Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2016
Nível 1

1. O ano de 2016 está acabando, vamos ver se você conhece bem esse número. Para isso, julgue os itens a seguir:

(V) (F) A maior potência de 2 que divide 2016 é $2^4 = 16$.

(V) (F) 2016 é um quadrado perfeito.

(V) (F) 2016^2 é divisível por 49.

(V) (F) 2016 possui exatamente 16 divisores positivos.

(V) (F) $\text{mdc}(2016, 2015) = 1$.

Resolução.

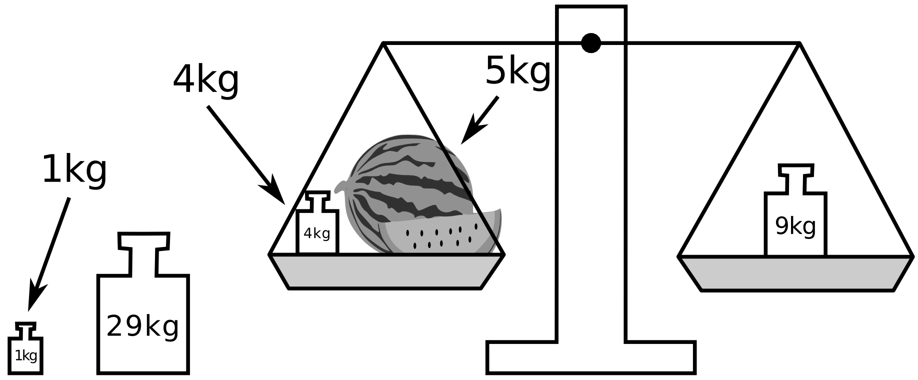
- (F) Uma vez que $32 = 2^5$ divide 2016 temos que a maior potência de 2 que divide 2016 é 32.
- (F) A fatoração de 2016 é $2016 = 2^5.3^2.7$. Como existem primos na fatoração de 2016 que aparecem com potência ímpar segue que 2016 não é quadrado perfeito.
- (V) Temos que 7 divide 2016, logo 7^2 divide 2016^2.
- (F) A fatoração de 2016 é $2016 = 2^5.3^2.7$. Desse modo, 2016 possui

$$(5+1)(2+1)(1+1) = 36$$

divisores.
- (V) A fatoração de 2015 é $2015 = 5.13.31$. Como 2015 e 2016 não possuem fatores primos em comum, $\text{mdc}(2016, 2015) = 1$.

$\blacksquare$

2. Na venda de Seu José todos os produtos possuem pesos representados por números naturais. Na venda é usada uma balança de comparação para pesar frutas, verduras e carnes. Porém, ele só possui 4 pesos: 1 kg, 4 kg, 9 kg e 29 kg. Dona Maria quer comprar 5kg de melancia. Na imagem abaixo, podemos ver como Seu José dispôs os pesos e a melancia na balança.



Considere que seu José nunca utiliza o peso de um produto para pesar outro produto. Com base nesta observação, podemos afirmar que:

(V) (F) Na venda de Seu José é possível pesar 6 kg de maçã.

(V) (F) Seu José pode pesar qualquer produto com no máximo 10 kg.

(V) (F) Seu José pode pesar qualquer produto de 12 kg à 17 kg.

(V) (F) Seu José não consegue pesar 11 kg de carne.

(V) (F) Seu José não consegue pesar produtos com 18 kg.

Resolução.

