Olimpíada Pernambucana de Matemática 2016

Nível - 3

Caderno de Questões

LEIA COM ATENÇÃO

01. Só abra este caderno após ler todas as instruções e quando for autorizado pelos fiscais da sala.

02. Preencha os dados pessoais.

03. Não destaque as folhas desse caderno.

04. As 5(cinco) primeiras questões são de proposições múltiplas; cada uma delas apresenta 5(cinco) alternativas para você decidir e marcar na coluna apropriada quais são verdadeiras e quais são falsas. As alternativas podem ser todas verdadeiras, todas falsas ou algumas verdadeiras e outras falsas. Na folha de respostas, as verdadeiras devem ser marcadas na coluna V; as falsas, na coluna F.

05. As 3(três) úiltimas questões são discursivas e devem ser resolvidas, no caderno de prova, e na página onde estão enunciadas.

06. Se o caderno não estiver completo, exija outro do fiscal da sala.

07. Ao receber a folha de respostas, confira seu nome e seus dados pessoais. Comunique imediatamente ao fiscal qualquer irregularidade observada.

08. Assinale as respostas de cada uma das 5(cinco) primeiras questões no corpo da prova e, só depois, transfira os resultados para a folha de respostas.

09. Para marcar a folha de respostas, utilize apenas caneta esferográfica preta ou azul e faça as marcas de acordo com o modelo: ●.

10. A marcação da folha de respostas é definitiva, não admitindo rasuras.

11. Não risque, não amasse, não dobre e não suje a folha de respostas, pois isso poderá prejudicá-lo.

12. Os fiscais não estão autorizados a emitir opinião nem a prestar esclarecimentos sobre o conteúdo das provas. Cabe única e exclusivamente ao participante interpretar e decidir.

13. Se a Comissão verificar que a resposta de uma questão é dúbia ou inexistente, a questão será posteriormente anulada, e os pontos, a ela correspondentes, distribuídos entre as demais.

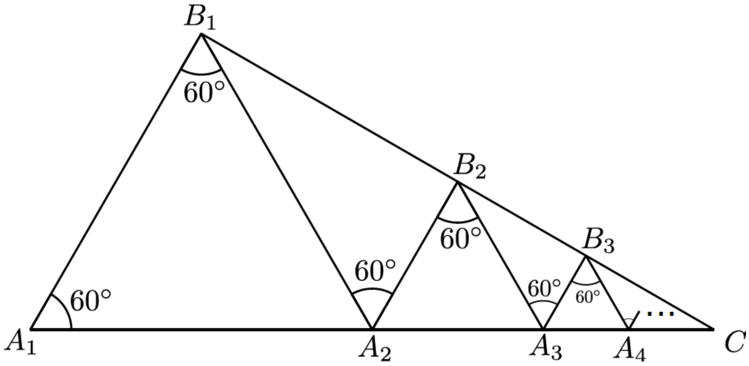
14. Duração da prova: 4 horas.

Nome: ______________________________

Identidade: ______________ **Órgão Expedidor:** ______________

Assinatura: ______________________________

01 Dado um triângulo A_1B_1C, a seguir ilustrado, e a poligonal $L = A_1B_1A_2B_2A_3B_3 \ldots$, considere que o segmento A_1B_1 mede 1 km, e que o segmnto A_1C mede 2 km.



De posse dessas infornações, analise a veracidade das afirmações a seguir:

A – (V) (F) O segmento B_1C mede $\sqrt{3}$ km.

B – (V) (F) A medida do ângulo $A_1\widehat{B_1}C$ é 90°.

C – (V) (F) O segmento A_2B_2 mede 500 m.

D – (V) (F) Seguindo a poligonal desde A_1 até chegar em A_3, teremos caminhado 3 km.

E – (V) (F) O comprimento de L não passa de 4 km.

02 Sejam x, y, a, b e c números reais tais que

$$\begin{cases} sen(x) + cos(y) = a \\ sen(y) + cos(x) = b \\ sen(x+y) = c \end{cases}$$

Com base nessas informações, analise a veracidade das afirmções a seguir:

A – (V) (F) Se $x = y = 0$, então $a = b = c$.

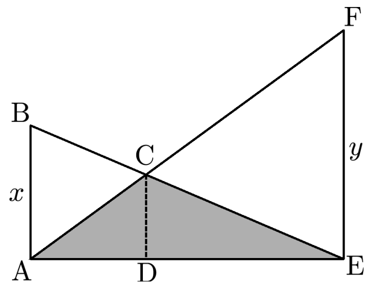
B – (V) (F) $Se\ x = y = \pi$, então $a - b = c$.

C – (V) (F) Se $x = y$, então $c = a^2$.

D – (V) (F) a e b não podem ser nulos simultaneamente .

