UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

JOSÉ VALTER PEREIRA JÚNIOR

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DA METODOLOGIA DO USO DE JOGOS MATEMÁTICOS

RECIFE
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

JOSÉ VALTER PEREIRA JÚNIOR

COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DA METODOLOGIA DO USO DE JOGOS MATEMÁTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento
Coorientador: Prof. Dr. Severino Barros de Melo

RECIFE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J95c Júnior, José Valter Pereira
Compreensão do conceito de função a partir da metodologia do uso de jogos matemáticos / José Valter Pereira Júnior. - 2020.
91 f. : il.

Orientador: Ross Alves do Nascimento.
Coorientador: Severino Barros de Melo.
Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Ensino de Matemática. 2. Modelagem Matemática. 3. HQ. 4. Conceito de Função. 5. Jogos Matemáticos . I. Nascimento, Ross Alves do, orient. II. Melo, Severino Barros de, coorient. III. Título

CDD 510

JOSÉ VALTER PEREIRA JÚNIOR

Compreensão do Conceito de Função a Partir da Metodologia do Uso de Jogos Matemáticos

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em______/_____/______

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Orientador(a))– UFRPE

____

Prof. Dr. Severino Barros de Melo (Co-orientador(a))– UFRPE

____

Prof. Dr. Rogério da Silva Ignácio – **CAP/UFPE**

____

Prof[a]. Dr[a]. Elisângela Bastos de Melo Espíndola– PROFMAT/UFRPE

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por estar conseguindo concluir mais uma etapa da minha vida. Gostaria de agradecer, também, ao meu Professor-orientador, Ross Nascimento, assim como ao meu Co-orientador, Severino de Melo, pelo empenho destes em me orientar nessa longa trajetória que foi a produção desta dissertação. E não poderia deixar de prestar meus sinceros agradecimentos aos meus alunos, especialmente aos que participaram ativamente desta pesquisa.

Tenho imenso prazer em dedicar este trabalho aos meus familiares e amigos, sem os quais eu não conseguiria conclui-lo. Obrigado pela paciência, colaboração e apoio de sempre.

“Não há ramo na matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real“

(Lobachevsky)

Declaração

Eu, **José Valter Pereira Júnior**, declaro, para os devidos fins e efeitos, que a presente dissertação, intitulada **Compreensão do conceito de função a partir da metodologia do uso de jogos matemáticos**, entregue como trabalho de conclusão de curso para a obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas, claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu, autor do referido texto, estou ciente que a utilização de material de terceiros, incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes, será considerado plágio e estará sujeito a processo administrativo da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais; Declaro, ainda, que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFPE, bem como o Professor - orientador Dr. Ross Alves do Nascimento, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 31 de julho de 2020.

José Valter Pereira Júnior

Resumo

Este trabalho de pesquisa está baseado em um estudo de caso realizado para compreender o conceito de função por estudantes do 9º ano do ensino básico ao manipularem jogos matemáticos. A proposta foi construída com o objetivo de conhecer o domínio da matemática pelos estudantes nesse conteúdo e a potencialidade de alguns jogos matemáticos que em sua descrição de solução apresentam o conceito de função envolvido. A coleta de dados foi traçada no sentido de fazer o estudante descrever que matemática percebe nos jogos e que é possível transmitir por processos básicos de modelagem (tabelas, contagens, gráficos, desenhos, equações, entre outros), de modo que possa apresentar uma formulação da caricatura da escrita algébrica escondida na manipulação desses jogos. O trabalho foi realizado com 3 estudantes do ensino básico de um colégio particular da cidade do Recife. No estudo, recorremos a metodologia do uso de jogos matemáticos por ser um instrumento que viabiliza o processo de contextualização e entendimento de saberes matemáticos, no nosso caso, o conhecimento de função. Na coleta de dados propomos aos estudantes que recorressem ao recurso de História em Quadrinhos (HQ), para fugir da formalidade da escrita matemática no sentido de dar ao estudante a liberdade para apresentar o seu modo de explicação do entendimento da linguagem matemática envolvida e descrita a partir da manipulação desses artefatos de aprendizagem (Torre de Hanói, Salto de Rã e Troca Peças). Os resultados indicam que os estudantes mesclam linguagem matemática e diagramas, na descrição da resolução dos jogos oferecidos; notamos certa autonomia matemática para criar representações, tabelas e desenhos; apresentaram elementos matemáticos apropriados ao tipo de mapeamento de jogos proposto; o uso de modelo de escrita e descrição com HQ facilitou a construção de informações apresentadas por eles; ficaram desinibidos quanto à demonstração e descrição matemática; o uso de contextos utilizando jogos foi favorável para que visualizassem o entendimento de funções; as estratégias para o ensino de funções devem se adequar a compreensão dos processos matemáticos presentes em artefatos dessa natureza; os jogos matemáticos trabalhados foram excelentes contextos para explorar o conceito de função.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Modelagem Matemática. HQ. Conceito de Função.

