribuído a x.

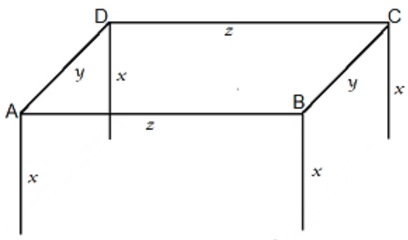
Com a tabela completa, solicitou-se que a turma apontasse o que notavam de interessante na tabela. Alguns alunos responderam que $x = 2$ apresentavam a maior área, bem como, que o valor da área crescia até $x = 2$ e depois decrescia até $x = 3$. Por fim, calculamos $y = 12 - 4 \cdot 2 = 8$, concluindo que para que a tenda possua volume máximo é necessário que $x = 2, y = 4$ e $\theta = 45\,^{\circ}$.

Finalizado o problema 2, realizamos em um dia posterior a resolução do problema 3, cujo enunciado apresenta-se a seguir.

4.2.3 PROBLEMA DA ESTRUTURA TIPO CAIXA

PROBLEMA 3 - Utilizando 48 metros de ripa, pretende-se construir uma estrutura tipo caixa. Para esse fim, a ripa será cortada em oito partes, quatro delas medindo x, duas medindo y e duas medindo z. Sabendo que a disposição dos pedaços de ripa será de acordo com a figura 23 e que as ripas de medida x devem ser postas a $90\,^{\circ}$ do solo, quais deverão ser as medidas de x, y e z para que a estrutura possua volume máximo?

Figura 23 – Estrutura tipo caixa



fonte: Produzido pelo autor

Inicialmente o problema foi escrito no quadro e, enquanto alguns alunos o copiavam, outro aluno tentava resolvê-lo. Imediatamente, por ter acompanhado a solução anterior, o aluno identificou que o polígono $ABCD$ deveria ser um quadrado e concluiu, com isso, que $y = z$. Para encontrar os valores de x, y e z, a técnica utilizada pelo aluno consistia em estabelecer valores para x, y e z de modo que $4x + 2y + 2z = 48$ e calcular o volume de cada terna (x, y, z). A princípio, tentava descobrir se havia acertado perguntando se sua suposição estava correta, contudo, ao ser alertado que um bom método produz um resultado confiável o aluno aprimorou sua estratégia e conseguiu encontrar a solução do problema. Para tanto, organizou em ordem crescente os valores atribuídos a x e observou o comportamento dos resultados, verificando que o volume aumentava até $x = 4$ e reduzia após esse ponto, deduzindo que assim $x = 4$ e $y = z = 8$.

Apesar de já solucionado por um aluno, era necessária apresentar a resolução do problema para a turma. Com tal intuito, ponderamos sobre os principais pontos: critérios estabelecidos pelo enunciado; o ângulo formado entre as ripas de medida x e o solo; e o objetivo do problema.

Tendo esclarecido esses pontos, iniciamos a resolução expondo que calcular o volume da estrutura requerida era equivalente a calcular o volume de um prisma de base retangular, além disso, utilizou-se uma caixa para apontar o local referente a cada medida, mostrando que a medida x equivaleria a altura e o polígono $ABCD$ formado por y e z seria a base do prisma.

Posteriormente, foi dito que utilizaríamos a mesma estratégia do problema anterior, ou seja, iríamos fixar a altura e investigar qual configuração do polígono $ABCD$ apresenta maior área. Para tanto, ressaltamos que o polígono $ABCD$ era um paralelogramo, uma vez que possui lados opostos de mesma medida. E, em seguida, de posse desta informação, a turma foi questionada sobre qual deveria ser o formato de $ABCD$ para que possuísse área máxima. Com isso, relembrando os problemas anteriores, a classe respondeu que $ABCD$ deveria ser um quadrado. Deduziu-se, assim, que como no quadrado os lados são iguais, então $y = z$, sendo assim, o polígono que possibilita o maior volume é um prisma de base quadrada cujo volume é dado por $V = xy^2$.

Ressaltamos que pela fórmula anterior o volume está em função de duas variáveis, e no caso desta questão existe a possibilidade do volume está em função de apenas uma variável. Sendo assim, retomamos ao enunciado e verificamos que a ripa de 48 metros deverá ser cortada em oito pedaços, quatro deles medindo x, dois medindo y e dois medindo z, tal situação pode ser representada pela equação $4x + 2y + 2z = 48$. Alegamos, ainda, que como $y = z$ é possível substituir z por y, obtendo $4x + 2y + 2y = 48 \Leftrightarrow 4x + 4y = 48 \Leftrightarrow x + y = 12 \Leftrightarrow x = 12 - y$. Neste ponto, a turma foi alertada que nenhuma das variáveis poderia ser maior que 12, visto que x e y devem ser maiores que zero por representarem medidas.

Dos resultados $V = xy^2$ e $x = 12 - y$, concluímos que $V = (12 - y)y^2$. Esta última fórmula é mais adequada para a resolução, pois está em função de apenas uma variável. Por fim construímos a tabela 3 atribuindo valores para y no intervalo [0,12] e verificamos qual valor de y possibilita o maior volume. A turma logo se atentou que o volume crescia até $y = 8$ e, em seguida, decrescia até $y = 12$, sendo o maior volume em $y = 8$.

Portanto, concluiu-se que a estrutura apresentará maior volume quando $y = z = 8$ e $x = 12 - 8 = 4$.

