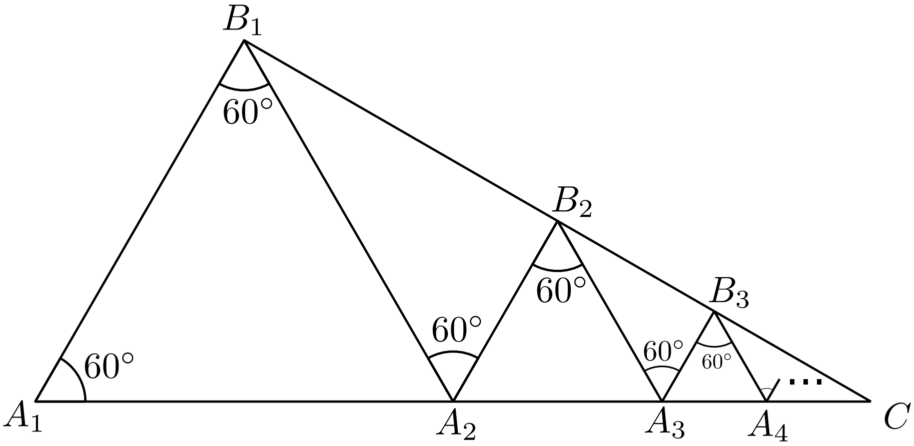
Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2016
Nível 3

1. Dado um tirângulo A_1B_1C, a seguir indicado, e a poligonal $L = A_1B_1A_2B_2A_3...$. Considere que o segmento A_1B_1 mede 1km e que o segemento A_1C mede 2km.



(V) (F) B_1C mede $\sqrt{3}$.

(V) (F) $A_1\widehat{B}_1C$ é 90°.

(V) (F) A_2B_2 mede 500m.

(V) (F) Seguindo a poligonal até chegar em A_3 teremos caminhado 3km.

(V) (F) O comprimento de L não passa de 4km.

Resolução.

(V) Para a solução do item 1, usamos a lei dos cossenos.
Considere x a medida do lado B_1C. Como $B_1\widehat{A}_1C = 60°$, $A_1B_1 = 1km$ e $A_1C = 2km$, temos que:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos(60) = 1 + 4 - 4.\frac{1}{2},$$

implicando em $x = \sqrt{3}\ km$.

(V) Para a solução do item 2, começamos observando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Assim, $A_1\widehat{A}_2B_1 = 60°$ e o triângulo $A_1B_1A_2$ é equilátero. Portanto, o lado B_1A_2 mede 1 cm.

Aplicando novamente a lei dos cossenos verificamos que o ângulo $\alpha = A_1\widehat{B}_1C$ mede $90°$. De fato, temos a igualdade:

$$2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2.1.\sqrt{3}.cos(\alpha),$$

acarretando em $\alpha = 90°$.

(V) Para a solução do item 3, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, tiramos que o triângulo $B_1B_2A_2$ é retângulo. Assim, por definição do cosseno de um ângulo, teremos que se 500 m é a medida do lado A_2B_2 adjacente ao ângulo $B_1\widehat{A}_2B_2 = 60°$.

(V) Para a solução do item 4, com um raciocínio análogo ao visto no início do item 2, temos que o triângulo $A_2B_2A_3$ é equilátero, seguindo que a medida de B_2A_3 é 500 m. Logo,

$$A_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2 + B_2A_3 = 1 + 1 + 0.5 + 0.5 = 3\ km.$$

(V) Por fim, para o item 5, notamos que:

$$A_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2 + B_2A_3 + ... + A_5B_5 + B_5A_6 + ... \leq 2.A_1C = 2.2 = 4.$$

$\blacksquare$

2. Considere x, y, a, b e c números reais tais que:

$$\begin{cases} sen(x) + cos(y) = a \\ sen(y) + cos(x) = b \\ sen(x+y) = c \end{cases}$$

(V) (F) Se $x = y = 0$, então $a = b = c$.

(V) (F) Se $x = y = \pi$, então $a - b = c$.

(V) (F) Se $x = y$ então $c = a^2$.

(V) (F) a e b, nunca podem ser 0 ao mesmo tempo.

(V) (F) $\dfrac{a^2 + b^2}{2} = 1$ para qualquer valor de x e y.

Resolução.

