Olimpiada Pernambucana de Matemática - 2015

Nível 1 (6º e 7º anos)

1. Quantos números entre 100 e 999 são ímpares e tem pelo menos 2 algarismos iguais?

   Resolução. Existem 900 números entre 100 e 999. Destes 450 são ímpares. Contaremos a quantidade de números ímpares entre entre 100 e 999 que se escrevem com 3 dígitos diferentes: Existem 5 possibilidades para o dígito da unidades. Escolhido o dígito das unidades, o digito das centenas deve ser não-nulo e ser diferente do dígito das unidades. Assim temos 8 possibilidades para o dígito das centenas. Escollhidos o dígitos das unidades e centenas, o dígito das dezenas deve ser diferente do dígitos das unidades e das centenas. Assim, existem 8 possiblidades para o dígito das dezenas. Consequentemente, existem $8.8.5 = 320$ números ímpares entre entre 100 e 999 que se escrevem com 3 dígitos diferentes.

   Se retirarmos do conjunto dos primos ímpares maiores que 100 e menores que 999 os números que se escrevem com 3 algarimos diferentes vão restar apenas os números que se escrevem com 2 ou mais dígitos iguais, assim, concluímos que existem $450 - 320 = 130$ números ímpares entre 100 e 999 que se escrevem com pelo menos dois dígitos iguais.

   ■

2. Joana tem 100 cartões. Ela numerou os cartões de 100 a 199 numa das faces e, para cada número escrito, escreveu 12 vezes a soma dos seus algarismos na outra face. Por exemplo o cartão 101 tem 24 escrito noo seu verso. Em quais cartões o número em uma face é igual ao da outra face.

   Resolução. Como Joana númerou os cartões de 100 até 199, qualquer número da face de cima de um desses cartões tem expansão decimal da forma $(1bc)_{10} = 100 + 10b + c$, com $0 \leq b \leq 9$ e $0 \leq c \leq 9$. Para que o número de uma face do cartão seja igual ao da outra face a seguinte equação deve ser satisfeita:

   $$100 + 10b + c = 12(1 + b + c)$$

   Isso nos dá que

   $$88 = 2b + 11c \tag{1}$$

   Como $0 \leq b \leq 9$ e $0 \leq c \leq 9$, temos que, as única solução da equação (1) é $b = 0$ e $c = 8$. Assim, o único cartão em que o número de uma face é igual ao número da outra face é o cartão 108.

   ■

3. Encontre todos os pares (m, n) de primos ímpares positivos tais que

$$4m + n, m + 4n \text{ e } m + n - 30$$

são primos positivos.

Resolução. Como m e n são ambos ímpares, $m + n$ é par e, consequentemente, $m + n - 30$ também é par. Como $m + n - 30$ é primo positivo, necessariamente $m + n - 30 = 2$. Daí $m + n = 32$. Os únicos pares (m, n) de primos ímpares tais que $m + n = 32$ são $(3, 29)$ e $(13, 19)$. Como

$$3.4 + 29 = 41, \quad 29.4 + 3 = 119 = 17.7,$$

o par $(3, 29)$ não satisfaz as condições do enunciado. Como

$$13.4 + 19 = 71, 19.4 + 13 = 89$$

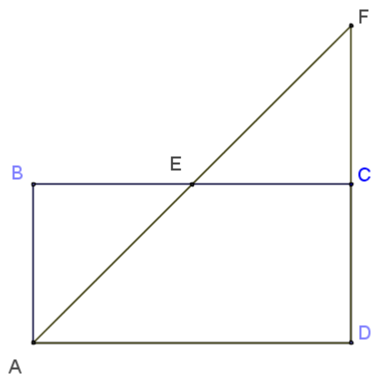
e 71 e 89 são primos, temos que $(13, 19)$ é o único par (m, n) de primos ímpares positivos tais que

$$4m + n, m + 4n, m + n - 30$$

são primos.