5 RESULTADO DO PÓS-TESTE

Tendo finalizado as resoluções dos problemas propostos, reaplicamos o mesmo teste do início do minicurso. Apresentaremos, agora, o resultado do pós-teste aplicado na aula posterior ao término do minicurso. É importante esclarecer que entre a aplicação do pré e pós-teste houve um longo período de tempo, tendo em vista a necessidade de ensinar geometria apontada pelo pré-teste.

O pré-teste foi aplicado dia 13/08/18, enquanto o pós-teste dia 15/01/19. Nesse período, os alunos 4 e 9 foram aprovados no ENCCEJA – Exame Nacional de Certificação de Competência de Jovens e Adultos, *"o Encceja pode ser realizado para pleitear certificação no nível de conclusão do ensino fundamental e ensino médio"* disponível em: http://portal.mec.gov.br/encceja, data de acesso 23/06/2019. Além disso, houve a desistência dos alunos 5, 11, 14 e 16. Outro fator a se considerar: a oferta do transporte escolar do colégio não comtempla todos os estudantes em todos os dias letivos, o que ocasiona a ausência dos alunos da zona rural em alguns dias do ano.

Desta forma, temos uma incompatibilidade entre os alunos que realizaram o pré-teste e os que realizaram o pós-teste. As duas avaliações foram executadas por nove alunos são eles aluno 6, 7, 8, 10, 12 , 13, 15, 17 e 18. Já os alunos 1, 2, 3, 4, 5, 9. 11, 14 e 16 responderam apenas ao pré-teste. Enquanto os alunos 19, 20, 21 22, 23, 24, 25 e 26 efetuaram apenas o pós-teste.

Optamos por exibir as respostas da primeira questão indicando a quantidade de alunos que acertaram, erraram e não responderam, pois é possível classificar dessa forma. No caso das demais questões, por possuírem característica subjetiva, mostraremos a resposta de cada aluno. Segue resultado do pós-teste.

5.1 RESPOSTAS OBSERVADAS

1- Pretende construir uma horta em seu quintal, Joana comprou 16 metros de arame. Como deseja aproveitar o arame de forma a obter a maior área de plantio possível, desenhou quatro esboços para verificar qual o mais adequado.

a. *1 metro de altura e 7 de comprimento*

b. *2 metros de altura e 6 de comprimento*

c. *3 metros de altura e 5 de comprimento*

d. *4 metros de altura e 4 de comprimento*

• *Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço a?*

Tabela 7 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL (%) DE ACERTO
9	4	5	50

fonte: análise do pós-teste

• *Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço b?*

Tabela 8 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL(%) DE ACERTO
9	3	6	50

fonte: análise do pós-teste

• *Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço c*?

Tabela 9 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL(%) DE ACERTO
9	3	6	50

fonte: análise do pós-teste

• *Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço d?*

Tabela 10 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL(%) DE ACERTO
10	2	6	55,56

fonte:análise do pós-teste

• *Em algum esboço será necessária uma quantidade de arame diferente de 16 metros?*

Tabela 11 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL(%) DE ACERTO
10	0	8	55,56

fonte:análise do pós-teste

• *Para obter maior área, qual esboço Joana deverá escolher?*

Tabela 12 – Resultado

ACERTOS	ERROS	SEM RESPOSTA	PERCENTUAL(%) DE ACERTO
10	0	8	55,56

fonte: análise do pós-teste

2- *Suponha que você possua 12 metros de arame para construir uma horta retangular, de modo a obter a maior área possível. Desenhe os possíveis esboços e indique qual você escolheria para obter a maior área.*

Ver tabela 13

3- *Para você, o que significa otimização?*

Ver tabela 14

4- *Você considera a otimização importante para a sociedade? Por quê?*

Ver tabela 15

5- *Como a otimização pode ajudar em sua vida?*

Ver tabela 16

Tabela 13 – 2ª questão

ALUNO Nº	RESPOSTA
6, 7, 8, 12, 15, 18, 22, 24, 25	SEM RESPOSTA
10	Desenhou um quadrado
13	A figura B área = $4 \cdot 3 = 12$
17	Desenhou um retângulo
19	Desenhou um retângulo de base 4 e altura 2
20	2 metros de largura e 6 de altura
21	Eu escolheria o quadrado.
23	o quadrado
26	escolho o quadrado, pois ele possibilita melhor aproveitamento de área

fonte: análise do pós-teste

Tabela 14 – 3ª questão

ALUNO Nº	RESPOSTA
6	Significa, criacão de condições mais favoraveis para o desenvolvimento de algo
7	Tornar o melhor rendimento possível a qualquer área de atividade
8, 15, 17, 18	SEM RESPOSTA
10	Diminuir para ter um bom aproveitamento
12	criação de condições mais favoraveis para o desenvolvimento de algo.
13	É melhor aproveitamento de uma área
19	Melhorar um problema procurando a melhor solução
20	É algo que está sendo aperfeicoado (sic)
21, 23, 25	não sei
22	Procura simplifica (sic), obtendo o valor maximo (sic) de uma aréa (sic).
24	Estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar formas de resolver
26	obter melhor aproveitamento de áreas.