(F) Substituindo $x = y = 0$ na primeira equação temos que

$$a = sen(0) + cos(0) = 0 + 1 = 1.$$

Substituindo agora na última equação, obtemos

$$c = sen(0 + 0) = 0.$$

Portanto, $a \neq c$ e a afirmação é falsa.

(V) Substituindo $x = y = \pi$ na primeira e na segunda equação temos que

$$a = b = sen(\pi) + cos(\pi) = 0 + (-1) = -1.$$

Substituindo agora na última equação, obtemos

$$c = sen(\pi + \pi) = sen(2\pi) = 0.$$

Portanto, $b - a = (-1) - (-1) = 0 = c$ e a afirmação é verdadeira.

(F) Substituindo $x = y$, obtemos que

$$\begin{aligned} a^2 &= [sen(x) + cos(x)]^2 \\ &= sen^2(x) + cos^2(x) + 2sen(x)cos(x) \\ &= 1 + sen(2x) \\ &= 1 + sen(x + x) \\ &= 1 + c \\ &\neq c. \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é falsa.

(F) Note que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= [sen(x) + cos(y)]^2 + [sen(y) + cos(x)]^2 \\ &= sen^2(x) + cos^2(y) + 2sen(x)cos(y) + sen^2(y) + cos^2(x) + 2sen(y)cos(x) \\ &= sen^2(x) + cos^2(x) + [sen^2(y) + cos^2(y) + 2[sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)] \\ &= 1 + 1 + 2sen(x + y) \\ &= 2[1 + sen(x + y)]. \end{aligned}$$

Logo, se $x + y = 3\pi/2 + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $a^2 + b^2 = 0$ e, consequentemente, $a = b = 0$. Portanto a afirmação é falsa.

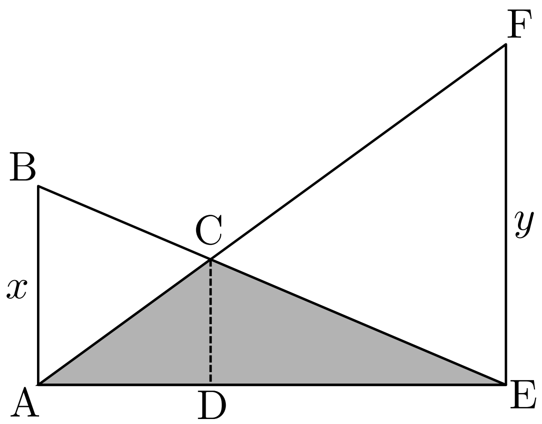
(F) De fato, pelo observado no item anterior, existem valores de x e y para os quais o valo de $a^2 + b^2 = 0$. Consequentemente, para esses valores de x e y,

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = 0 \neq 1.$$

Portanto a afirmação é falsa.

■

3. A figura abaixo ilustra a vista lateral de duas rampas, com alturas x e y em relação ao solo.



a)(V)(F) A altura DC do ponto de maior altura comum as duas rampas é dada por:

$$DC = \frac{(x + y) - x \cdot y}{(x + y)}$$

b)(V)(F) Se $x = 3$ e $y = 6$ então $DC = 2$.

c)(V)(F) Se $x = 3$ e $y = 7$ então $DC < 2$.

d)(V)(F) Se $AE = x + y$ então a área S do triângulo ACE é dada por

$$S = \frac{x \cdot y + x + y}{2}$$

e)(V)(F) Se $x = 4$ e $y = 12$ e $AE = x + y$ então área é 24.

Resolução. Observe que $\triangle BAE \sim \triangle CDE$, logo

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow DE = \frac{AE \cdot CD}{AB} = \frac{AE \cdot CD}{x} \tag{1}$$

Além disso, $\triangle AEF \sim \triangle ADC$, logo $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AD}$.
Como $AD = AE - DE \Rightarrow CD \cdot AE = EF \cdot AE - EF \cdot DE$. Portanto,

$$EF \cdot DE = AE(EF - CD) \Rightarrow DE = \frac{AE(EF - CD)}{EF} \Rightarrow DE = \frac{AE(y - CD)}{y} \quad (2)$$

De (1) e (2) temos

$$\frac{AE \cdot CD}{x} = \frac{AE \cdot (y - CD)}{y} \Rightarrow yCD = xy - xCD \Rightarrow CD = \frac{xy}{x + y}.$$

a) [F] $CD = DC = \frac{xy}{x+y}$

b) [V] $DC = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2$

c) [F] $DC = \frac{3 \cdot 7}{3+7} = \frac{21}{10} > 2$.

d) [F] $S = \dfrac{(x+y)\dfrac{x \cdot y}{x+y}}{2} = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

e) [V] $S = \dfrac{12 \cdot 4}{2} = 24$.