Abstract

This research is based on a study case fulfilled to unterstend the Function concept by 9th grade students in a basic education when they manipulating mathematical games. The proposal was built with the objective of knowing the mastery of mathematics by students in this content and the potential of some mathematica games that in their solution description presente the concept of function involved. Data collection was designed in order to make the student describe what mathematics he perceives in games and that is possible to transmit through basic modelin processes (tables, counts, graphs, drawings, equations and others), so that he can presente a formulation of the caricature of algebraic writing hidden in the manipulation of these games. The work was carried out with 3 primary school students from a private school in Recife city. In work, we used the methodology of using mathematical games because it is na instrument that enables the process of contextualization and understanding of mathematical knowledge, in our case, the knowledge of function. In data collection, we propose students to resort to the History of Comics resource, to escape the formality of mathematical writing in order to give the student the freedom to presente their way of explaining the undersanding of the mathematical language involved and described the from the manipulation of these learning artifacts (Tower of Hanoi, Frog Jamp and Swap Parts). The results indicate that students miz mathematical language and diagrams in describing the resolution of the game offered; we noticed a certain mathematical autonomy to create representations, tables and drawings; presented mathematical elements appropriate to the type of game mapping proposed; the use of a writing and description model with HQ facilitated the construction of information presented by the; they were uninhibited about the mathematical demostration and description; the use of contexts using games was favorable for them to visualize the understanding of functions; strategies for teaching functions must adapt to the understanding of mathematical processes present in artifacts of this nature; the mathematical games worked were excellent contexts to explore the concept of function.

Keywords: Mathematics teaching. Mathematica. Modeling. HQ. Function Concept.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da função gerada no exemplo da corrida de táxi . . . 26
Figura 2 – Exemplo em forma tabular e gráfica para representar funções 27
Figura 3 – Uso da História em Quadrinhos em livros didáticos como instrumento de mediação 39
Figura 4 – Uso de HQ para explicar conteúdos matemáticos em livro didático 40
Figura 5 – Tabuleiro do jogo Torre de Hanói 42
Figura 6 – Ilustração do tabuleiro do jogo Torre de Hanói 43
Figura 7 – Sequência decorrente do movimento das peças no jogo Torre de Hanói . . . 43
Figura 8 – Demonstração de fórmula por recorrência para o movimento das peças do jogo, que gera uma Progressão Geométrica de razão 2 44
Figura 9 – Tabuleiro do jogo Salto de Rã 46
Figura 10 – Ilustração do tabuleiro do jogo Salto de Rã 47
Figura 11 – Movimentos do jogo indicando uma sequência decorrente do posicionamento das peças no jogo Salto de Rã 48
Figura 12 – Movimentos de solução do jogo Salto de Rã 49
Figura 13 – Demonstração de fórmula por recorrência a partir do movimento das peças do jogo. Formação de uma Progressão 51
Figura 14 – Tabuleiro do Troca de Peças 51
Figura 15 – Progressão aritmética nos movimentos do jogo Troca Peças 53
Figura 16 – Movimentos dos jogos. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Troca Peças 53
Figura 17 – Demonstração de fórmula por recorrência dos movimentos das peças do jogo. Formação de uma Progressão 54
Figura 18 – Ficha de coleta de dados da pesquisa 61
Figura 19 – Ficha de coleta de dados da pesquisa 62
Figura 20 – Ficha de coleta de dados da pesquisa 63
Figura 21 – Foto enviada pelo(a) aluno(a) (A1), sobre as respostas ao Questionário da atividade com o jogo Salto da Rã 64
Figura 22 – Raciocínio executado pelo estudante A1 sobre os movimentos das jogadas e a soma de Gauss 67
Figura 23 – Anotações de A1 para definir o termo geral 68
Figura 24 – Ações da estudante A2 no jogo 68
Figura 25 – Ações da estudante A2 no jogo 69
Figura 26 – Regra criada por A2 para o movimento de 3 e 4 peças 69
Figura 27 – Passos definidos por A2 para atingir o movimento mínimo 69