fonte: análise do pós-tetes

Tabela 15 – 4ª questão

ALUNO Nº	RESPOSTA
6	Porque e melho para as pessoa (sic)
7	Porque ajuda a melhora qualidade de vida.
8, 17, 18, 20, 24	SEM RESPOSTA
10	Sim, com a otimização, epossivel (sic) ter um melhor aproveitameto (sic)
12	Sim pois a profissão dos professores e mais importante. pq serras
13	Sim. Porque as pessoas tem a oportunidade escolher a melhor forma para o aproveitamento da área.
15	Sim, por que e importantes
19	Sim para a sociedade viver da melhor forma possivel (sic)
21, 23	não sei
22	Sim. Porque podemos obter como utiliza uma area (sic) em grande escala.
25	não sei!
26	Sim, pois proporciona melhor aproveitamento de áreas

fonte: análise do pós-teste

Tabela 16 – 5ª questão

ALUNO Nº	RESPOSTA
6	Otimizacão pode ajuda a sociedade (sic)
7	Otimização garante mais agilidade e efiencia melhorando a qualidade de vida.
8, 13, 15, 17 , 18, 20, 24	SEM RESPOSTA
10	Sim. Ajuda a ter mais espaco(sic)...
12	Ter controle sobre sua vida!
19	Melhorando e ajudando acabar as dificuldade (sic)
21, 23	não sei
22	Ajudando a obter o valor de suposta aréa (sic)
25	não sei!
26	em aproveitar o máximo áreas com a mesma quantidade de material.

fonte:análise do pós-teste

5.2 ANÁLISE DO PÓS-TESTE

O pós-teste indicou que as aulas e o minicurso interferiram em uma parte da turma, apenas. No caso de primeira questão temos um percentual de acerto que equivale a metade ou pouco mais da metade dos estudantes.

As demais questões estão relacionadas ao minicurso. No caso da segunda questão apenas quatro alunos demonstraram ter compreendido que dentre todos os paralelogramas de perímetro fixo o quadrado possuirá a maior área.

Para um melhor entedimento do resultado das questões 3, 4 e 5, classificaremos as respostas em imprecisa, razoável, adequada ou em conformidade. Este último termo indica as respostas inspiradas na natureza dos problemas apresentados no minicurso.

Tabela 17 – Resultado

QUESTÃO	IMPRECISA	RAZOÁVEL	ADEQUADA	EM CONFORMIDADE
3	-	6, 12, 20	7, 10, 19	13, 22, 24, 26
4	6, 7, 12, 15, 19	22	10	13, 26
5	6	7, 12	-	10, 22, 26

Sendo assim, notamos que dez alunos assimilaram o conceito de otimização, o que corresponde a aproximadamente 55,56 % da turma. Quatro alunos demonstraram entender a importância da otimização para a sociedade, em percentual 22,23 % aproximadamente. E cinco alunos comprovaram perceber a importância da otimização em suas vidas, em percentual 27,78 % aproximadamente.

Acreditamos que os principais fatores responsáveis pelo baixo desempenho no pós-teste sejam: a complexidade das resoluções para o perfil da turma; a pouca familiaridade da turma com o método trabalhado; dificuldade de imterpretação de texto; perguntas mal elaboradas.

6 PROBLEMA DA PIRÂMIDE

Neste capítulo apresentaremos um problema de nossa autoria, cuja resolução vale-se de Geometria Euclidiana e de Cálculo Diferencial. Consideramos importante esclarecer que houve uma tentativa frustrada de resolução utilizando exclusivamente cálculo diferencial, fracasso esse causado pela quantidade elevada de variáveis a se considerar.

Foram alguns resultados da Geometria Euclidiana que possibilitaram encontrar as melhores configurações para alcançar o objetivo do problema. A resolução dessa questão foi de tal complexidade que escolhemos suprimi-la do minicurso, visto que nosso público alvo foi a Educação de Jovens e Adultos. Exibiremos a seguir o enunciado do problema empregando uma linguagem usual.

Problema da pirâmide: Dada uma ripa de comprimento L. Devemos cortá-la em quatro partes e dispô-las de modo que, em cada pedaço, uma das extremidades seja fixada no solo e a outra seja unida às dos outros pedaços em um único ponto. Formando assim, uma estrutura cujo volume interno equivalerá ao de uma pirâmide cuja base é um quadrilátero. Temos, ainda, que cada extremidade fixada no solo pode ser entendida como o vértice de um quadrilátero Q. Além disso, cada pedaço de ripa formará um determinado ângulo com o solo, denominado θ_n, com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Quais devem ser a as medidas de cada pedaço, dos ângulos θ_n e a configuração de Q para que o volume da estrutura seja máximo?

Diante das muitas ideias envolvidas na resolução dessa questão preferimos exibi-la decompondo seus pré-requisitos em definições, lemas e preposições. Além de apresentar, separadamente, o Princípio da Mínima Distância, fundamental nessa solução.

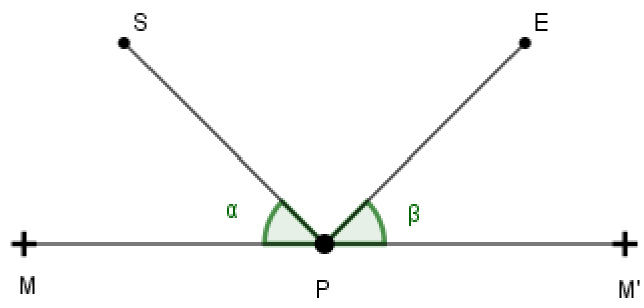
6.1 PRINCÍPIO DA MÍNIMA DISTÂNCIA

O Princípio da Mínima Distância garante que o menor caminho que a luz percorre no momento em que a imagem de um objeto incidi sobre um espelho e é visto por um observador ocorre quando os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Embora já conhecido na antiguidade

> "foi Heron quem mostrou, por um argumento simples, numa obra chamada Catóptrica (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que na natureza nada se faz de forma difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador, o caminho mais curto possível SPE é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais".(Boyer 2012, p. 131)

Na continuação da citação acima é apresentada a demonstração elaborada por Heron.

