Olimpíada Pernambucana de Matemática 2017

NÍVEL 3

Caderno de Questões Com Resoluções

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. A primeira questão é de proposições múltiplas; apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. A segunda e a terceira questões são numéricas, tem respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (Coluna d para as dezenas e coluna u para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na coluna d).

06. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.

07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

09. Assinale as respostas de cada uma das 3(três) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

10. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .

11. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

13. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

15. Duração da prova: 4 horas.

NOME: ____

IDENTIDADE: ____________________ ÓRGÃO EXPEDIDOR: ____________________

ASSINATURA: ____

01. Sejam L M e N os pontos médios dos lados AC, AB e BC do triângulo ABC respectivamente. Seja D ponto de contato do círculo de centro S, inscrito ao triângulo LMN, com o lado LM. P_1P_2 denota o comprimento do segmento com extremidades em P_1 e P_2, e $[P_1P_2P_3]$ denota a área do triângulo $P_1P_2P_3$. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

A– (V) (F) A área do quadrilátero $LMNC$ mede metade da área do triângulo ABC.

B– (V) (F) Seja F o ponto de interseção da reta LS, com MN. Então $BC \cdot [LMF] = AB \cdot [LNF]$.

C– (V) (F) Suponha $AB=42$, $AC=34$ e $BC=20$. Então o raio do círculo inscrito no triângulo LMN é igual a 7.

D– (V) (F) O segmento MD mede metade de BN.

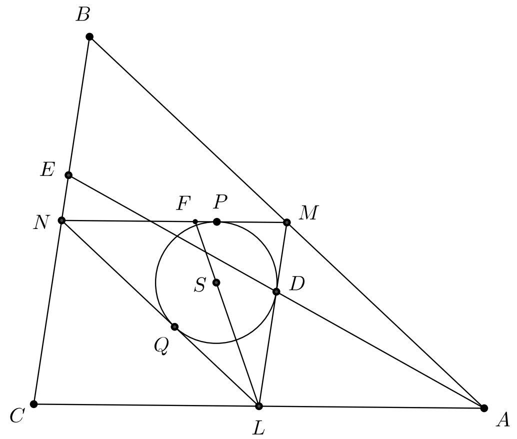
E– (V) (F) Se E é o ponto de encontro da reta AD com o lado BC do triângulo ABC, então $AB+BE = AC+CE$.

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: V F F F V.

RESOLUÇÃO:

Fatos que ajudam e notações:

- Os segmentos MN, NL e LM são bases médias de ABC associadas aos lados AC, AB e BC respectivamente. Portanto, medem metade dos lados correspondentes do triângulo ABC e são paralelos a eles.
- Segue-se das propriedades de base média que os tiângulos AML, LMN, CLN e BNM são congruentes pelo critério LLL de congruência de triângulos.
- Os triângulos ABE e AMD são semelhantes pelo critério "ângulo-ângulo (AA)" de semelhança de triângulos.
- Façamos $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Seja $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro de ABC. Assim, $ML = a/2$, $MN = b/2$, $LN = c/2$ e o semiperímetro de LMN é igual a $p/2$.



A- Verdadeira. A área do quadrilátero $LMNC$ corresponde a área de dois triângulos congruentes, enquanto a área do triângulo ABC equivale a área de quatros destes triângulos congruentes. Portanto, a área de $LMNC$ vale metade da área do triângulo ABC.

B- Falsa. Sendo S o incentro do triângulo LMN, temos que LF é bisetriz do ângulo $\angle NLM$. Segue-se do teorema da bissetriz interna que

$$\frac{FM}{FN} = \frac{LM}{LN} = \frac{BC/2}{AB/2} = \frac{BC}{AB}.$$

Pelo fato dos triângulos LMF e LNF possuirem mesma altura relativa aos lados MF e NF, respectivamente, tem-se:

$$\frac{[LMF]}{[LNF]} = \frac{FM}{FN} = \frac{BC}{AB} \iff AB \cdot [LMF] = BC \cdot [LNF].$$

C- Falsa. Das hipóteses, concluimos que $LN = 21$, $MN = 17$ e $LM = 10$. Desta forma o semiperímetro de LMN é $p = 24$. Calculamos a área do triâgulo de duas formas:

$$[LMN] = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = \sqrt{24.14.7.3} = 84.$$

Por outro lado,

$$[LMN] = 24.r,$$

sendo r o raio do círculo em questão.

