



LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.
02. Preencha os dados pessoais.
03. Não destaque as folhas desse caderno.
04. A primeira questão é de proposições múltiplas; apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.
05. A segunda e a terceira questões são numéricas, tem respostas cujos valores variam de 00 a 99 que devem ser marcados, na folha de respostas, no local correspondente ao número da questão. (Coluna d para as dezenas e coluna u para as unidades. Respostas com valores entre 0 e 9 devem ser marcadas antepondo-se zero (0) ao valor, na coluna d).
06. As 3(três) últimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.
07. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.
08. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.
09. Assinale as respostas de cada uma das 3(três) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.
10. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo ● .
11. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.
12. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.
13. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.
14. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.
15. Duração da prova: 4 horas.

NOME: _____

IDENTIDADE: _____ ÓRGÃO EXPEDIDOR: _____

ASSINATURA: _____

01. O quadrado mágico é um jogo de completar as “casas” de uma tabela, com números, de modo que a soma dos números nas linhas, colunas e das diagonais sejam sempre iguais. Iremos completar o quadrado de tamanho 3, ou seja, 9 casas serão preenchidas com os números distintos de 1 a 9. Por exemplo:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

A- (V) (F) É possível completar o quadrado mágico:

2	9	
	5	

B- (V) (F) É possível construir um quadrado mágico começando com o 1 no seu centro:

	1	

C- (V) (F) Só é possível completar o quadrado pondo o 5 no seu centro:

D- (V) (F) É possível completar o quadrado:

9		
	5	

E- (V) (F) É possível completar os quadrados:

	9	
2	5	

	9	
	5	
2		

RESPOSTAS DA QUESTÃO 01: V F V F F.

A- Verdadeira É possível completar o quadrado mágico da seguinte maneira:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

B- Falsa Colocando o 1 no centro as diagonais, a linha e a coluna central devem ser completadas com conjuntos

	1	

$\{x, y\}$, tais que:

$$x + 1 + y = 15 \Rightarrow x + y = 14 \therefore x, y \in \{2, 3, \dots, 9\}, \text{ e } x \neq y$$

Só existem dois conjuntos com essas propriedades, a saber: $\{9, 5\}$ ou $\{8, 6\}$. Como precisamos de 4 destes conjuntos para completar o quadrado e só temos dois conjuntos possíveis para fazê-lo, a tarefa é impossível de ser realizada. Sendo assim a afirmativa é falsa.

C- Verdadeira Verifiquemos que a soma dos números postos em cada linha, coluna ou diagonal devem ser iguais a 15. Ponhamos as letras $a, b, c, d, x, e, f, g, h$ para representar os números na tabela:

a	b	c
d	x	e
f	g	h

$$a + b + c + d + x + e + f + g + h = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{(9+1) \cdot 9}{2} = 45.$$

Como a soma nas linhas são iguais, podemos separar no primeiro membro das igualdades os elementos das linhas de modo que concluimos que:

$$a + b + c = d + x + e = f + g + h = 15(\text{linhas})$$

E como as somas nas colunas e nas diagonais também devem ser iguais, concluimos que:

$$a + d + f = b + x + g = c + e + h = 15(\text{colunas})$$

$$a + x + h = c + x + f = 15(\text{diagonais})$$

Agora, somando todas as linhas, colunas e diagonais que contém x , teremos $4 \cdot 15 = 60$. Nesta conta estamos contando o x 4 vezes e todas as outras casas apenas 1 vez. Assim,

$$1 + 2 + \dots + 7 + 8 + 9 + 3x = 60 \therefore 45 + 3x = 60 \therefore 3x = 15 \therefore x = 5.$$

D- Falsa Note que 1 deve completar a diagonal contendo 9 e 5. Além disso 2 e 4 devem completar a linha ou

9		
	5	
		1

coluna que contém o 9. A posição do 1 implica que teremos uma linha ou coluna contendo o 1 e o 4 (veja figura abaixo), que deve ser completado com o 10. Isto não é possível, já que os números do quadrado são $1, 2, \dots, 9$.