Figura 24 – Igualdade dos ângulos de incidêcia e reflexão

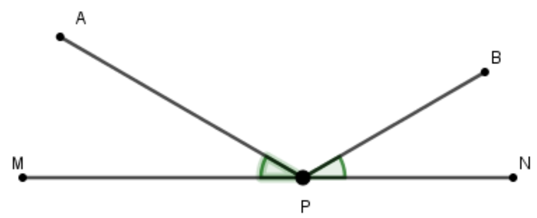


fonte: Produzido pelo autor

Aqui mostraremos uma versão do princípio que melhor se adequa a nossa necessidade.

Dados uma reta MN e dois pontos A e B não pertencentes a MN que se encontram do mesmo lado da reta. O menor percurso entre os pontos A e B que passa por MN ocorre em um determinado ponto P, de modo que, o menor ângulo formado por $\overline{AP}$ e $\overline{MN}$ é igual ao menor ângulo formado por $\overline{BP}$ e $\overline{MN}$.

Figura 25 – Demonstrando menor distância



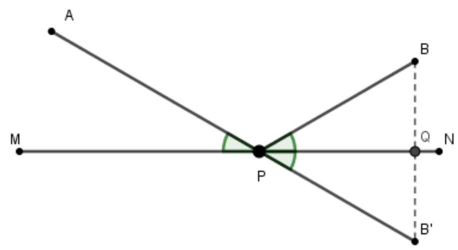
fonte: Produzido pelo autor

DEMONSTRAÇÃO

Traçaremos o seguimento de reta $\overline{BB'}$ perpendicular a MN. De modo que, sendo $Q = MN \cap \overline{BB'}$, $\overline{BQ}$ tenha o mesmo comprimento de $\overline{QB'}$. Assim, obteremos $\triangle PQB$ e $\triangle PQB'$, congruentes pelo caso LAL. Logo, $\overline{PB} = \overline{PB'}$, assim, $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'}$.

Dessa forma, minimizar o percurso $\overline{AP} + \overline{PB}$ equivale a minimizar $\overline{AP} + \overline{PB'}$. Como a menor distância entre dois pontos quaisquer é uma linha reta, $\overline{AP} + \overline{PB'}$ será mínimo quando for igual ao seguimento de reta $\overline{AB'}$. Com isso, os ângulos $\angle M\widehat{P}A$ e $\angle N\widehat{P}B'$ serão opostos pelo vértice, logo $\angle M\widehat{P}A = \angle N\widehat{P}B'$. Por sua vez, $\angle N\widehat{P}B' = \angle N\widehat{P}B$, pois $\triangle PQB \equiv \triangle PQB'$. Portanto, $\angle M\widehat{P}A \equiv \angle N\widehat{P}B$.

Figura 26 – Demonstrando menor distância



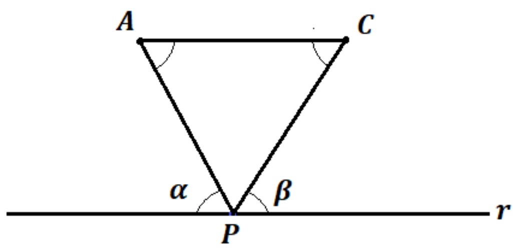
fonte: Produzido pelo autor

6.2 DEMAIS PRÉ-REQUISITOS

Para resolver o problema proposto neste capítulo são necessários outros resultados além do Princípio da Mínima Distância. Os lemas 1 e 2 são de nossa autoria. Para a demonstração do primeiro foi utilizado Geometria Euclidiana, já na do segundo, utilizou-se Cálculo Diferencial. No caso, da proposição encontramos na dissertação [12]. A seguir apresentaremos cada um deles.

LEMA 1 Dados a reta r e os pontos $A, C \notin r$ e o ponto $P \in r$. Se $\overline{AC}//r$, então, $\overline{AP} + \overline{PC}$ será mínimo quando $\overline{AP} = \overline{PC}$.

Figura 27 – Lema 1



fonte: Produzido pelo autor

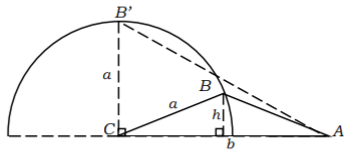
DEMONSTRAÇÃO

Sejam α o menor ângulo entre $\overline{AP}$ e r, e β o menor ângulo entre $\overline{CP}$ e r. Como $\overline{AC}//r$, temos, que $\alpha = \angle P\widehat{A}C$ e $\beta = \angle P\widehat{C}A$, pois são alternos internos. E sabemos pelo Princípio da Mínima Distância de Heron que $\overline{AP} + \overline{PC}$ será o caminho mais curto quando $\alpha = \beta$, assim, $\angle P\widehat{A}C = \beta = \angle P\widehat{C}A$. Dessa forma, temos que $\triangle APC$ é isósceles de base $\overline{AC}$, assim, temos $\overline{AP} = \overline{PC}$. $\square$

PROPOSIÇÃO 1 De todos os triângulos com dois dos lados medindo a e b, o de maior área é tal que esses dois lados formam um ângulo reto.