- (V) A balança funciona do seguinte modo: a partir de pesos conhecidos (os pesos de $1, 4, 9$ e 29 kg) conseguimos descobrir uma série de pesos desconhecidos usando o princípio que a balança entra em equilíbrio quando os dois lados somam quantidade iguais de peso. Daí, colocando os pesos de 9 kg e 1 kg em um dos pratos da balança e o de 4 kg no outro prato, para que a balança fique em equilíbrio é preciso de algo que pese exatamente 6 kg. Agora é só ele colocar a quantidada adequada de maçãs. Para facilitar o entendimento, note que $9+1 = 4+(6)$. Entre parênteses está o peso desconhecido que equilibra a balança.
- (F) Ele não consegue pesar 2 kg, por exemplo.
- (V) Seguindo o mesmo padrão do equilíbrio da balança explicada no primeiro item, perceba que:
  - Para pesar 12 kg, $(12) + 1 = 4 + 9$;
  - Para pesar 13 kg, $(13) = 4 + 9$;
  - Para pesar 14 kg, $(14) = 1 + 4 + 9$;
  - Para pesar 15 kg, $(15) + 1 + 4 + 9 = 29$;
  - Para pesar 16 kg, $(16) + 4 + 9 = 29$;

– Para pesar 17 kg, $(17)+4+9=1+29$.

- (V) Não há como pesar, pois não há como formar 11 por meio de soma ou subtração com os números 1, 4, 9 e 29.
- (V) Não é possível pesar 18 kg, pois com os três pesos mais leves o máximo seria 15 kg, daí o único jeito seria por subtração usando o peso mais pesado, mas $29-x=18$ nos dá $x=11$ e não conseguimos pesar 11 kg.

■

3. Sabemos que todo número racional pode ser representado na forma de fração ou de expansão decimal. Considere os seguintes exemplos de expansões decimais: $\frac{1}{2}=0,5$, $\frac{1}{3}=0,333....$ Nesses exemplos, os algarismos que estão na primeira casa decimal são, respectivamente, 5 e 3. Sobre a expansão decimal do número $\frac{1}{37}$, podemos afirmar que:

(V) (F) $\frac{1}{37}=0,270270270....$

(V) (F) O algarismo da 2ª casa decimal de $\frac{1}{37}$ é 7.

(V) (F) A soma dos 10 primeiros algarismos da parte decimal de $\frac{1}{37}$ é 29.

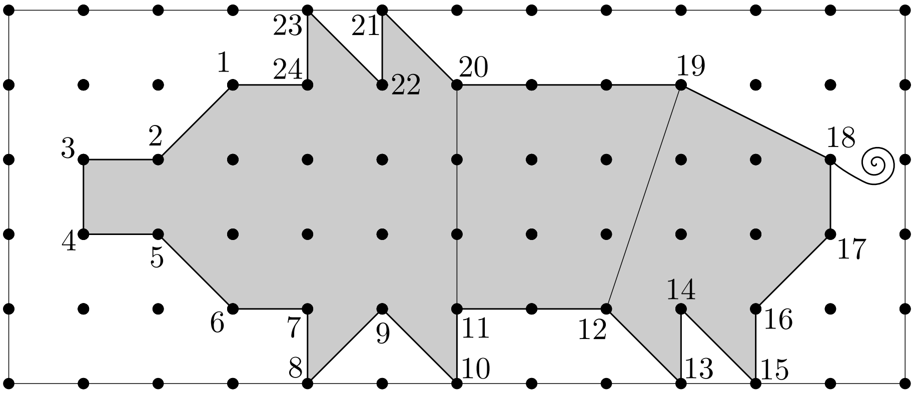
(V) (F) O algarismo 0 aparece nas casas decimais cuja a posição é um múltiplo de 3.

(V) (F) O algarismo da 2016ª casa decimal de $\frac{1}{37}$ é 7.

GABARITO

- (F) Temos que $\frac{1}{37}=0,027027027....$
- (F) O algarismo da 2ª casa decimal é 2.
- (F) A soma é $0+2+7+0+2+7+0+2+7+0=27$.
- (F) Nas casas decimais cuja posição é um múltiplo de 3 aparece o algarismo 7.
- (V) Observe que 2016 é divisível por 3 e, pela justificativa do item anterior, temos que o algarismo da 2016ª casa decimal é 7.