Daí,

$$r = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}.$$

D- Falsa. Note que isto ocorreria apenas no caso de D ser o ponto médio do segmento LM, pois os triângulos ABE e AMD são semelhantes e, caso afirmativo, os pontos E e N seriam coincidentes. Equivalentemente, a afirmação seria verdadeira apenas para ABC isósceles ($b = c$).

De modo geral, sejam P e Q os pontos de contato com o círculo com os lados MN e NL respectivamente. Então,

$$MD = MP = x, \;\; NP = NQ = y \text{ e } LQ = LD = z.$$

Implica que

$$2(x+y+z) = \frac{a+b+c}{2} \Longrightarrow x = \frac{p}{2} - (y+z) \Longrightarrow MD = \frac{p-c}{2} = \frac{a+b-c}{4}.$$

E- Verdadeira. Da semelhança dos triângulos ABE e AMD, temos que $BE = 2MD$.

Pelo item anterior, $2MD = \dfrac{a+b-c}{2} = BE.$

Daí,

$$2BE = BC + AC - AB \Longrightarrow 2BE = (BE + CE) + AC - AB \Longrightarrow BE + AB = CE + AC.$$

02. Um certo jogo de RPG tornou-se muito popular, como o jogo usava dados octaédricos regulares (como o balão de são joão), várias indústrias começaram a produzir dados octaédricos. Se uma empresa decide construir apenas dados tais que os números das faces opostas somam 9, qual é o o número de diferentes tipos de dados que podem ser construídos nestas condições?

RESPOSTA: 16.

RESOLUÇÃO:

Se queremos impor que as faces opostas somem 9 temos 8x6x4x2 = 384 maneiras de dispor os números. Cada configuração e contada 24 vezes, dai temos apenas 16 dados distintos.

03. Um general deseja verificar o número de soldados em um de seus pelotões. Então, mandou que os soldados formassem alinhados de 9 em 9 e verificou que sobraram 2 soldados. Em seguida, ordenou que formassem alinhados de 11 em 11 e verificou que sobraram 4. Finalmente, fez os soldados se alinharem de 13 em 13 e sobraram 8. Sabendo que o pelotão têm entre dois mil e três mil soldados determine quantos soldados sobraram quando o general os mandou formar de 100 em 100.

RESPOSTA: 70.

RESOLUÇÃO:

Seja N o número de soldados. Os dados do problema nos dão que $N-8$ é múltiplo de 13, $N-4$ é múltiplo de 11 e $N-2$ é múltiplo de 9.

$N-8=13q$ com q inteiro. Como $N-4$ é multiplo de 11, temos que $N-4-11q=2q+4=2(q+2)$ também é múltiplo de 11. Desse modo, como 2 e 11 são coprimos, $q+2$ é múltiplo de 11. Daí, $q+2=11k$, com k inteiro. Logo,

$$N-8=13(11k-2)=143k-26.$$

Como $N-2$ é múltiplo de 9,

$$(N-2)-144k=-k-20$$

também é múltíplo de 9. Assim, temos que $k+20=9l$ com $l\in\mathbb{Z}$. Consequentemente, $k=9l-20$ e daí,

$$N-8=143(9l-20)-26$$

Isolando N na equação acima obtemos $N=1287l-2878$ com l inteiro.

Como $2000<N<3000$ temos que $l=4$ e $N=2270$. Logo, o pelotão tem 2270 soldados e a resposta procurada é 70.