Figura 28 – A2 define um passo a passo com grupos de 3 pares de peças 70
Figura 29 – Tabelamento entre grandezas definidas por A2 71
Figura 30 – Teste do modelo para 8 pares de peças 72
Figura 31 – Teste do modelo para 3 peças no jogo 73
Figura 32 – Anotações do estudante A3 ao trabalhar com 4 peças no jogo 74

Lista de quadros

Quadro 1 – Valores relacionados à quantidade de movimento de cada peça do jogo . . 42
Quadro 2 – Movimentos do jogo. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Torre de Hanói 44
Quadro 3 – Movimentos do jogo. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Torre de Hanói 44
Quadro 4 – Representação do triângulo de Hanói 45
Quadro 5 – Movimentos dos jogos. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Salto de Rã 48
Quadro 6 – Descrição da matemática do jogo "Salto de Rã" 50
Quadro 7 – Progressão aritmética nos movimentos do jogo Troca Peças 52
Quadro 8 – Movimentos das peças no jogo Troca Peças 54
Quadro 9 – Etapa da Metodologia da aplicação da atividade. 58
Quadro 10 – Movimento mínimo das peças do jogo Salto da Rã desenvolvido pelo estudante A1 65
Quadro 11 – Número de peças versus número de jogadas no jogo Torre de Hanói 73

Sumário

1 INTRODUÇÃO 21
1.1 Objetivos 22
1.1.1 Objetivo geral 22
1.1.2 Objetivos específicos 22

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 25
2.1 O ensino de função e a história da matemática 25
2.2 Algumas tendências e abordagens do Ensino da Matemática 29
2.2.1 Etnomatemática 29
2.2.2 Os recursos computacionais e o ensino da Matemática 31
2.2.3 Modelagem no Ensino da Matemática 32
2.2.4 A prática de Resolução de Problemas 33
2.3 A valorização da contextualização no ensino da matemática 35
2.4 O uso do recurso do HQ no ensino de matemática 37

3 A METODOLOGIA DO USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 41
3.1 A Torre de Hanói 41
3.2 O Salto de Rã 45
3.3 O Troca Peças 50

4 METODOLOGIA 57
4.1 Modelo de pesquisa 57
4.2 Sujeitos 58
4.3 Espaço de desenvolvimento da pesquisa 59
4.4 Descrição das etapas de coleta dos dados 59
4.4.1 Fichas de coleta de dados da pesquisa 61
4.4.2 Análise do material de coleta 64
4.4.2.1 Jogo Salto de Rã – Estudante A1 64
4.4.2.2 Jogo Troca Peças - Estudante A2 68
4.4.2.3 Jogo Torre de Hanói - Estudante A3 72

5 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES 75

REFERÊNCIAS 77

1 Introdução

A Matemática é uma das disciplinas mais importantes na formação de qualquer estudante da Educação Básica. Este fato nos coloca na compreensão de que se o estudante não tiver uma aprendizagem nos primeiros anos de escolarização bem realizada poderá ter dificuldades importantes na sua formação estudantil.