4. No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância. Observe a figura e julgue os itens abaixo:



(V) (F) A região delimitada pelos vértices 7, 8 e 9 é um triângulo retângulo e escaleno.

(V) (F) A área da região delimitada pela figura sombreada é 28 cm^2.

(V) (F) A região delimitada pelos vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20 , 21, 22, 23, 24 e 1 tem a metade da área da figura sombreada.

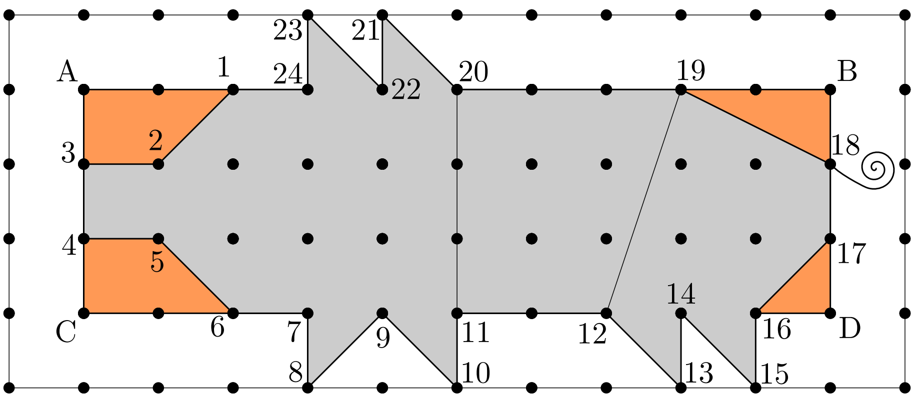
(V) (F) A área da região sombreada é menor que a área não sombreada.

(V) (F) A área da região delimitada pelos vértices 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 12 é: 7 cm^2.

Resolução.

a) [F] O triângulo de fato é retângulo visto que possui um ângulo reto. No entanto, sabemos que um triângulo escaleno é aquele que possui todos os lados diferentes temos portanto que o triângulo não é escaleno mas sim um triângulo isósceles, uma vez que dois dos lados do triângulo possuem mesma medida.

b) [F] Podemos calcular a área sombreada adicionando regiões na cor laranja de modo a completar o retângulo ABCD descrito na figura. A área da região sombreada será dada por: $3 \times 10 + 6 \times \frac{1}{2} - (2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 1) = 28,5$ cm^2.



c) [F] A área da região delimitada neste item é $3 \times 5 + 2 - 3 = 14$.

d) [V] A área da região não sombreada é a área todal do reticulado menos a área sombreada: $5 \times 12 - 28,5 = 60 - 28,5 = 31,5$. É maior que a área da região sombreada.

e) [V] A área da região é $1,5 + 1 + 2 \times 3 - 1 - 0,5 = 7$ cm^2 .

■

5. Nos itens a seguir considere lançamentos simultâneos de dois dados diferentes, um azul e outro vermelho, e que a pontuação obtida em cada lançamento será calculada pela soma dos pontos em cada face superior dos dados. Assim, podemos afirmar que:

(V) (F) Num lançamento temos 5 maneiras de obtermos 6 pontos.

(V) (F) Num lançamento existem mais maneiras de obtermos 6 pontos do que de obtermos 5 pontos.

(V) (F) A quantidade de maneiras de obtermos a pontuação máxima e a pontuação mínima em cada lançamento é a mesma.

(V) (F) Temos 31 maneiras de não obtermos 8 pontos em um lançamento.

(V) (F) Num lançamento temos 2 maneiras de obtermos uma dupla de ternos (três).

Resolução. Vamos representar os resultados por pares ordenados (x, y) nos quais x representa os pontos da face do dado azul e y representa os pontos da face do dado vermelho.