DEMONSTRAÇÃO

Figura 28 – Proposição 1



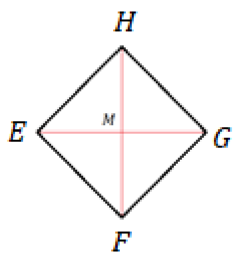
fonte: Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio, 2013

Considerando um triangulo ABC de lados $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, respectivamente. Seja h a altura relativa ao lado $\overline{CA}$. Girando o lado $\overline{BC}$ em torno de C é fácil ver que a altura do triângulo ABC será máxima quando o seguimento $\overline{BC}$ for perpendicular ao segmento $\overline{CA}$, como ilustra a figura.

LEMA 2 *De todos os losangos $EFGH$, de diagonais $\overline{FH} = D$ e $\overline{EG} = d$, em que $D + d$ é fixo, o de maior área é um quadrado.*

DEMONSTRAÇÃO

Figura 29 – Lema 2



fonte: Produzido pelo autor

Sejam $D + d = L$, $M = \overline{FH} \cap \overline{EG}$ e área de losango $EFGH = S$.

Inicialmente, encontraremos o máximo da função

$$S(d) = \frac{1}{2}(L - d)d \Rightarrow$$
$$S'(d) = \frac{1}{2}(L - 2d)$$

Assim, $\frac{L}{2}$ é o ponto crítico da função. E para qualquer $d < \frac{L}{2}$ temos $2d < L \Rightarrow (L - 2d) > 0$. Ainda temos que,

$$S''(d) = \frac{1}{2}(-2) = -1 < 0.$$

Logo $\frac{L}{2}$ é o máximo absoluto da função. E como, $D + d = L \Rightarrow D + \frac{L}{2} = L \Rightarrow D = \frac{L}{2}$, temos $D = d \Leftrightarrow \frac{D}{2} = \frac{D}{2}$.

Dessa forma, o triângulo $\triangle EMF$ é isósceles de base $\overline{EF}$ e com o ângulo $\angle E\widehat{M}F = 90°$ temos que os ângulos $\angle M\widehat{E}F = \angle M\widehat{F}E = 45°$. Analogamente, os ângulos $\angle M\widehat{F}G = \angle M\widehat{G}F = 45°$, $\angle M\widehat{G}H = \angle M\widehat{H}G = 45°$ e $\angle M\widehat{H}E = \angle M\widehat{E}H = 45°$. Sendo assim, temos que os ângulos $\angle F\widehat{E}H = \angle M\widehat{E}F + \angle M\widehat{E}H = 90°$, $\angle E\widehat{F}G = \angle M\widehat{F}E + \angle M\widehat{F}G = 90°$, $\angle F\widehat{H}G = \angle M\widehat{G}F + \angle M\widehat{G}H = 90°$ e $\angle G\widehat{H}E = \angle M\widehat{H}G + \angle M\widehat{H}E = 90°$.

Portanto, como em um losango os lados possuem medidas iguais, a área de $EFGH$ será máxima quando $EFGH$ for um quadrado.

PROPOSIÇÃO 2 *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais intersectam nos respectivos pontos médios.* (Caminha 2013, p. 56)

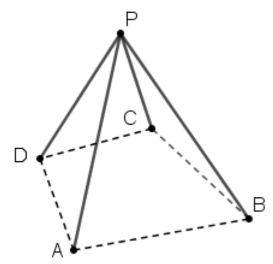
PROPOSIÇÃO 3 *Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.* (Caminha 2013, p. 66)

6.3 RESOLUÇÃO DO PROBEMA

De início, o problema proposto neste capítulo foi apresentado com linguagem usual, agora o enunciaremos fazendo uso de uma linguagem matemática formal e abstrata.

PROBLEMA DA PIRÂMIDE Dados A, B, C, D pontos do plano γ e o ponto $P \notin \gamma$. Sendo $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP} = L$. Para que o volume da pirâmide de base $ABCD$ e vértice P seja o maior possível, quais deverão ser as medidas de AP, BP, CP, DP, os ângulos formados entre cada um dos segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}, \overline{DP}$ e suas respectivas projeções no plano γ e a natureza do polígono $ABCD$?

Figura 30 – Pirâmide



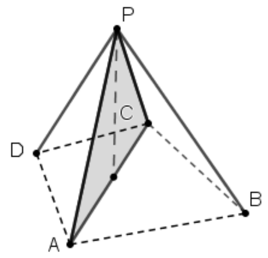
fonte: Produzido pelo autor

RESOLUÇÃO

O volume de uma pirâmide depende da área da base e da altura, então maximizaremos o produto dessas medidas.