Embora seja passível de uma abordagem estritamente formal, o ensino da matemática passa por um processo de incorporação de novas metodologias e tendências que buscam fornecer ao estudante uma melhor compreensão. Para as dificuldades observadas, cabe ao professor criar recursos para facilitar um melhor entendimento da abstração e dedução necessárias para os métodos utilizados na sua validação. Por outro lado, esta linguagem vem sendo muito associada e aplicada em situações cotidianas, como elemento para melhor compreensão de mundo pelos estudantes, para que possa ser mais bem utilizada, na prática.

Sobre a matemática, também se discute a ideia de que sua natureza é complexa e pouco acessível, pois, em muitos casos, é vista como técnica hermenêutica - algo compreensível ou levado à compreensão, que busca entender e compreender um determinado texto, através de um processo que envolve arte e método interpretativo; ou seja, prática filosófica que, em parte, recebe pouco interesse de muitos estudantes. Na escola, em seu processo de aprendizagem, a matemática, muitas vezes, é tratada - até mesmo pelos professores - como um conhecimento que pode mensurar a aptidão cognitiva de determinado aluno.

Apesar da sua evidente importância, há uma discussão de que o ensino da Matemática nas escolas brasileiras enfrenta profundas dificuldades. Basta analisar as discussões que são levantadas a partir dos últimos resultados, em 2019, do PISA - *Programme for International Student Assessment*, no qual o Brasil conseguiu a classificação de 57º lugar, entre os 80 países participantes. Tal classificação parece ser um problema diante do investimento e medidas que buscam alcançar um melhor índice, como corroborado pelas ações apresentadas pelo SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica (BRASIL, 2020)[1].

À vista de dados tão importantes e considerados a partir da complexidade visualizada nos mecanismos e processos de aprendizagem da matemática, faz-se necessária uma reflexão em toda a dinâmica que envolve o ensino nos diversos níveis escolares. A aprendizagem, em parte, pode ser analisada por regras básicas tratadas para a mudança de comportamento do aluno, a partir do trabalho do professor ao explorar estratégias diversas para o ensino-aprendizagem da matemática.

Hoje, o foco desse propósito aponta para contextualização do ensino, uso de tecnologias, emprego de materiais didáticos de diversas naturezas, entre outras ações, no sentido de colocar o

[1] *In* http://www.inep.gov.br/. Acessado em 03/03/2020

aluno para compreender o cotidiano a sua volta, a partir dos saberes que aprende na escola. Tais estratégias vêm permitindo que o aluno se aproprie do saber, minimizando a ação dos professores como orientadores de suas ações de ensino da matemática. O propósito é colocar o aluno diante de situações-problema em que ele perceba, como fator natural, o entendimento da complexidade que é a vida humana e sua correlação com a organização social.

Na perspectiva de explorar um ensino de matemática que considere as diversas variáveis envolvidas, encontramos discussões sobre contextualização como proposta que vem valorizar o ensino-aprendizagem (DANTE, 2001; GITIRANA; CARVALHO, 2010), o ensino da matemática a partir de estratégias utilizando recursos computacionais (BORBA, 1996; VALENTE, 1999), através da importância da modelagem matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2000; ALMEIDA; DIAS, 2004; NASCIMENTO, 2007), a partir de saberes e técnicas introduzidos pela Etnomatemática (D'AMBROSIO et al., 2016); ainda neste sentido, destacam-se os estudos que propõem o uso de ferramentas do HQ - História em Quadrinhos (MELO, 2014; SANTOS, 2001), como, também, o uso de jogos e materiais manipulativos no ensino da matemática (BARROS, 2011; GRANDO, 2000; KISHIMOTO, 2008).

Os campos em destaque, citados anteriormente, são de suma importância no sentido de gerar uma fundamentação teórica capaz de assentar a proposição desta pesquisa, que tem como objetivo analisar em que medida o uso de jogos (Torre de Hanói, Salto de Rã, Troca Peças), pode ser estrutura de contextualização para o ensino de matemática.

No estudo, ainda recorremos à estratégia de obtenção de dados, sugerindo ao estudante que usasse recursos tipo HQ como forma de escrita da linguagem matemática para ser melhor entendido, quanto à divulgação de sua fala sobre o conceito de funções.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo desse trabalho é analisar em que medida o uso de jogos, como a Torre de Hanói, o Troca Peças e o Salto de Rã, podem ser estruturas de contextualização para o ensino de funções.