$\blacksquare$

4. Seja S o conjunto dos números naturais que são maiores que 1000 e menores que 2000, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 1000 < x < 2000\}$.

(V)(F) Em S existem 50 números ímpares, tais que o algarismo das centenas é zero.

(V)(F) 18 é a quantidade de elementos de S cuja a soma de seus digitos resultam em 8.

(V)(F) A soma dos elementos de S é 1498500.

(V)(F) A quantidade de elementos de S que são múltiplos de 3 é 333. Outra opção: Existem 333 elementos em S, que são múltiplos de 3.

(V)(F) Existem 4 números em S, cuja a soma de seus algarismos é maior que 26.

Resolução.

a) [V] A única possibilidade para o algarismo das unidades de milhar é 1. Além disso, o algarisomo das centenas está fixado igual a zero. O algarismo das unidades dos números que estamos contando são ímpares, logo existem 5 possibilidades de escolha para o algarismo das unidades, a saber, $1, 3, 5, 7$ e 9. Além disso, existem 10 possibilidades para o algrarismo das centenas. Pelo príncipio fundamental da contagem segue que a quantidade de números procurados é 50.

b) [F] Queremos descobrir a quantidade de números $k = (1abc)_{10}$ tais que $a+b+c = 7$ com $a \leq 0$, $b \leq 0$ e $c \leq 0$. Existem $P_7^{5,2} = \binom{5+2}{2} = 36$, onde $P_7^{5,2}$ denota a quantidade de permutações de 7 elementos onde um deles se repete 5 vezes e um outro se repete 2 vezes.

c) [V] Note que podemos ver os elementos de S como termos de uma progressão aritmética com razão $r = 1$ e primeiro temo $a_1 = 1001$. Assim $a_2 = 1002$, $a_3 = 1003$,...,$a_{999} = 1999$. A soma dos elementos de S é a soma S_{999} dos 999 primeros termos da P.A a_n, sendo assim:

$$S_{999} = \frac{(a_1 + a_{999}).n}{2} = \frac{(1001 + 1999).999}{2} = 1498500$$

d) [V] O menor múltiplo de 3 que é elemento de S é o número 1002. O maior múltiplo de que também é elemento de S é o número 1998. Assim, como $\frac{1998-1002}{3} = 332$, existem 333 múltiplos de 3 que são elementos de S.

e) [V] Note que a maior possibilidade para a soma dos algarismos de um elemento k de S é 28. Isso ocorre somente quando tomamos $k = 1999$. Assim se queremos contar os elementos de S cuja a soma de seus algarismos é maior que 26 devemos contar os elementos de S cuja a soma dos algarismos é 27 ou 28. Quando a soma dos algarismos é 27 necessariamente devemos usar os algarismos $1, 9, 9, 8$. Só podemos posicionar o 1 nas unidades de milhar. Além disso temos 3 possibilidades para posicionar o 8. Note ainda que ao posicionar o 8 só existe uma possibilidade para alocar os dois noves restantes. Assim, pelo príncipio fundamental da contagem existem 3 possibilidades de elementos de S cuja a soma dos algarismos é 27. Como existe uma única possibilidade de elemento de S cuja a soma dos algarismos é 28, temos que a resposta procurada é 4.

■

5. Considere o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + cx + d$, com $c, d \in \mathbb{R}$.

(V)(F) Se $c = 4$ e $d = 0$, $p(x)$ possui 3 raízes reais.

(V)(F) Se $c = -13$ e $d = 10$, o produto das raízes de $p(x)$ é 13.

(V)(F) Se 1 e -1 são raízes de $p(x)$, então $c = -1$ e $d = -2$.

(V)(F) Se $d = 0$, então 0 é uma raiz de p qualquer que seja o valor de c.

(V)(F) Se $c = 0$ e $d = 0$, então $p(x)$ possui 3 raízes reais distintas.