- (V) Todas as maneiras possíveis para obtermos 6 pontos são:

$$(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1).$$

- (V) Pelo item anterior e sabendo que para obtermos 5 pontos temos as seguintes maneiras

$$(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1).$$

  Desde que $5 > 4$ segue que a proposição é verdadeira.

- (V) A pontuação máxima é 12 pontos e a pontuação mínima é 2 pontos. Assim, em cada caso só existe uma maneira de obtermos cada uma dessas pontuações, a saber: $(6, 6)$ e $(1, 1)$.

- (V) Temos 36 maneiras possíveis de jogadas que são

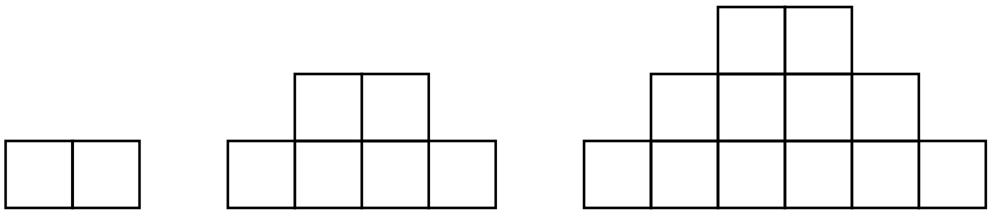
$$(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);$$

$$(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)$$
$$(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6),$$

  dessas apenas em 5 obtemos 8 pontos. Daí existem $36 - 5 = 31$ maneiras de não obtermos 8 pontos em um lançamento.
- (F) Existe apenas uma maneira de obtermos uma dupla de ternos, a saber:$(3,3)$.

■

6. Quadrados de lado 1 cm são empilhados formando sucessivamente figuras com 2 quadrados na base, 4 quadrados na base, 6 quadrados na base, e assim por diante.



Observação: O perímetro dessa figura é o comprimento da linha que delimita a mesma. Por exemplo, a primeira figura acima tem perímetro 6 cm e a segunda tem perímetro 12 cm).

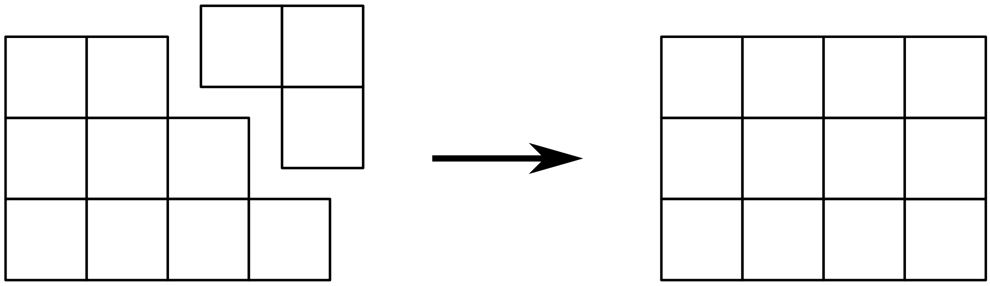
a) Qual o perímetro da figura que tem 2016 quadrados em sua base?
b) Qual a área da figura que tem 2016 quadrados em sua base?

Resolução. a) Observe que a soma dos segmentos horizontais é igual a duas vezes o comprimento máximo horizontal (base), e que a soma dos segmentos verticais é igual a duas vezes a altura máxima. A altura máxima é igual à base dividida por 2, isto é, a altura máxima é igual à metade da base. Por exemplo, na primeira figura é $\dfrac{2}{2} = 1$ cm , na segunda é $\dfrac{4}{2} = 2$ cm e na terceira é $\dfrac{6}{2} = 3$ cm. Assim, na figura que tem 2016 quadrados na base, a altura é $\dfrac{2016}{2} = 1008$ cm. Logo, o perímetro é dado por:

$$2 \times 2016 + 2 \times 1008 = 4032 + 2016 = 6048\,\text{cm}.$$

Também podemos observar que em cada figura o perímetro é dado pelo triplo do comprimento máximo horizontal (base). Por exemplo, na primeira figura o perímetro é $3 \times 2 = 6$ cm, na segunda é $3 \times 4 = 12$ cm e na terceira é $3 \times 6 = 18$ cm. Logo o perímetro da figura que tem 2016 quadrados na base é $3 \times 2016 = 6048\,\text{cm}$.