1.1.2 Objetivos específicos

- Analisar situações do ensino de funções, a partir de contextualização com o uso de jogos matemáticos;

- Discutir sobre dificuldades no emprego da linguagem matemática em situações de contextualização ao utilizar jogos sobre o conhecimento de função;

- Analisar se o uso da linguagem matemática, por meio de técnicas de HQ's, permite ao estudante fugir do rigor e melhor apresentar dados que divulguem sua compreensão de saberes sobre funções.

2 Fundamentação teórica

As bases de fundamentação desse trabalho não se fixam em um só saber. Desta forma, trabalhamos em uma conexão de saberes voltada às novas propostas metodológicas e recursos para o ensino da matemática, como também suas tendências. Portanto, estaremos fundamentando o trabalho em discussões sobre história da matemática, saberes da Etnomatemática, os recursos computacionais, a modelagem matemática, processos de contextualização, usos de jogos como materiais didáticos e o recurso de HQ. Toda a abordagem elencou considerações importantes que serviram de suporte, a partir de pesquisas consultadas para enriquecimento do nosso trabalho.

2.1 O ensino de função e a história da matemática

O conhecimento de função é um dos mais importantes na matemática. Primeiro, por ter relação direta com o cotidiano das pessoas; segundo, por ser associado a diversos campos do saber. O tema função, e seu tipo de relação específica no estudo da matemática, se destaca pela necessidade de facilitar a relação com os demais conteúdos matemáticos.

Utilizar os saberes relativos ao entendimento do conceito de função como instrumento e campo de pesquisa é uma abordagem que nos coloca com a responsabilidade de valorizar esse tópico em um estudo de dissertação que explore sobre conexões de saberes, tais como o uso de jogos, contextualização e uso de recursos de HQ.

Na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2010) conceito de função é colocado como um conteúdo a ser iniciado no 9º ano do Ensino Fundamental. Tal abordagem, geralmente tratada de maneira elementar, pode ser entendida apenas pela relação entre duas grandezas, a partir de uma lei que vai estabelecer uma ligação numérica entre seus componentes. Por exemplo, para o cálculo do valor a pagar no abastecimento de combustível em um carro, teremos que considerar o preço por litro e a quantidade abastecida como grandezas, que estarão relacionadas a partir da quantidade de litros solicitados. A relação entre essas grandezas, a partir de uma lei que define o preço a pagar: $p(x) = k.x$, no qual k é o valor do preço por litro e x corresponde a quantidade de litros abastecidos no veículo.

Em um artigo intitulado *O conceito de função no ensino da matemática*, Ponte (1990) identifica o local deste conteúdo na escolarização básica:

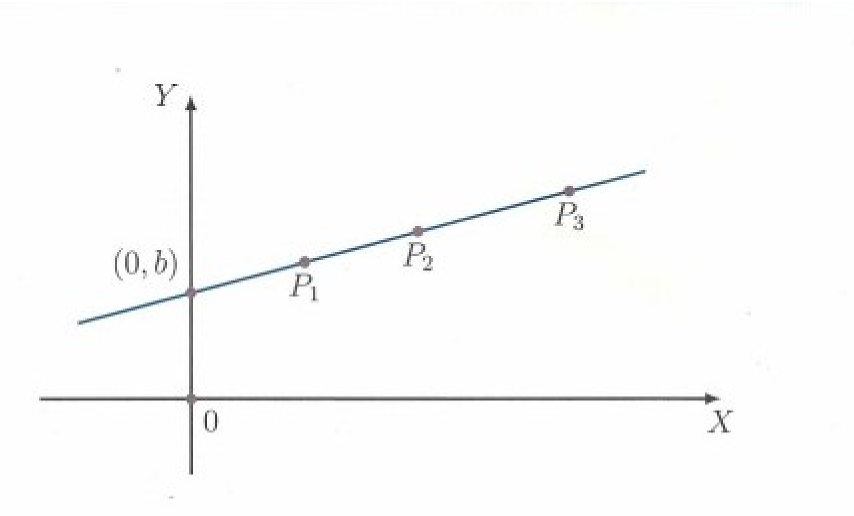
> O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem; b) a generalidade do conceito, e c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências. (PONTE, 1990, p. 6).

