Olimpíada Pernambucana de Matemática - 2015

Nível 2 (8^o e 9^o anos)

1. Quantos números com dois algarismos distintos são compostos?
Resolução. Para fazer essa contagem utilizaremos o príncipio da inclusão-exclusão. Observe que os números compostos com dois digitos distintos são maiores ou iguais a 10 e menores ou iguais a 99. Além disso, um número composto menor que 100 é múltiplo de $2, 3, 5$ ou 7. Dentre os números com dois algarismos:

- 45 são múltiplos de 2
- 30 são multiplos de 3
- 18 são múltiplos de 5
- 13 são multiplos de 7

Assim, temos 106 números com dois algarismos que são múltiplos de 2, 3, 5 e 7. Porém contamos os múltiplos de $6 = 2.3$ duas vezes. (Por exemplo, o número 12 foi contado duas vezes por que é múltiplo de 2 e de 3.) Desse modo devemps subtrair os 15 múltplos de 6 com dois algarismos. Além disso, os múltiplos de $10 = 2.5$, $14 = 2.7$, $15 = 3.5$, $21 = 3.7$ e $35 = 5.7$ também foram contados duas vezes. Dentre os núméros com dois algarismos

- 15 são múltiplos de 6
- 9 são multiplos de 10
- 7 são múltiplos de 14
- 6 são múltiplos de 15
- 4 são múltiplos de 21
- 2 são múltiplos de 21

Assim temos que subtrair 43 números dos 106 que contamos antes, o que resulta em 63. Porém, subtraimos os múltiplos de $30 = 2.3.5$ duas vezes. (Por exemplo, subtraímos o 30 uma vez por que ele é multiplo de $6 = 2.3$ e uma vez porque ele é múltiplo de $10 = 2.5$.). Além disso, os múltiplos de $42 = 2.3.7$, $70 = 2.5.7$ e $105 = 3.5.7$ também foram subtraídos duas vezes. Dentre os números com dois algarismos

- 3 são múltiplos de 30
- 2 são multiplos de 42
- 1 é múltiplo de 70

- 0 são múltiplos de 105

Assuim temos que somar 6 números a 63, o que resulta em 69 números com dois algarismos compostos. Mais algum número foi somado duas vezes? A resposta é não, pois os números candidatos a serem somados duas vezes são múltiplos de $210 = 2.3.5.7$. e não existem numéros com dois algarismos compostos. Mas ainda não acabou. Falta subtrair os números compostos com dois algarismos iguais. Existem 8 desses números. Assim existem $61 = 69 - 8$ números compostos com dois algarismos distintos. ■

2. Encontre todas as soluções da equação

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{x}}} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$$

Resolução. Primeiro, trabalharemos com o lado esquerdo da equação:

$$\begin{aligned} 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{x}}} &= 1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{x-1}} \\ &= 1 + (x - 1) = x \end{aligned}$$

Agora, nos concentraremos na soma $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$. Observe que somar a primeira e a última parcela resulta em 101. Do mesmo modo, somar a segunda e a penúltima parcela resulta em 101. Prosseguindo com esse raceiocínio obtemos uma soma com 50 parcelas iguais a 101. Desse modo, $x = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = 50.101 = 5050$. ■

3. (a) Fatore a expressão $x^2 - 17xy + 16y^2$.

   (b) Encontre todas as soluções inteiras de $x^2 - 17xy + 16y^2 = 454$.

   Resolução.

   (a) Pensando em $x^2 - 17yx - 16y^2$ como uma equação do segundo grau com coeficientes $1, -17y$ e $16y^2$ obtemos que as raízes y e $16y$. Logo, a fatoração desejada é

   $$x^2 - 17xy + 16y^2 = (x - y)(x - 16y).$$

   (b) Queremos encontrar todas as soluções inteiras de $x^2 - 17xy + 16y^2 = 454$. Note que a decomposição em primos de 454 é 2.227 (Se convença que 227 é primo dividindo-o por todos os números primos menores que sua raíz quadrada). Desse modo, temos que

   $$(x - y).(x - 16y) = 2.227$$

Como x e y é inteiro, temos que $x-y$ é inteiro que divide 454. Conseguentemente, $x-y|2$ ou $x-y|227$. Isso nos dá 4 possibilidades:

- $x-y=2$ e $x-16y=227$. Resolvendo o sistema obtemos $x=-13$ e $y=-15$.
- $x-y=227$ e $x-16y=2$. Resolvendo o sistema obtemos $x=242$ e $y=15$.
- $x-y=-2$ e $x-16y=-227$. Resolvendo o sistema obtemos $x=13$ e $y=15$.
- $x-y=-227$ e $x-16y=-2$. Resolvendo o sistema obtemos $x=-242$ e $y=-15$.