9	2	4
	5	
		1

ou

9		
2	5	
4		1

E- Falsa A linha que contém o 9 deve ser preenchida com o 2 e 4 ($15=9+2+4$). Isso não é possível pois, nas condições do problema proposto, o 2 foi preenchido em uma linha que não contém o 9.

	9	
2	5	
	1	

ou

	9	
	5	
2	1	

02. Dado um número n natural, denotamos por $s(n)$ a soma dos algarismos de n . Determine a quantidade $K = s(s(7^{1004}))$ sabendo que $20 < K < 30$.

RESPOSTA: 22.

RESOLUÇÃO: Pelo critério de divisibilidade por 9 temos que 7^{1004} e $s(7^{1004})$ deixam o mesmo resto na divisão por 9. Analogamente, $s(7^{1004})$ e $s(s(7^{1004}))$ deixam o mesmo resto na divisão por 9.

Por outro lado, note que 7^3 deixa resto 1 na divisão por 9. Desse modo, $7^{1002} = (7^3)^{334} \cdot 7^2$ deixa resto 4 na divisão por 9. Assim, temos que $K = s(s(7^{1004}))$ deixa resto 4 na divisão por 9. Como K está entre 20 e 30, a única possibilidade para K é 22.

03. Você já percebeu que os dados que são vendidos são cubos com os números de 1 até 6 em suas faces e que a soma dos números nas faces opostas é sempre 7? Quantos dados desse tipo podem ser construídos?

RESPOSTA: 02.

RESOLUÇÃO: Ponha a face com o número 1 no chão. Isso obriga que a face do teto terá o número 6. Coloque agora o 2 na direita, então na esquerda terá o 5. Agora temos duas possibilidades, 3 na frente e 4 atrás ou o contrário.

04. Enumera-se de 1 até n as páginas de um livro.

- a) Ao somar esses números, por engano, um deles é somado duas vezes obtendo o resultado incorreto 1819. Qual o número que foi somado duas vezes?
- b) E se soubessémos que contamos repetidamente não apenas uma, mas duas páginas: sendo uma contada três vezes e outra duas. Com a soma errada dando 1819, quais seriam os possíveis pares de páginas que foram somados mais de uma vez? Em cada par indique qual página poderia ter sido somada três e duas vezes.

RESOLUÇÃO:

- a) Como $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2 = S_n$, temos que $\frac{59 \cdot 60}{2} = 1770 < 1819 < \frac{60 \cdot 61}{2} = 1830$. Daí $S_n = 1770$ e $n = 59$, portanto a página $49 = 1819 - 1770$ foi contada duas vezes. Note que o livro não poderia ter um número menor de páginas, por exemplo se $S_n = 1711$, *i.e.*, $n = 58$ a página $108 = 1819 - 1711$ deveria ter sido somada duas vezes. Isto seria uma contradição, tendo em vista que o livro não possui a página 108.
- b) As maneiras de escrever 49 como soma de três números, sendo dois repetidos são: $1+1+47$; $2+2+45$; $3+3+43$; $4+4+41$; $5+5+39$; $6+6+37$; $7+7+35$; $8+8+33$; $9+9+31$; $10+10+29$; $11+11+27$; $12+12+25$; $13+13+23$; $14+14+21$; $15+15+19$; $16+16+17$; $17+17+15$; $18+18+13$; $19+19+11$; $20+20+9$; $21+21+7$; $22+22+5$; $23+23+3$; $25+25+1$.

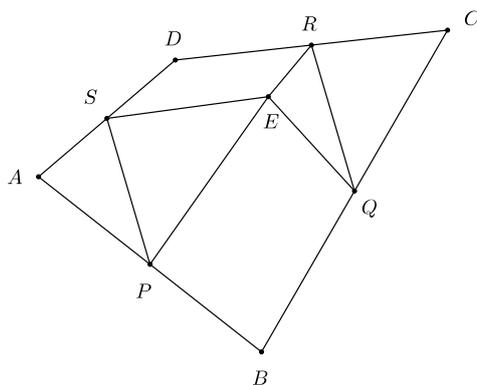
As duas primeiras parcelas das somas acima representam a página que foi contada três vezes e a última a página que foi contada duas vezes. Exemplo, $14+14+21$ representa a maneira de contar três vezes a página 14 e duas vezes a página 21.