04. a) Sabendo que a média aritmética de k números positivos $x_1, x_2, ..., x_k$ é maior ou igual que a média geométrica desses números:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k},$$

mostre que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq k.$$

b) A alometria é a parte da biologia que estuda a variação na forma entre espécies e indivíduos da mesma espécie. As funções que descrevem esses fenômenos são ditas alométricas e são da forma $f(x) = a.x^b$, com $a,\ b > 0$. Considere a seguinte combinação de funções alométricas:

$$f : \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = (n+1)x^n - n.x^{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificar que f é limitada inferiormente por 0 e limitada superiormente por 1, ou seja, $0 \leq f(x) \leq 1$.

RESOLUÇÃO:

a) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k},\ \frac{x_k}{x_1}$ são k números positivos, logo:

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1}}{k} \geq \sqrt[k]{\frac{x_1}{\cancel{x_2}} \cdot \frac{\cancel{x_2}}{\cancel{x_3}} \cdots \frac{\cancel{x_{k-1}}}{\cancel{x_k}} \cdot \frac{\cancel{x_k}}{x_1}} = \sqrt[k]{\frac{x_1}{x_1}} = 1.$$

b) Perceba que $f(x) = x^n\left[(n+1) - n.x\right]$, logo $f(0) = 0$. E $f(x) \geq 0$, pois $0 \leq x \leq 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$. Agora consideremos x no intervalo $\left(0,\ 1 + \frac{1}{n}\right]$. Tomemos então $x_1 = x^{n+1},\ x_2 = x^n, \ldots,\ x_{n-1} = x^3,\ x_n = x^2,\ x_{n+1} = x$ na desigualdade do item anterior:

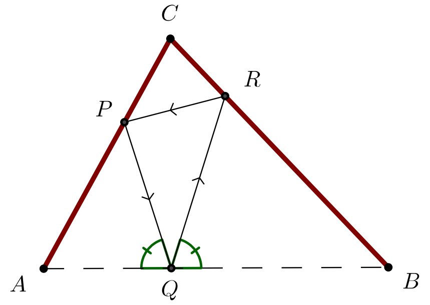
$$\underbrace{\frac{x^{n+1}}{x^n} + \frac{x^n}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x}}_{n-parcelas} + \frac{x}{x^{n+1}} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_1} \geq n+1 \therefore$$

$$n.x + \frac{1}{x^n} = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{n-parcelas} + \frac{1}{x^n} \geq n+1 \therefore$$

$$n.x^{n+1} + 1 \geq (n+1)x^n \therefore$$

$$1 \geq (n+1)x^n - n.x^{n+1} = f(x).$$

05. Um garoto se posiciona em um ponto Q localizado entre os pontos A e B (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por BC, seguindo até a parede AC e volta precisamente ao ponto Q de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que $\angle AQP = \angle BQR$. Mostre que o ponto Q é pé da altura relativa ao lado AB no triângulo ABC.



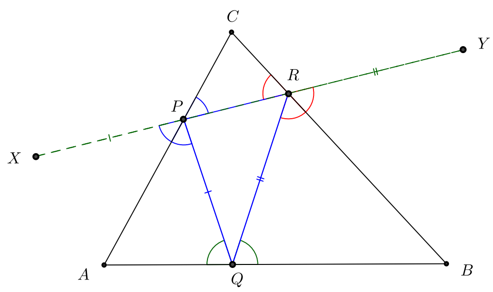
RESOLUÇÃO:

Primeiramente, observe que os ângulos obtidos pela trajetória da bola com as paredes satisfazem: $\angle CPR = \angle APQ$ e $\angle CRP = \angle BRQ$.

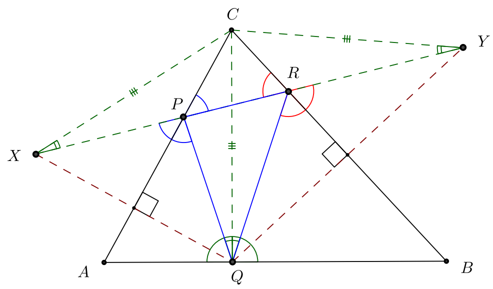
Sobre a reta PR considere os pontos X, Y tais que $XP = PQ$ e $YR = RQ$.