Inicialmente, veremos que a altura da pirâmide é máxima quando $\overline{AP} = \overline{PC}$ e $\overline{BP} = \overline{PD}$. Chegamos a essa conclusão por meio do seguinte raciocínio. Note que os planos determinados pelos pontos APC e pelos pontos BPD devem ser ortogonais ao plano γ para que a altura

Figura 31 – Destacando triângulo APC

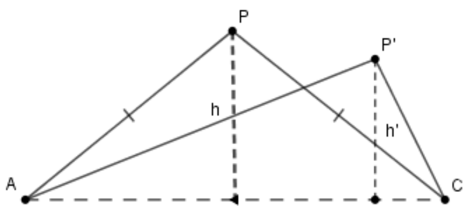


fonte: Produzido pelo autor

da pirâmide seja máxima. Com isso, as alturas de $\triangle APC$ e $\triangle BPD$ devem coincidir com a altura da pirâmide.

Analisando o $\triangle APC$, sendo fixos $\overline{AC}$ e $\overline{AP} + \overline{PC}$, vamos verificar qual deverá ser a posição do ponto P para que a altura relativa a P seja a maior possível. O ponto P pode ser posicionado de modo que $\overline{AP} = \overline{PC}$ ou $\overline{AP} \neq \overline{PC}$. Para o caso em que $\overline{AP} = \overline{PC}$ utilizaremos a notação $\triangle APC$ e caso $\overline{AP} \neq \overline{PC}$ utilizaremos a notação $\triangle AP'C$, lembrando que $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AP\prime} + \overline{P'C}$. Então, vamos comparar a extensão das alturas h e h' relativas a $\triangle APC$ e $\triangle AP'C$, respectivamente.

Figura 32 – Comparação das alturas



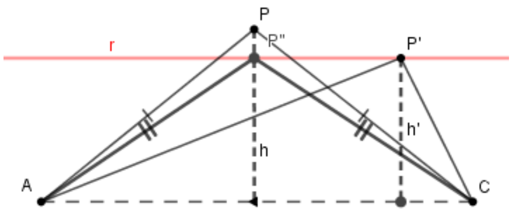
fonte: Produzido pelo autor

Passando por P', traçaremos a reta r paralela a $\overline{AC}$ e em r marcaremos o ponto P'' de forma que $\overline{AP\prime}' = \overline{P''C}$, com isso temos o triângulo $\triangle AP''C$ e denominaremos h'' a altura relativa a $\triangle AP''C$. Note que $h' = h''$ uma vez que $r//\overline{AC}$, Com isso, comparar as medidas de h e h' equivale a comparar as medidas de h e h''.

Dessa forma, segundo o LEMA 1, $\overline{AP\prime} + \overline{P'C} > \overline{AP\prime\prime} + \overline{PC\prime\prime}$, como $\overline{AP\prime} + \overline{P'C} = \overline{AP} + \overline{PC}$, temos $\overline{AP} + \overline{PC} > \overline{AP\prime\prime} + \overline{PC\prime\prime}$, vimos que $\overline{AP} = \overline{PC}$ e $\overline{AP\prime}' = \overline{P''C}$, logo $2\overline{AP} > 2\overline{AP\prime\prime}$, daí $\overline{AP} > \overline{AP\prime\prime}$ e $\overline{AP}^2 > \overline{AP\prime\prime}^2$, já que $\overline{AP} > 0$ e $\overline{AP\prime\prime} > 0$.

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$, como os triângulos $\triangle APC$ e $\triangle AP''C$ são isósceles, $\overline{PM} = h$ e $\overline{P''M} = h''$. Vamos considerar os triângulos $\triangle APM$ e $\triangle AP''M$, como o ângulo $\widehat{M} = 90°$ em ambos, $\overline{AP}$ e $\overline{AP\prime\prime}$ são suas respectivas hipotenusas, logo pelo Teorema de Pitágoras,

Figura 33 – Comparando as alturas



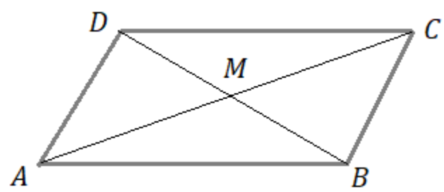
fonte: Produzido pelo autor

$$\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 > \overline{AP''}^2 = \overline{P''M}^2 + \overline{AM}^2 \Leftrightarrow$$
$$\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2 > \overline{P''M}^2 + \overline{AM}^2 \Leftrightarrow$$
$$\overline{PM}^2 > \overline{P''M}^2 \Leftrightarrow$$
$$\overline{PM} > \overline{P''M} \Leftrightarrow$$
$$h > h" = h'$$

Com isso, encontramos que o triângulo $\triangle APC$ terá altura máxima quando $\overline{AP} = \overline{PC}$. Analogamente, o triângulo $\triangle BPD$ terá altura máxima quando $\overline{BP} = \overline{PD}$.

Agora, verificaremos a natureza da base da pirâmide. Para tanto, analisaremos a projeção da pirâmide no plano γ. Temos que $proj_\gamma \overline{AP} = \overline{AM} = \overline{MC} = proj_\gamma \overline{PC}$ e $proj_\gamma \overline{BP} = \overline{BM} = \overline{MD} = proj_\gamma \overline{PD}$, pois M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $overline BD$. Logo, o polígono $ABCD$ é um quadrilátero cujas diagonais se intersectam no ponto médio, assim por definição, $ABCD$ é paralelogramo, cuja área pode ser obtida pela soma das áreas dos triângulos $\triangle AMB$, $\triangle BMC$, $\triangle CMD$ e $\triangle DMA$, denotaremos respectivamente S_1, S_2, S_3 e S_4.