Resolução.

a) [F] Se $c = 4$ e $d = 0$ então $p(x) = x^3+2x^2+4x$. Note que $p(x) = x^3+2x^2+4x = 0$ $\Rightarrow (x^2 + 2x + 4)x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x + 4 = 0$. Assim 0 é raíz de $p(x)$. As outras raízes de $p(x)$, se existirem, são raízes de $x^2 + 2x + 4$. O discriminante da equação x^2+2x+4 é $\Delta = 2^2-4.1.4 = -12$. Assim x^2+2x+4 não possui raízes reais e, consequentemente, a única raiz real de $p(x)$ é 0

b) [F] Se $c = -13$ e $d = 10$ então $p(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$. Utilizando as relações de Girard vemos que se α, β, γ são as raízes de $p(x)$ então o produto das raízes é dado por $\alpha.\beta.\gamma = -10$.

c) [V] $p(1) = 0$ nos dá a equação $c + d = 3$. Similarmente, $p(-1) = 0$ acarreta em $-c + d = -1$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} c + d = -3 \\ -c + d = -1, \end{cases}$$

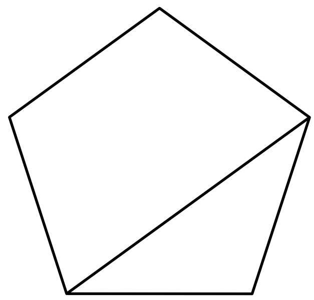
obtemos $c = -1$ e $d = -2$.

d) [V] $d = 0$ então $p(x) = x^3 + 2x^2 + cx$. Desse modo, $p(0) = 0^3 + 20^2 + c0 = 0$ o que nos diz que 0 é raíz de $p(x)$ não importando o valor de c.

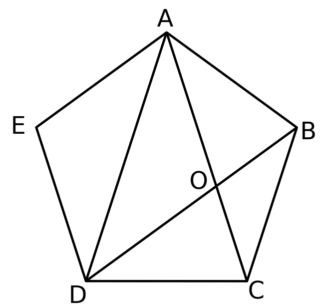
e) [F] Se $c = 0$ e $d = 0$ então $p(x) = x^3 + 2x^2$. Assim $p(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow$ $x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 2$. Assim, nesse caso $p(x)$ possui apenas duas raízes distintas.

■

6. Prove que a diagonal do pentagono regular de lado 1 mede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Resolução. Para facilitar a resolução, mapearemos o pentágono da seguinte maneira:



Sabemos que o ângulo interno de um polígono regular de n lados pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\text{Ângulo Interno} = \frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n},$$

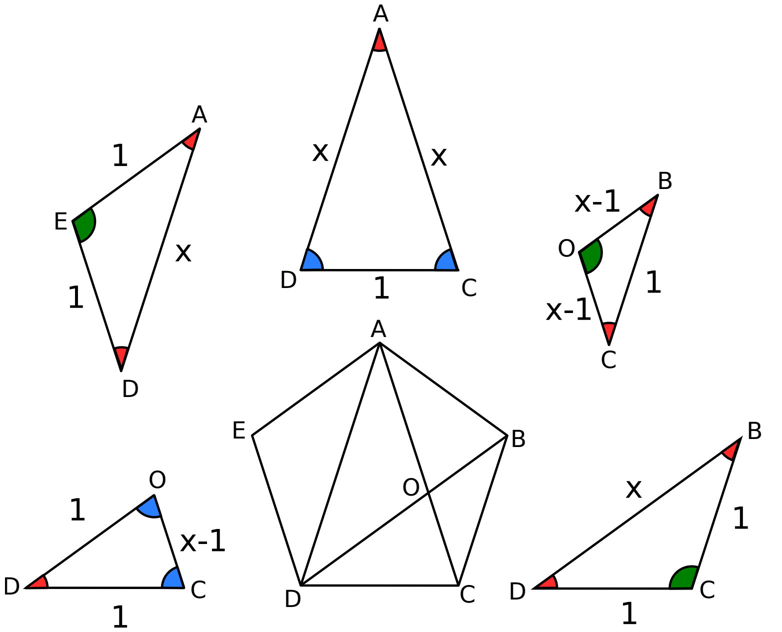
portanto o ângulo interno de um pentágono regular mede 108°. Com essa informação, uma primeira tentativa para encontrar o tamanho de uma diagonal seria usar a Lei dos Senos ou Lei dos Cossenos em um dos triângulos formados com a diagonal sendo um dos lados, porém não é elementar descobrir o valor dos senos e cossenos de 108°, 72° ou 36°.