Temos que $\angle CPR = \angle APX$ (são opostos pelo vértice). Analogamente, $\angle CRP = \angle BRY$

Sabemos que num triângulo isósceles, a bissetriz relativa à base coincide com altura e mediana.



Logo, AC é mediatriz do segmento XQ e CB mediatriz de QY. Seque-se que $CX = CQ = CY$. Daí, CXY é isósceles. Sendo assim, $\angle CXY = \angle CYX$. Visto que CQY e RQY são também isósceles, obtém-se $\angle CYX =$



$\angle CQR$. Analogamente, $\angle CXP = \angle PQC$.

Ora, os ângulos $\angle AQC$ e $\angle CQB$ são congruentes e suplementares. Portanto, cada um mede 90^o e concluímos que CQ é a altura relativa ao lado AB.

06. Em algumas cidades do interior de Pernambuco costumava-se jogar, usando feijões, o seguinte jogo para dois jogadores: Dispunha-se sobre a mesa uma quantidade qualquer de feijões, digamos n feijões. Cada jogador tem que retirar um certo número de feijões que pode variar desde um feijão até uma quantidade que não seja maior que a número de feijões que ainda restarem na mesa após a jogada. Por exemplo, se restam 5 feijões sobre a mesa o próximo jogador a retirar pode retirar 1 ou 2 feijões. Perde o jogador que retirar o último feijão. Para quais valores de n o primeiro jogador pode encontrar uma estratégia vencedora? E o segundo jogador?

RESOLUÇÃO:

Vamos verificar o que ocorre com poucos feijões. Chamamos o primeiro jogador de A e o segundo de B.

- 1 feijão: A perde
- 2 feijões: A retira 1 e faz B perder. A ganha.
- 3 feijões: A é obrigado a tirar 1 agora B esta na posição de A num jogo com 2 feijões. B ganha.
- 4 feijões: A pode tirar 1 feijão e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 5 feijões: A pode tirar 2 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 6 feijões: A pode tirar 3 feijões e colocar B na posição de A num jogo com 3 feijões. A ganha.
- 7 feijões: A so pode tirar 1, 2, ou 3 feijões, nesse caso ele coloca B na condicão de A num jogo com 6,5 ou 4 feijões. B ganha.
- de 8 a 14 feijões: A pode tirar de 1 a 7 feijões de modo a colocar B na condição de A num jogo com 7 feijões: A ganha.
- 15 feijões: A so pode tirar de 1 a 7 feijões deixando B na condição de A num jogo de 8 a 14 feijões. B ganha.
- de 16 a 30 feijões: A deixa B com 15. A ganha.
- 31 feijões: Apos jogar A deixa B com uma quantidade entre 16 e 30 feijões. B Ganha.

Em geral...

- de 2^k ate $2^{(k+1)} - 2$ feijões: A ganha
- $2^{(k+1)} - 1$ feijões: B ganha

Prova por inducão: A base ja foi bem explicada. Supondo o resultado verdadeiro para um certo $k > 1$ vamos ver o que acontece para k+1.

- de $2^{(k+1)}$ ate $2^{(k+2)} - 2$ feijões: A retira de 1 ate $2^{(k+1)} - 1$ de modo a deixar B com $2^{(k+1)} - 1$ feijões. Assim, B assume a posicão de A num jogo com $2^{(k+1)} - 1$ e perde, ou seja A ganha.
- $2^{(k+1)} - 1$ feijões: A só pode tirar de 1 ate $2^k - 1$ feijões. Nesse caso B fica com uma quantidade de feijões que varia de 2^k ate $2^{(k+1)} - 1$ feijões assumindo o lugar de A num jogo com essa quantidade de feijões B ganha.