Figura 34 – Projeção

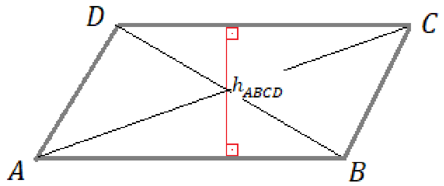


fonte: Produzido pelo autor

Temos que a altura do paralelogramo ABCD (h_{ABCD}) possui a mesma medida que a soma das alturas dos triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle DMC$. E como pelo caso de congurência lado ângulo lado, $\triangle AMB \equiv \triangle DMC$ e $\triangle DMA \equiv \triangle CMB$, a altura do triângulo $\triangle AMB$ é igual a altura de $\triangle DMC$. Assim, a altura do triângulo $\triangle AMB$ corresponde a metade da altura do paralelogramo $ABCD$, logo,

$$S_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \frac{h_{ABCD}}{2}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot h_{ABCD}}{4}.$$

Figura 35 – Relação entre altura do paralelogramo e dos triângulos



fonte: Produzido pelo autor

Como, $\overline{AB} \cdot h_{ABCD}$ =ÁREA DE ABCD, S_1 corresponde a um quarto da ÁREA DE ABCD. Por serem congruentes os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle DMC$ possuem a mesma área.

Com isso, $S_1 + S_3 = 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot h_{ABCD}}{4} = \frac{\overline{AB} \cdot h_{ABCD}}{2}$, como ÁREA DE ABCD = $S_1 + S_3 + S_2 + S_4$, temos, $S_2 + S_4 = \overline{AB} \cdot h_{ABCD} - \frac{\overline{AB} \cdot h_{ABCD}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot h_{ABCD}}{2}$.

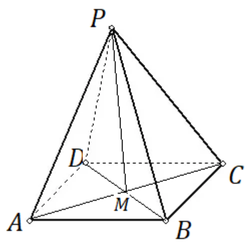
Como $S_2 = S_4$, temos que $S_2 = S_4 = \frac{AB \cdot h_{ABCD}}{4} = S_1 = S_3$.

Dessa forma, maximizando a S_1 maximizaremos a área de ABCD.

Seja $AM = b$ e $MB = a$, pela proposição 1 S_1 será máxima quando o ângulo $\angle A\widehat{M}B = 90\,°$. Logo, por definição, ABCD é um losango e pelo LEMA 2 para que sua área seja máxima é necessário que $ABCD$ seja um quadrado. Assim, temos $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$.

Note que os triângulos APM, BPM, CPM e DPM são congruentes (LAL), dessa forma, $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{PC} = \overline{PD}$, como $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{PC} + \overline{PD} = L$, temos $\overline{AP} = \frac{L}{4}$.

Figura 36 – Pirâmide

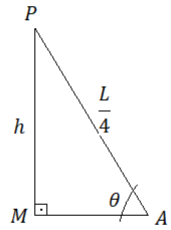


fonte: Produzido pelo autor

Por fim, determinaremos os ângulos formados entre os segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{PC}$ e $\overline{PD}$ e o plano γ. Como os triângulos $\triangle APM, \triangle BPM, \triangle CPM$ e $\triangle DPM$ são congruentes, basta encontrar o ângulo $\angle P\widehat{A}M = \theta$.

Pelas relações trigonométrica temos, $h = \frac{L}{4} \cdot sen\theta$ e $\overline{BM} = \overline{AM} = \frac{L}{4} \cdot cos\theta$. Além disso, ÁREA ABCD= $\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = 2 \cdot \frac{L^2}{16} cos^2\theta$.

Figura 37 – Triângulo AMP



fonte: Produzido pelo autor

De posse dessas informações, a função volume dessa pirâmide será

$$V = \text{ÁREA DA BASE} \cdot \text{ALTURA}$$

Logo,

V = $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{L^2}{16} \cdot cos^2\theta\right) \cdot \left(\frac{L}{4} \cdot sen\theta\right) \Leftrightarrow$

V = $\left(\frac{L^3}{96}\right) \cdot cos^2\theta \cdot sen\theta \Leftrightarrow$

V = $\left(\frac{L^3}{96}\right) \cdot (1 - sen^2\theta) \cdot sen\theta \Leftrightarrow$

V = $\left(\frac{L^3}{96}\right) \cdot (sen\theta - sen^3\theta).$

Note que se trata de uma **FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL**. Assim, podemos encontrar seu extremo, caso possua, por meio do seguinte procedimento.

Derivando, temos

$$V' = \frac{L^3}{96}(cos\theta - 3sen^2\theta \cdot cos\theta) \Leftrightarrow$$
$$V' = \frac{L^3}{96} \cdot cos\theta(1 - 3sen^2\theta).$$

Assim, para encontrar o ponto crítico basta encontrar o valor de θ que torna $V' = 0$. Então temos,

$$V' = \frac{L^3}{96} \cdot cos\theta(1 - 3sen^2\theta) = 0$$

para isso, $cos\theta = 0$ ou $1 - 3sen^2\theta = 0$. Se $cos\theta = 0$, $\theta = 90\,°$, nesse caso não será possível formar a pirâmide. Se $1 - 3sen^2\theta = 0$, $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\theta \approx 35\,°$.

Por meio do **TESTE DA DERIVADA SEGUNDA** nos certificaremos que $\theta \approx 35\,°$ é o ponto de máximo.