b) Seja b a base da figura, observe que a área pode ser calculada somando-se 1 cm a metade da base e depois multiplicando pela altura. Por exemplo, na primeira figura é $(1+1) \times 1 = 2$ cm^2, na segunda é $(2+1) \times 2 = 6$ cm^2, na terceira é $(3+1) \times 3 = 12$ cm^2. Como podemos perceber na figura para o caso em que há 6 quadrados na base:



Portanto na figura que possui b quadrados na base, a área é $\left(\frac{b}{2}+1\right) \times \frac{b}{2}$. Assim na figura que tem 2016 quadrados na base, a área é:

$$(1008+1) \times 1008 = 1.017.072\,\text{cm}^2.$$

■

Critério de correção. a) Para calcular o perímetro podemos seguir dois caminhos:

Primeira solução

(5pts.) Perceber que existe uma padrão entre o valor do perímetro e o comprimento máximo horizontal (base) nas três figuras.

Observar que em cada figura o perímetro é dado pelo triplo do comprimento máximo horizontal (base). Por exemplo, na primeira figura o perímetro é $3 \times 2 = 6$ cm, na segunda é $3 \times 4 = 12$ cm e na terceira é $3 \times 6 = 18$ cm.

(15pts.) Depois de perceber o padrão calcular o valor do perímetro para a figura que possui 2016 quadrados em sua base.

Logo o perímetro da figura que tem 2016 quadrados na base é $3 \times 2016 = 6048\,\text{cm}$.

Segunda solução

(5pts.) Perceber que existe uma padrão entre o valor do perímetro e o comprimento máximo horizontal (base) nas três figuras.

Observe que a soma dos segmentos horizontais é igual a duas vezes o comprimento máximo horizontal (base), e que a soma dos segmentos verticais é igual a duas vezes a altura máxima.

A altura máxima é igual à base dividida por 2, isto é, a altura máxima é igual à metade da base. Por exemplo, na primeira figura é $\frac{2}{2} = 1$ cm , na segunda é $\frac{4}{2} = 2$ cm e na terceira é $\frac{6}{2} = 3$ cm.

Logo o perímetro de cada figura é dado pela soma do dobro do comprimento máximo horizontal com o dobro da altura máxima, na primeira figura temos que o perímetro é $2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$ cm, na segunda é $2 \times 4 + 2 \times 2 = 12$cm e na terceira é $2 \times 6 + 2 \times 3 = 18$ cm.

(15pts.) Depois de perceber o padrão calcular o valor do perímetro para a figura que possui 2016 quadrados em sua base.

Na figura que tem 2016 quadrados na base, a altura é $\frac{2016}{2} = 1008$ cm. Logo, o perímetro é dado por:

$$2 \times 2016 + 2 \times 1008 = 4032 + 2016 = 6048\,\text{cm}.$$

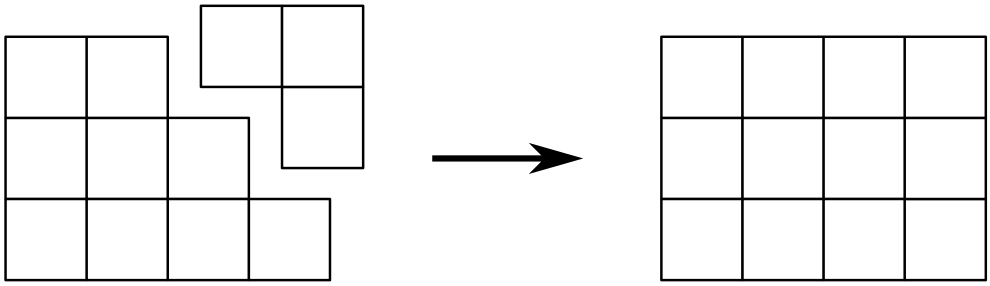
(-5pts) Retira-se 5 pontos caso o aluno cometa erro de manipulação algébrica.