Perceba que as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tem a mesma medida, pois os triângulos ADE, ABC e BCD são congruentes pelo caso LAL de congruência, ou seja, possuem dois lados consecutivos congruentes e mesma medida de ângulo entre esses lados. Denotaremos por x o tamanho dessas diagonais.

Sabendo que as diongonais tem mesmo tamanho e que o ângulo interno mede 108° se completarmos os ângulos da figura, veremos que os triângulos ACD e DOC são semelhantes pelo caso AAA de semelhança. São nesses dois triângulos que terminaremos a questão, pois já sabemos que o triângulo ACD possui lados $\overline{AD} = \overline{AC} = x$. Precisamos então encontrar o tamanho dos lados do triângulo DOC.

Perceba o triângulo DOC é isósceles, pois $D\hat{O}C = D\hat{C}O = 72^{\circ}$, portanto $OD = CD = 1$. Consequentemente, $\overline{OB} = \overline{BD} - \overline{OD} = x - 1$. Por fim, como o triângulo BOC é também isósceles, pois $O\hat{C}B = O\hat{B}C = 36^{\circ}$, segue que $\overline{OC} = \overline{OB} = x - 1$.

Ao fim desses passos, a figura estará da seguinte maneira:



Usando a relação de semelhança, para os triângulos ACD e DOC,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \implies \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \implies x^2 - x = 1 \implies x^2 - x - 1 = 0.$$

Chegamos a conclusão que para encontrar o tamanho da diagonal x, precisamos resolver essa última expressão. Dessa maneira, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, mas como x é um tamanho da diagonal, então deve ser obrigatoriamente positivo, portanto a única solução possível é $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. O alunos poderiam ter feito as razões de semelhança também para os triângulos ADE e BOC e encontraria a mesma resposta. ∎

Critério de correção. Há muitas maneiras de atacar esse problema, mas apenas uma delas é eficiente que é usando semelhança de triângulos. Os passos intermediários devem ser levados em conta e se o aluno fizer diretamente sem passar por eles, adicione os 10 pontos do segundo item abaixo no final .

(10pts.) O aluno tenta encontrar o tamanho da diagonal usando lei dos senos ou cossenos e percebe que ele teria que descobrir o valor de seno e cosseno dos ângulos de 108º, 72º ou 36º, mas não são ângulos notáveis.

(5pts.) O aluno ataca o problem completando a figura com algumas diagonais e determina os ângulos na figura.

(10pts.) O aluno percebe que alguns triângulos são semelhantes.

(5pts.) Ele descreve o caso de semelhança.

(15pts.) Usando a relação de semelhança ele descobre que a diagonal de tamanho d satisfaz a equação: $d^2 - d - 1 = 0$.

(5pts.) O aluno escolhe a solução positiva para a equação acima, já que por ser um valor de tamanho, deveríamos tomar a solução positiva.

Caso ele não passe pelo primeiro passo a pontuação ficará a seguinte:

(5pts.) O aluno ataca o problem completando a figura com algumas diagonais e determina os ângulos na figura.

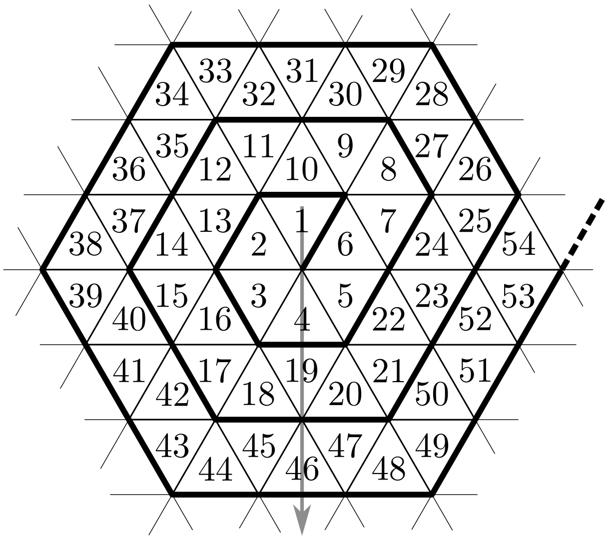
(15pts.) O aluno percebe que alguns triângulos são semelhantes.

(10pts.) Ele descreve o caso de semelhança.