Observação: Na prova que foi aplicada na olimpíada pernambucana não constava no enunciado da terceira questão a hipótese dos primos m, n e $m+n-30$ serem positivos, porém essas hipóteses foram informadas para toda os concorrentes no início da prova. Todos os alunos escreveram sua resolução considerando essas hipóteses. ■

4. A área de retangulo $ABCD$ é 200cm^2. Na figura, E é o ponto médio de BC e o ponto F pertence à reta CD. Qual é a área do triângulo ADF?



Resolução. Note que os ângulos $F\hat{E}C$ e $B\hat{E}A$ são congruentes por serem opostos pelo vértice. Como E é o ponto médio do segmento BC temos que osa segmentos BE e EC são congruentes. Além disso, como os angulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}F$ são correspontes e $ABDC$ é um retângulo, temos que $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}$ são ângulos retos. Assim, pelo caso de congruência ALA os triangulos CEF e BEA são congruentes. Triângulos congruentes possuem áreas iguais, assim:

$$\begin{aligned} \text{Área}(ADF) &= \text{Área}(AECD) + \text{Área}(CEF) \\ &= \text{Área}(AECD) + \text{Área}(BEA) \\ &= \text{Área}(ABCD) = 200 \end{aligned}$$

■

5. (ERRATA) Dados 27 números consecutivos com 4 algarismos existe um que é divisível pela soma dos seus algarismos?
Resolução. A resposta para essa pergunta é não. De fato, vamos exibir uma sequência com 27 números consecutivos tais que nenhum dos números dessa sequência é divisível pela soma de seus algarismos.
Dentre 27 números consecutivos um deles, digamos $abcd_{10}$, é múltiplo de 27. Em particular, $abcd_{10}$ também é múltiplo de 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, temos que $9|a + b + c + d$. Uma vez que a, b, c, e d são dígitos, $a + b + c + d \leq 36$. Assim, $a + b + c + d = 9, 18, 27$ ou 36. Como $a + b + c + d = 36$ só é possível se $abcbd_{10} = 9999$ e 36 não divide 999, $a + b + c + d$ só pode ser $9, 18$ ou 27. Se $a + b + c + d = 9$ ou 27 temos que $a + b + c + c|abcd_{10}$. Existe um problema quando $a + b + c + d = 18$ e 18 não divide $abcd_{10}$ pois 18 não divide 27. Para constrir a nossa sequência devemos encontrar um número $abcd_{10}$ com as seguintes propriedades:

- $abcd_{10}$ é múltiplo de 27
- $a + b + c + d = 18$
- $abcd_{10}$ não é múltiplo de 18
- $abcd_{10} - 9$ e $abcd_{10} - 18$ são ambos números cuja a soma dos seus algarismos 27

Nessas condições podemos concluir que d é impar, que $c = 0$ e que $a + d - 8b$ é múltiplo de 27. Temos que 9207 tem todas a propriedades desejadas. Observando a tabela abaixo encontramos a seqeância desejada. Assim a resposta para a pergunta do enunciado é não.

$abcd_{10}$	$a + b + c + d$	$\dfrac{abcd_{10}}{a + b + c + d}$
9207	18	511,5

9206	17	541,5294118
9205	16	575,3125
9204	15	613,6
9203	14	657,3571429
9202	13	707,8461538
9201	12	766,75
9200	11	836,3636364
9199	28	328,5357143
9198	27	340,6666667
9197	26	353,7307692
9196	25	367,84
9195	24	383,125
9194	23	399,7391304
9193	22	417,8636364
9192	21	437,7142857
9191	20	459,55
9190	19	483,6842105
9189	27	340,3333333
9188	26	353,3846154
9187	25	367,48
9186	24	382,75
9185	23	399,3478261
9184	22	417,4545455
9183	21	437,2857143
9182	20	459,1
9181	19	483,2105263

■