$\blacksquare$

4. Dados 27 números consecutivos com 4 algarismos existe um que é divisível pela soma dos seus algarismos?
Resolução. A resposta para essa pergunta é não. De fato, vamos exibir uma sequência com 27 números consecutivos tais que nenhum dos números dessa sequência é divisível pela soma de seus algarismos.
Dentre 27 números consecutivos um deles, digamos $abcd_{10}$, é múltiplo de 27. Em particular, $abcd_{10}$ também é múltiplo de 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, temos que $9|a+b+c+d$. Uma vez que a, b, c, e d são dígitos, $a+b+c+d \leq 36$. Assim, $a+b+c+d = 9, 18, 27$ ou 36. Como $a+b+c+d = 36$ só é possível se $abcbd_{10} = 9999$ e 36 não divide 999, $a+b+c+d$ só pode ser $9, 18$ ou 27. Se $a+b+c+d = 9$ ou 27 temos que $a+b+c+c|abcd_{10}$. Existe um problema quando $a+b+c+d = 18$ e 18 não divide $abcd_{10}$ pois 18 não divide 27. Para constrir a nossa sequência devemos encontrar um número $abcd_{10}$ com as seguintes propriedades:

- $abcd_{10}$ é múltiplo de 27
- $a+b+c+d = 18$
- $abcd_{10}$ não é múltiplo de 18
- $abcd_{10} - 9$ e $abcd_{10} - 18$ são ambos números cuja a soma dos seus algarismos 27

Nessas condições podemos concluir que d é impar, que $c = 0$ e que $a+d-8b$ é múltiplo de 27. Temos que 9207 tem todas a propriedades desejadas. Observando a tabela abaixo encontramos a sequeância desejada. Assim a resposta para a pergunta do enunciado é não.

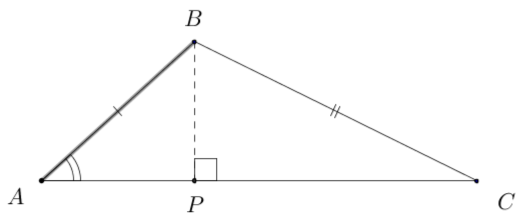
$abcd_{10}$	$a+b+c+d$	$\dfrac{abcd_{10}}{a+b+c+d}$
9207	18	511,5
9206	17	541,5294118

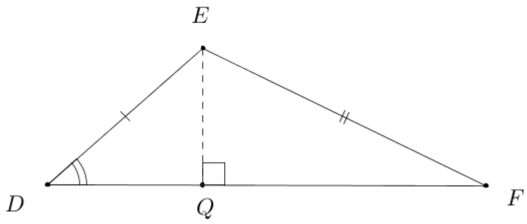
9205	16	575,3125
9204	15	613,6
9203	14	657,3571429
9202	13	707,8461538
9201	12	766,75
9200	11	836,3636364
9199	28	328,5357143
9198	27	340,6666667
9197	26	353,7307692
9196	25	367,84
9195	24	383,125
9194	23	399,7391304
9193	22	417,8636364
9192	21	437,7142857
9191	20	459,55
9190	19	483,6842105
9189	27	340,3333333
9188	26	353,3846154
9187	25	367,48
9186	24	382,75
9185	23	399,3478261
9184	22	417,4545455
9183	21	437,2857143
9182	20	459,1
9181	19	483,2105263

■

5. (Problema e resolução propostos pelo professor Adriano Régis DM-UFRPE) Sejam ABC e DEF triângulos tais que $\angle CAB = \angle FDE$, $AB = DE$ e $BC = EF$. Se os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ são obtusos, mostre que os triângulos ABC e DEF são congruentes.
   Sabemos que o caso: "Angulo-lado-lado" (ALL), em geral, não é um caso de congruência de triângulos. No entanto, com algumas restrições, podemos concluir a congruência de triângulos nesse caso. Vejamos:

   Resolução. Sejam BP e EQ as alturas relativas aos lados AC e DF; dos triângulos ABC e DEF; respectivamente. Desde que os triângulos ABC e DEF são obtusos, essas alturas são interiores aos respectivos triângulos.





Os triângulos ABP e DEQ são congruentes pelo caso "hipotenusa - ângulo agudo" de congruência de triângulos retângulos (ou ALA já que $A\hat{B}P = D\hat{E}Q$). Portanto, $BP = EQ$ e podemos concluir que os triângulos BPC e EQF são congruentes pelo caso "Hipotenusa-cateto" (ou LLL fazendo uso do teorema de Pitágoras). Sendo assim, temos $P\hat{B}C = Q\hat{E}F$ e consequentemente $A\hat{B}C = D\hat{E}F$: Logo os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo critério LAL.

$\blacksquare$