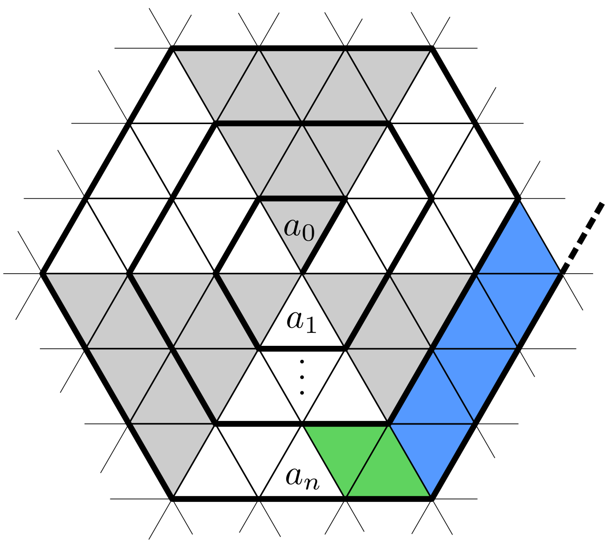
(15pts.) Usando a relação de semelhança ele descobre que a diagonal de tamanho d satisfaz a equação: $d^2 - d - 1 = 0$.

(5pts.) O aluno escolhe a solução positiva para a equação acima, já que por ser um valor de tamanho, deveríamos tomar a solução positiva.

7. Considere a sequência $(1, 4, 19, 46, ...)$ indicada na figura abaixo. Encontre o décimo termo dessa sequência.

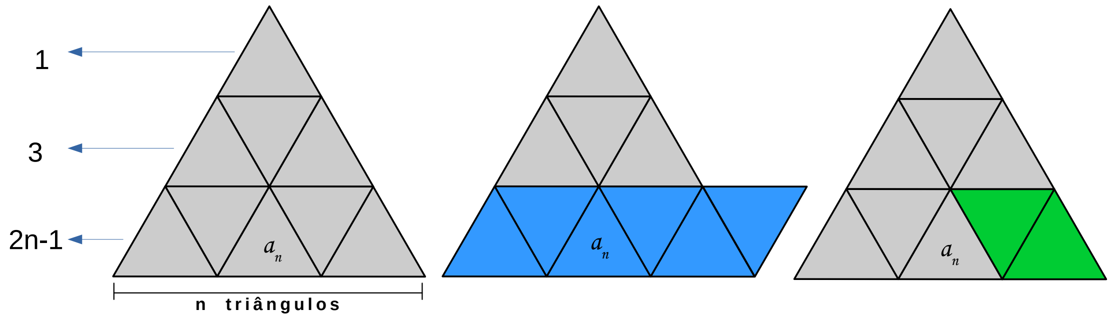


Resolução. Observe a figura abaixo:



Nela observamos que a_n é igual a quantidade total de triângulos da figura menos o excesso (em verde e azul na figura). A quantidade total de triângulos é

$$6 \cdot [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] = 6n^2.$$



A quantidade de triângulos azuis é $2n$, e de triângulos verdes é $n-1$. Portanto, o termo geral da sequência é

$$a_n = 6n^2 - 2n - (n-1) = 6n^2 - 3n + 1.$$

Logo, o décimo termo da sequência é

$$a_9 = 6 \cdot 9^2 - 3 \cdot 9 + 1 = 460.$$

(Lembre que o primeiro termo é o a_0) ■

Há algumas formas de resolver:

Primeiramente, o aluno que **apenas** encontrou corretamente o 5º termo da sequência (e não fez mais do que isso) ganha 5 pts. Se o aluno, ao invés de encontrar o 10º termo, encontrar o 11º ou o 9º como resposta, corrija segundo o modo correspondente abaixo e tire 5 pts.

Modo 1:

(10 pts.) Aluno identificou que a sequência das diferenças é uma P.A. de razão 12 (ou equivalente).

(20 pts.) Aluno mostrou a afirmação anterior.

(10 pts.) Usando a informação anterior, o aluno encontrou corretamente alguns dos termos dessa sequência **sem chegar ao décimo termo ou passou do décimo termo e não percebeu**.

(20 pts.) Aluno calculou corretamente o décimo termo (460).

ou

(10 pts.) Aluno identificou a presença de alguma(s) P.A.(s) contando os triângulos em cada volta.

(20 pts.) Aluno mostrou que de fato é uma P.A.

(10 pts.) Usando a informação anterior, o aluno encontrou corretamente alguns dos termos dessa sequência **sem chegar ao décimo termo ou passou do décimo termo e não percebeu**.