V"= $\left(\frac{L^3}{96}\right)(-sen\theta)(1 - 3sen^2\theta) + \frac{L^3}{96}cos\theta(-6sen\theta \cdot cos\theta) \Leftrightarrow$

V"= $\left(\frac{L^3}{96}\right) sen\theta(-1 + 3sen^2\theta - 6cos^2\theta) \Leftrightarrow$

V"= $\left(\frac{L^3}{96}\right) sen\theta[-1 + 3sen^2\theta - 6(1 - sen^2\theta)] \Leftrightarrow$

V"= $\left(\frac{L^3}{96}\right) sen\theta(-7 + 9sen^2\theta)$.

Sebendo que $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos

V"$(\theta) = \frac{L^3}{96} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-7 + \left(9\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) \Leftrightarrow$

V"$(\theta) = \frac{L^3}{96} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(-7 + 3) \Leftrightarrow$

V"$(\theta) = \frac{L^3}{96} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(-4) < 0$

Visto que $L > 0$. Sendo assim, $\theta \approx 35\,°$ é o ponto que maximiza a função.

Portanto, $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{DP} = \frac{L}{4}$, o polígono ABCD deve ser um quadrado e o ângulo entre o plano γ e as arestas $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}, \overline{DP}$ é aproximadamente $35\,°$.

CONCLUSÃO

Este trabalho foi idealizado com o objetivo de aproximar o público do ensino médio ao pensamento analítico e criativo para a resolução de problemas. Escolhemos abordar otimização por se tratar um tema de relevância prática em diversas áreas. Além disso, as questões trabalhadas indicavam que utilizando a mesma quantidade de material é possível obter diferentes áreas e volumes, e que com uma análise adequada era possível encontrar a melhor solução.

O método proposto para resolver as questões no minicurso tem como ferramentas conteúdos apropriados para o Ensino Básico, envolvendo conhecimento sobre características e propriedades de figuras planas, cálculo de áreas e volume, saber traduzir da linguagem convencional para a matemática, ter domínio em manipular equações, atribuição de valores a uma variável e analisar tabelas.

No entanto, o resultado do pós-teste evidenciou que o processo utilizado precisa ser aprimorado. Acreditamos que a mistura de tantos conteúdos possa ter prejudicado o resultado do trabalho, visto que, em geral, cada assunto é ensinado de forma isolada.

Uma maneira de aperfeiçoar o método seria dividir cada questão em itens, no caso, do problema da cerca, por exemplo, o primeiro iria comparar as áreas de um retângulo a de um paralelogramo qualquer, no segundo seria expressa a fórmula que representa a situação, o terceiro identificaria os possíveis valores da variável x, o quarto seria dedicado a atribuição de valores e determinação da área, e por fim o quinto iria concluir que a resposta era o quadrado.

É provável que encontrando pequenos resultados para cada pergunta o estudante pudesse ter uma compreensão melhor da proposta apresentada.

REFERÊNCIAS

[1] Ávila, G. (2011). Cálculo das funções de mútiplas variáveis (Vol. 3). Rio de Janeiro: LTC.

[2] Stewart, J. (2015). Cálculo (Vol. 2). São Paulo: Cengage Leaening & E22Translete.

[3] Hoffmann, L. (2015). Cálculo: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC.

[4] Boyer, C. Merzabach, U. (2012). História da matemática. São Paulo: Blucher.

[5] Morais Filho, D. (2014). Manual de redação matemática. Rio de Janeiro: SBM

[6] Sobral, M. & Bretas, S.(2016). Pesquisa em eduação: interface, experiências e orientações. Maceió: Edufal.

[7] Muniz Neto, A. (2013). Geometria. Rio de Janeiro: SBM.

[8] Brasil, Secretaria de Educação Fundamental (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.Brasília: MEC/ SEF.

[9] Brasil, Secretaria de educação Média e Tecnológica (2002). PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC.

[10] Bazzo, W. & Pereira, L. (2006). Introdução à engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos. Florianópolis: UFSC

[11] Lei Federal nº 9.394/1996,Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN

[12] Lima, R. (2013). Métodos Geométricos para Otimização no Ensino Médio. Goiana.

[13] Figueiredo, D. (1989). Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria. Campinas: Instituto de Matemática - UNICAMP.

[14] Stewart, J. (2009). Cálculo (Vol. 1). São Paulo:Cengage Leaening & E22Translete

Apêndices

APÊNDICE A – PÓS E PRÉ-TESTE

1- Pretendendo construir uma horta em seu quintal, Joana comprou 16 metros de arame. Como deseja aproveitar o arame de forma a obter a maior área de plantio possível, desenhou quatro esboços para verificar qual o mais adequado.

a. 1 metro de altura e 7 de comprimento

b. 2 metros de altura e 6 de comprimento

c. 3 metros de altura e 5 de comprimento

d. 4 metros de altura e 4 de comprimento

- Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço a?
- Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço b?
- Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço c?
- Qual será a área da horta caso Joana siga o esboço d?
- Em algum esboço será necessária uma quantidade de arame diferente de 16 metros?
- Para obter maior área, qual esboço Joana deverá escolher?

2- Suponha que você possua 12 metros de arame para construir uma horta retangular, de modo a obter a maior área possível. Desenhe os possíveis esboços e indique qual você escolheria para obter a maior área.

3- Para você, o que significa otimização?

4- Você considera a otimização importante para a sociedade? Por quê?

5- Como a otimização pode ajudar em sua vida?