b)(5pts.) Reconhecer que para calcular a área de uma figura "desse tipo"(as figuras apresentadas podem ser vistas como retângulos) usamos a fórmula $b \times h$ onde b=base da figura e h=altura.

(5pts.) Perceber que existe uma padrão entre o valor da área e o comprimento máximo horizontal (base) nas três figuras. Uma vez que a altura máxima de cada figura é igual a metade da base.

Seja b a base da figura, observe que a área pode ser calculada somando-se 1 cm à metade da base e depois multiplicando pela altura.

Por exemplo, na primeira figura é $(1 + 1) \times 1 = 2$ cm^2, na segunda é $(2 + 1) \times 2 = 6$ cm^2, na terceira é $(3 + 1) \times 3 = 12$ cm^2. Como podemos perceber na figura para o caso em que há 6 quadrados na base:



(20pts.)Portanto na figura que possui b quadrados na base, a área é $\left(\frac{b}{2}+1\right)\times\frac{b}{2}$.

Assim na figura que tem 2016 quadrados na base, a área é:

$$(1008+1)\times 1008 = 1.017.072\,\mathrm{cm}^2.$$

(-5pts)Retira-se 5 pontos caso o aluno cometa erro de manipulação algébrica.

7. Igor é filho de Sílvio que por sua vez é filho de João. A idade de João somada com a idade de seu neto Igor resulta em 78. A idade de João somada com a idade de Sílvio é 96. Descubra quais são as idades de João, Igor e Sílvio sabendo que todas essas idades são números primos e que a soma dos algarismos das idades dos três é 26.

   Resolução. Vamos denotar a idade de Igor por I, a idade de Sílvio por S e a idade de João por J. Do enunciado temos que $I+J=78$ e $S+J=96$. Subtraindo essas equações obtemos $S-I=18$. Como Sílvio é filho de João $J<S$. Assim $96=S+J>S+S$ o que nos dá $S<48$. Como $S=18+I$, onde I é número primo temos que $S\geq 23$. Assim temos que encontrar S de modo que $S-18=I$ é primo e tal que $96-S$ também é primo com $23\leq S<48$. Vamos organizar essa informação em uma tabela:

S	$S-18=I$	$S-18$ é primo?	$96-S=J$	$96-S$ é primo?
23	5	sim	73	sim
29	11	sim	67	sim
31	13	sim	65	não
37	19	sim	59	sim
41	23	sim	55	não
43	25	não	53	sim
47	29	sim	49	não

Observando a tabela vemos que temos três possibilidades para as idades de Igor, Sílvio e João:

$$\begin{cases} J = 73, S = 23, I = 5 \\ J = 67, S = 29, I = 11 \\ J = 59, S = 37, I = 19 \end{cases}$$

Vamos analisar essas três possibilidades:

- Se $J = 73$, $S = 23$, $I = 5$ então a soma dos algarismos das três idades é $7 + 3 + 2 + 3 + 5 = 20 \neq 26$. Logo, essa solução está descartada.
- Se $J = 59$, $S = 37$, $I = 19$ então a soma dos algarismos das três idades é $5 + 9 + 3 + 7 + 1 + 9 = 34 \neq 26$. Logo, essa solução está descartada.
- Se $J = 67$, $S = 29$, $I = 11$ então a soma dos algarismos das três idades é $6 + 7 + 2 + 9 + 1 + 1 = 26$. Logo, essa é a solução do problema.

■

Critério de correção.