(20 pts.) Aluno calculou corretamente o décimo termo (460).

Modo 2:

(20 pts.) Contou quantos triângulos tem até a 8ª ou 9ª volta completa.

(20 pts.) Contou quantos triângulos faltam, a partir da 8ª volta, ou quantos tem a mais até a 9ª, para chegar ao décimo termo da sequência (tirar 5 pts no caso da contagem esteja errada em 1 unidade, e tirar 10 pts no caso da contagem estar parcialmente correta).

(10 pts.) Somou os dados obtidos e encontrou o 10º termo da sequência.

Modo 3: Se o aluno calculou os termos da sequência de um por um, somando em cada passo a quantidade de triângulos entre cada termo, contabilizar 5 pts para o 5º, 5 pts para 6º termo, e 10 pts para cada um dos demais termos do 7º ao 10º.
Havendo erros de conta, tirar 5 pts.

8. Um tapete de Sierpinski pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado em k partes iguais onde k é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado de lado 1 em k^2 subquadrados iguais. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em k^2 subquadrados iguais e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O tapete de Sierpinski é a figura que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpinski?

Resolução. A questão pode ser resolvida observando a área retirada em cada etapa. Note que na primeira etapa retiramos um quadrado de lado $1/k$ cuja área é $\frac{1}{k^2}$. Como estamos retirando apenas um quadrado, a quantidade retirada $a_1 = \frac{1}{k^2}$. Na segunda etapa, de cada subquadrado restante, vamos retirar o subquadrado central cujo lado mede $\frac{\left(\frac{1}{k}\right)}{k} = \frac{1}{k^2}$, assim a área desse subquadrado é $\left(\frac{1}{k^2}\right)^2$.

Além disso, o número de subquadrados restantes é $k^2 - 1$, assim, na segunda etapa retiramos $a_2 = (k^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{k^2}\right)^2$.

Na terceira etapa de cada subquadrado, iremos remover um subquadrado de lado $\dfrac{\frac{1}{k^2}}{k} = \dfrac{1}{k^3}$, cuja área é $\left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2$ e como a quantidade de subquadrados na terceira etapa é $(k^2-1)^2$, assim, na terceira etapa retiramos $a_3 = (k^2-1)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2$.

Assim, indutivamente, na n-ésima etapa, removeremos $(k^2-1)^{n-1}$ subquadrados onde cada subquadrado tem lado $\dfrac{1}{k^n}$, logo, a área removida na n-ésima etapa é $a_n = (k^2-1)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{1}{k^n}\right)^2$. Observe que dessa forma as áreas removidas em cada etapa formam uma progressão geométrica infinita com primeiro termo igual a $\dfrac{1}{k^2}$ e razão $q = \dfrac{1}{k^2} \cdot (k^2-1)$ assim, a área removida em todas as etapas será

$a_1 = \dfrac{1}{k^2}$, $a_2 = (k^2-1) \cdot \left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2$, $a_3 = (k^2-1)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{k^3}\right)^2 \ldots$,
$a_n = (k^2-1)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{1}{k^n}\right)^2$. $q = (k^2-1) \cdot \dfrac{1}{k^2}$.
A área de todos os quadrados removidos é a soma das áreas em cada etapa do processo. Assim $A = S$ onde S é a soma da PG infinita de 1° termo $a_1 = \dfrac{1}{k^2}$ e razão $q = (k^2-1) \cdot \dfrac{1}{k^2}$. Assim

$$S = \frac{\frac{1}{k^2}}{1 - (k^2-1) \cdot \frac{1}{k^2}} = 1.$$

Logo a área do tapete de Sierpinski é $A_{(quadrado\ de\ lado\ 1)} - S = 1 - 1 = 0$. ■

Critério de correção.

(10 pts.) Calcular a área removida nas três primeiras etapas.

(10 pts.) Determinar a área removida na n-ésima etapa.

(20 pts.) Observar que as áreas retiradas em cada etapa estão em progressão geométrica.

(10 pts.) Calcular a soma infinita dessa P.G. e subtrai-la da área total inicial.

obs:Havendo erros de conta, tirar 5 pts e se não subtrair a área total inicial com a área retirada, retirar mais 5 pts.

obs: Se o aluno resolver a questão para um valor de k fixo, por exemplo $k = 3$, atribuir 25 pontos;

obs: Se o aluno observar o padrão de remoção das áreas, atribuir 10 pontos;