E – (V) (F) $\frac{a^2+b^2}{2} = 1$, para quaisquer valores de x e de y.

03 A figura abaixo ilustra a vista lateral de duas rampas, com alturas x e y em relação ao solo.



De posse dessas informações, decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

A – (V) (F) A altura $\overline{DC}$ do ponto de maior altura comum as duas rampas é dada por $\overline{DC} = \frac{x+y - x.y}{x+y}$.

B – (V) (F) Se $x = 3$ e $y = 6$ então $\overline{DC} = 2$.

C – (V) (F) Se $x = 3$ e $y = 7$ então $\overline{DC} < 2$.

D – (V) (F) Se $\overline{AE} = x + y$ então a área S do triângulo ACE é dada por $S = \frac{x.y+x+y}{x+y}$

E – (V) (F) Se $x = 4$, $y = 12$ e $\overline{AE} = x + y$ então a área do triângulo ACE é 24.

04 Seja S o conjunto dos números naturais que são maiores que 1000 e menores que 2000, ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{N} : 1000 < x < 2000\}.$$

Analise a veracidade das afirmções a seguir, sobre o conjunto S.

A – (V) (F) Em S existem 50 números ímpares, tais que o dígito das centenas é zero.

B – (V) (F) 18 é a quantidade de elementos de S cuja a soma de seus digitos resultam em 8.

C – (V) (F) A soma dos elementos de S é 1498500.

D – (V) (F) Existem 333 números em S, que são múltiplos de 3.

E – (V) (F) Existem 4 números em S, cuja a soma de seus algarismos é maior que 26.

05 Considere o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + cx + d$, onde c e d são números reais. Sobre esse polinônio podemos afirmar que:

A – (V) (F) Se $c = 4$ e $d = 0$, $p(x)$ possui 3 raízes reais.

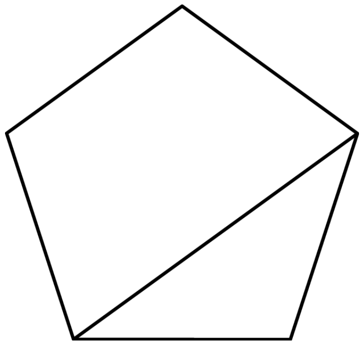
B – (V) (F) Se $c = -13$ e $d = 10$, o produto das raízes de $p(x)$ é 13.

C – (V) (F) Se 1 e -1 são raízes de $p(x)$, então $c = -1$ e $d = -2$.

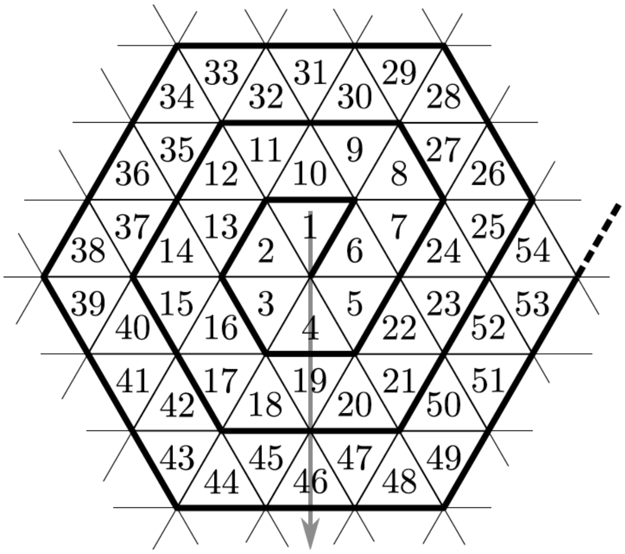
D – (V) (F) Se $d = 0$, então 0 é uma raiz de $p(x)$ qualquer que seja o valor de c.

E – (V) (F) Se $c = 0$ e $d = 0$, então $p(x)$ possui 3 raízes reais distintas.

06 Demonstre que as diagonais de um pentágono regular de lado 1 medem $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



07 Considere a sequência $(1, 4, 19, 46, \dots)$ indicada na figura abaixo. Encontre o décimo termo dessa sequência.



08 Um tapete de Sierpinski pode ser construído da seguinte forma: A partir de um quadrado de lado 1 dividimos cada lado do quadrado em k partes iguais, onde k é ímpar e maior ou igual a 3, dividindo assim o quadrado inicial de lado 1 em k^2 subquadrados idênticos. Remova o subquadrado central. Agora divida cada um dos subquadrados restantes novamente em k^2 subquadrados idênticos e novamente remova os subquadrados centrais. Repita o processo em cada um dos novos subquadrados restantes e assim por diante. O tapete de Sierpinski é o conjumto que sobra após a remoção dos subquadrados em cada etapa. Qual a área do tapete de Sierpinski?

Espaço Para RASCUNHO