- 05.** Alice escreve os números de 1 até 15 no quadro negro. Ela escolhe números a e b arbitrários, apaga-os e escreve no quadro o número $ab + 2a = 2b + 2$. Qual número estará no quadro após Alice realizar este procedimento 14 vezes?

Observação: No enunciado dessa questão há um erro de digitação, onde lê-se $ab + 2a = 2b + 2$, leia-se $ab + 2a + 2b + 2$. Essa questão será anulada e, conforme o regulamento, os pontos a ela correspondentes serão distribuídos entre as demais questões.

RESOLUÇÃO: Note que a quantidade obtida somando dois a cada número do quadro que depois multiplicando os resultados é preservada em cada etapa do procedimento realizado por Alice. Essa quantidade é $\frac{17!}{2}$. Desse modo, na última etapa do procedimento o número que vai restar no quadro após 14 etapas é $\frac{17!}{2} - 2$.

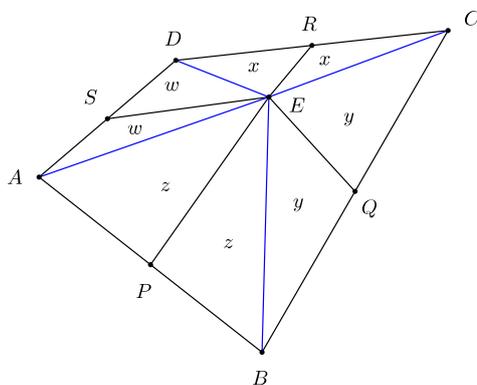
- 06.** Considere o quadrilátero convexo $ABCD$ a seguir. Sejam P , Q , R e S os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA , respectivamente, e E um ponto no interior de $ABCD$. Utilize a notação $[P_1P_2P_3P_4]$ para expressar área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ e a notação $[P_1P_2P_3]$ para indicar a área do triângulo $P_1P_2P_3$.



1. Demonstre a relação $[APES] + [CREQ] = [DSE] + [BQEP]$,
Sugestão: Considere os segmentos que unem o ponto E aos vértices do quadrilátero.
2. Prove que $[QCR] = \frac{1}{4}[BCD]$. Conclua que $[APS] + [QCR] = \frac{1}{4}[ABCD]$.
3. Determine a área do triângulo SPE sabendo-se que as áreas de QRE e $ABCD$ medem 5cm^2 e 60cm^2 respectivamente.

RESOLUÇÃO:

1. Considere os segmentos que unem o ponto E aos vértices do quadrilátero. Desta forma, os segmentos ES, ER, EQ e EP são medianas dos triângulos obtidos e, portanto, dividem os respectivos triângulo em áreas iguais, representadas (na figura) por x, y, z e w :



Logo,

$$[APES] + [CREQ] = x + y + z + w = [DSE] + [BQEP]$$

2. Note que os triângulos BCD e QCR são semelhantes pelo critério LAL pois o ângulo de vértice C é comum aos dois triângulos e seus lados são respectivamente proporcionais de razão $\frac{1}{2}$. Logo a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, ou seja:

$$\frac{[QCR]}{[BCD]} = \frac{1}{4} \implies [QCR] = \frac{1}{4}[BCD].$$

Utilizando-se do mesmo raciocínio, podemos concluir que

$$[APS] = \frac{1}{4}[ABD].$$

Somando as duas expressões, obtemos

$$[APS] + [QCR] = \frac{1}{4}[ABD] + \frac{1}{4}[BCD] = \frac{1}{4}([ABD] + [BCD]) = \frac{1}{4}[ABCD].$$

3. Do item (1), temos que:

$$[APES] + [CREQ] = \frac{1}{2}[ABCD] \implies [APS] + [SPE] + [QRE] + [QCR] = \frac{1}{2}[ABCD]$$

Usando o item (2), segue-se que:

$$[SPE] + [QRE] + \frac{1}{4}[ABCD] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

Consequentemente,

$$[SPE] + [QRE] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Daí,

$$[SPE] + 5 = \frac{1}{4}.60 \implies [SPE] = 10.$$