Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2015

Nível 3 (Ensino Médio) - Gabarito

1. Encontre numeros racionais a, b e c tais que

$$(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=1.$$

Resolução. Sendo $\alpha = 1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ temos que

$$\alpha - 1 = 2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} \tag{1}$$

Elevando ambos os membros da equação (1) ao cubo obtemos:

$$(\alpha-1)^3 = (2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3 \tag{2}$$

Desenvolvendo esta última igualdade têm-se

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 20 + 12(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) \tag{3}$$

Substituindo a equação (1) em (3) obtemos

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 20 + 12(\alpha - 1) \tag{4}$$

Logo,

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 - 9\alpha - 9 = 0 \tag{5}$$

Isolando α na expressão acima obtemos que

$$\alpha\frac{(\alpha^2-3\alpha-9)}{9} = 1 \tag{6}$$

Substituindo $\alpha = 1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ na expressão acima obtemos:

$$(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\frac{((1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^2-3(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})-9)}{9} = 1$$

O que nos dá

$$(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}-\frac{1}{3}\right) = 1$$

Logo, $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = \frac{1}{3}$

É possível obter uma outra solução da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}) &= && (7)\\
(a+2b+4c)+(2a+b+2c)\sqrt[3]{2}+(a+2b+c)\sqrt[3]{4} &= 1. && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}
$$

Comparando os membros da última igualdade obtemos o seguinte sistema de equações com três icognitas e três variáveis:

$$
\begin{cases}
a+2b+4c & = 1\\
2a+b+2c=0\\
a+2b+c=0
\end{cases}
\tag{10}
$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a=\frac{-1}{3}$, $\quad b=0$, $\quad c=\frac{1}{3}$ ■

2. (a) Fatore a expressão $x^2-17xy+16y^2$.

   (b) Encontre todas as soluções inteiras de $x^2-17xy+16y^2=454$.

Resolução.

(a) Pensando em $x^2-17yx-16y^2$ como uma equação do segundo grau com coeficientes $1, -17y$ e $16y^2$ obtemos que as raízes y e $16y$. Logo, a fatoração desejada é

$$x^2-17xy+16y^2=(x-y)(x-16y).$$

(b) Queremos encontrar todas as soluções inteiras de $x^2-17xy+16y^2=454$. Note que a decomposição em primos de 454 é 2.227 (Se convença que 227 é primo dividindo-o por todos os números primos menores que sua raíz quadrada). Desse modo, temos que

$$(x-y).(x-16y)=2.227$$

Como x e y é inteiro, temos que $x-y$ é inteiro que divide 454. Conseguentemente, $x-y|2$ ou $x-y|227$. Isso nos dá 4 possibilidades:

- $x-y=2$ e $x-16y=227$. Resolvendo o sistema obtemos $x=-13$ e $y=-15$.
- $x-y=227$ e $x-16y=2$. Resolvendo o sistema obtemos $x=242$ e $y=15$.
- $x-y=-2$ e $x-16y=-227$. Resolvendo o sistema obtemos $x=13$ e $y=15$.
- $x-y=-227$ e $x-16y=-2$. Resolvendo o sistema obtemos $x=-242$ e $y=-15$.

■

3. Mostre que, para cada número natural n existe um múltiplo de n diferente de zero escrito exclusivamente com algarismos 0 e 5.

   Resolução. Considere a sequência infinita de números naturais $S = \{5, 55, 555, 5555, ...\}$. Fixado um natural n existe n possibilidade de restos na divisão por n. Como a sequência S é infinita pelo príncipio da casa dos pombos, certamente existem dois números t_1 e t_2 pertencentes a S com $t_1 < t_2$ que deixam o mesmo resto na divisão por n. Note que $t_2 - t_1$ é um inteiro positivo escrito exclusivamente com os algarismos zero e cinco que é múltiplo de n ■

4. Suponha que f é uma função que está definida nos inteiros positivos, toma valores inteiros e tem as seguintes propriedades:

   (a) $f(5) = 5$;

   (b) $f(m.n) = f(m).f(n)$ para todos os inteiros positivos m e n;

   (c) $f(m) > f(n)$ se $m > n$.

   Prove que, necessariamente, $f(n) = n$ para todo inteiro n positivo.