- (10 pts) Montar o sistema

$$(*) \begin{cases} I + J = 78 \\ S + J = 96 \end{cases}$$

  nos quais I, J e S são números primos.
- (30 pts) Encontrar todas as soluções do sistema $(*)$.
- (10 pts) Determinar as idades de Igor, João e Sílvio.

Observações

- (40 pts) Resolver o problema por inspeção das possibilidades.
- (-10 pts) Não encontrar todas as soluções do sistema (*).
- (-5pts) Erro de manipulação algébrica.

8. Encontre o valor da soma S dada por:

$$S = \frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1}.$$

Resolução. S é uma soma finita de termos, então com paciência seria possível calcular cada uma das somas até encontrar a resposta. Seria porém necessário um tempo essencialmente grande, talvez mais do que a duração da prova e portanto essa não seria uma boa estratégia. Vejamos: Observe que somando apenas os dois primeiros termos,

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} = \frac{2014 + 2016}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014} = \frac{4030}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014},$$

Ao continuar as outras somas, percebemos que não é uma boa estratégia. Talvez tirando o mínimo e somando todos os termos, o cálculo tivesse um padrão fácil de observar,

$$S = \frac{2014! + 2016 \cdot 2013! + 2016 \cdot 2015 \cdot 2012! + \cdots + 2016 \cdot 2015 \cdots 4 \cdot 3}{2016 \cdot 2015 \cdot 2014 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

entretanto a expressão acima também não é simples de calcular.

Então precisamos pensar em como simplificar essa expressão sem usar essas duas estratégias. Note que no denominador de cada termo, aparece um produto de números que são consecutivos: $2016 \cdot 2015$, $2015 \cdot 2014$, e assim por diante. Já que estamos sem outras estratégias, vamos tentar ver isso como uma dica de resolver essa questão (a priori o autor poderia ter escrito isso para nos despistar, mas pela falta de artifícios, vamos seguir por esse caminho). Note que: $\frac{1}{2016 \cdot 2015}$ pode ser visto como soma de dois números da forma $\frac{a}{2016} + \frac{b}{2015}$, de fato,

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015} = -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015}$$

Será que isso ajuda? Observe que o mesmo poderia ser feito para cada um dos outros termos,

$$\frac{1}{2015 \cdot 2014} = -\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014}, \quad \frac{1}{2014 \cdot 2013} = -\frac{1}{2014} + \frac{1}{2013}, \ \ldots \ \frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Daí quando somarmos os termos, muitos deles irão se cancelar. Segue que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2016 \cdot 2015} + \frac{1}{2015 \cdot 2014} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} \\
&= \left(-\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015}\right) + \left(-\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2013} + \cdots - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2016} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2015}{2016}.
\end{aligned}$$

■

Critério de correção.

Primeira Solução. (5pts.) O aluno não percebe que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

e somente ataca o problema por métodos de soma de frações e não chegará a um resultado conclusivo para o valor de S.

Segunda Solução. (25pts.) O aluno percebe que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(10pts.) O aluno usa a ferramenta acima em cada um dos termos.

(10pts.) O aluno percebe que a soma é telescópica e consegue simplificar diversos termos.

No final desses três passos, ele fez algo similar ao seguinte procedimento:

$$\begin{aligned}
S = \sum_{n=1}^{2015} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{2015} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2015} + \frac{1}{2015}\right) - \frac{1}{2016} \\
&= 1 - \frac{1}{2016}
\end{aligned}$$

(5pts.) O aluno determina corretamente o valor de S.

Terceira Solução - Lorena (10pts.) O aluno testou algumas somas parciais, por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, $\ldots$.
(10pts.) O aluno percebeu a recorrência.
(15pts.) O aluno demonstrou a recorrência (indução)
(15 pts.) O aluno chegou a resposta correta.
(5pts.) O aluno chegou em uma resposta errada, mas seguiu o método correto.