   Resolução. Sabemos que $f(5) = 5$. Como $f(5) = f(5.1) = f(5).f(1)$ temos que $f(5) = f(5).f(1)$, e daí $f(1) = 1$. Uma vez que $f(2)$ é inteiro positivo, pela propriedade (c) $1 < f(2)$ e $f(4) = f(2)^2 < 4$, necessariamente $f(2) = 2$. Logo, $f(4) = f(2).f(2) = 4$, e como $f(2) < f(3) < f(4)$, $f(3) = 3$.

   Vamos provar que $f(n) = n$ para todo inteiro n positivo por indução. Suponha por hipótese de indução que $m \geq 2$ e que $f(n) = n$ para todos os inteiros positvos menores que m.

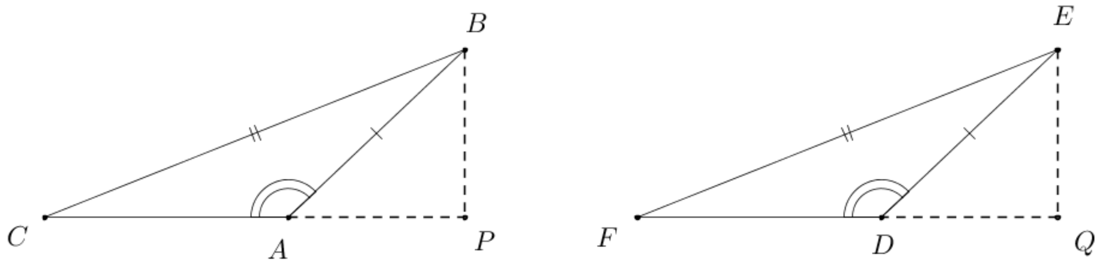
   Se m for par então existe um inteiro positivo k tal que $m = 2k$ com $k < m$. Assim, por hipótese de indução, $f(k) = k$ e, consequentemente $f(m) = f(2k) = f(2).f(k) = 2.k = m$.

   Se m for ímpar tmeos que existe inteiro positivo k tal que $m = 2k + 1$. Note que k e $k + 1$ são menores que m, assim, por hipótese de indução $f(k) = k$ e $f(k + 1) = k + 1$. Note ainda que $2k < m < 2k + 2$, logo $f(2k) < f(m) < f(2k + 2)$. Como $f(2k) = f(2).f(k) = 2k$ e $f(2k + 2) = f(2.(k + 1)) = 2(k = 1) = 2k + 2$, temos que $2k < f(m) < f(2k+2)$. Assim, a unica possbilidade de valor para $f(m)$ é $2k+1 = m$.

   Desse modo, concluímos por indução forte que $f(n) = n$ para todo inteiro positivo m. ■

5. (Problema e resolução propostos pelo professor Adriano Régis DM-UFRPE)Sejam ABC e DEF triângulos tais que $\angle CAB = \angle FDE > 90^o$, $AB = DE$ e $BC = EF$. Mostre que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Resolução. Sejam BP e EQ as alturas relativas aos lados AC e DF; dos triângulos ABC e DEF; respectivamente. Desde que os ângulos $C\hat{A}B$ e $F\hat{D}E$ são obtusos, essas alturas são exteriores aos respectivos triângulos.



Os triângulos ABP e DEQ são congruentes pelo caso "hipotenusa - ângulo agudo" de congruência de triângulos retângulos (ou ALA já que $A\hat{B}P = D\hat{E}Q$). Portanto, $BP = EQ$ e podemos concluir que os triângulos BPC e EQF são congruentes pelo caso "Hipotenusa-cateto"(ou LLL fazendo uso do teorema de Pitágoras). Sendo assim, temos $P\hat{B}C = Q\hat{E}F$ e consequentemente $A\hat{B}C = D\hat{E}F$: Logo os triângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ são congruentes pelo critério LAL.

É possível obter outra solução utilizando a lei dos senos: Temos

$$\frac{BC}{\text{sen} C\hat{A}B} = \frac{AB}{\text{sen} B\hat{C}A}$$
$$\frac{EF}{\text{sen} F\hat{D}E} = \frac{DE}{\text{sen} E\hat{F}D}$$

Por hipótese sabemos que

$$\frac{BC}{\text{sen} C\hat{A}B} = \frac{EF}{\text{sen} F\hat{D}E}.$$

Logo,

$$\frac{AB}{\text{sen} B\hat{C}A} = \frac{DE}{\text{sen} E\hat{F}D}.$$

Segue-se que

$$\text{sen} B\hat{C}A = \text{sen} E\hat{F}D.$$

Sendo esses ângulos agudos, concluímos que $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ e assim obtemos o resultado pelo critério de congruência ALA. ■