No ensino da matemática, o trabalho com funções recebe uma multiplicidade de formas e exemplos para o seu entendimento. Vejamos como Lima 2013 explora uma compreensão da aplicação desse conceito no dia a dia do estudante. Ele propõe um exemplo do cotidiano:

> O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f(x) = ax + b$, onde x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada bandeirada e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado. (LIMA, 2013, p. 92)

Logo em seguida, o autor constrói uma sequência de representações para demonstrar a ação da função em seu aspecto gráfico:

Figura 1 – Representação gráfica da função gerada no exemplo da corrida de táxi



Fonte: Livro didático Números e Funções Reais (LIMA, 2013)

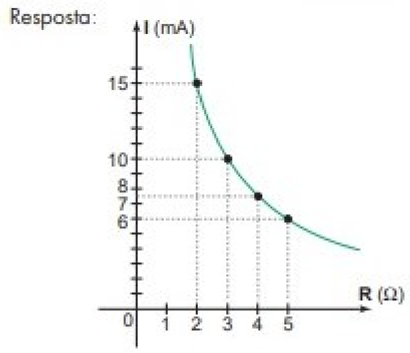
A explicação é apresentada em seguida:

> No caso particular de uma função afim $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma linha reta e como uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta que basta conhecer os valores $f(X_1)$ e $f(X_2)$, que a função afim $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assume em dois números $X_1 \neq X_2$ (escolhidos arbitrariamente) para que f fique inteiramente determinada. (LIMA, 2013, p. 93).

Neste modo de compreensão, um outro exemplo apresentado no livro didático *Matemática: contexto e aplicação*, de Dante (2001), propõe atividades numa relação entre a representação algébrica e gráfica da função:

Figura 2 – Exemplo em forma tabular e gráfica para representar funções

I (mA)	6	7,5	10	15	30
R (Ω)	5	4	3	2	1



Fonte: Livro didático Matemática: contexto e aplicação (DANTE, 2001)

No século XX, Físicos e os Matemáticos trataram de utilizar formas comuns de representações para funções, valorizando o campo algébrico por meio de modelos matemáticos, que deveriam caracterizar a "representação duma dada situação, através de objetos, relações e estruturas com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação" (PONTE, 1990, p. 5)

A noção de função, a partir do seu emprego e relação com vários fenômenos, tornou-se peça chave para uma melhor representação da Matemática, associada aos conhecimentos do cotidiano de diversas áreas científicas, entre outras necessidades representadas por meio da modelagem matemática.

No seu estudo de doutorado, Nascimento (2007) apresenta as possibilidades para novos métodos do ensino de função exponencial, quadrática e afim, por meio da construção de simulações computadorizadas. Segundo o autor:

> No ensino da matemática, a noção de função pode ser explorada de diversas formas. Em situações simples, relacionando uma grandeza a outra (números de litros de gasolina e preço a pagar ou ainda, valor do lado de um quadrado e seu perímetro, entre outros. Uma situação simples também utilizada nos livros didáticos para introduzir essa noção é a utilização de uma máquina de transformação de valores. (NASCIMENTO, 2007, p. 83).

O que o pesquisador tenta divulgar é o fato de que as representações usadas em função, na escola, abrangem apenas modelos considerados como os mais comuns. Não se vê, por exemplo, uma representação ao teorema de Pitágoras, sendo este indicado como uma relação funcional a duas variáveis - claro que a título de curiosidade, para os estudantes. Tal fato mostra que o professor vive preso ao currículo e não explora situações que enriquecem as representações mentais dos estudantes, como:

$$f(c) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nascimento (2007), a partir das pesquisas que realizou, verificou a importância que é dada ao uso dos conceitos matemáticos como: dependência, variação e correspondência, assim como também identificou formas, antigas e modernas, de conceituar as funções que ainda permanecem na educação básica. Sobre a função, o autor citado coloca em cena estudos importantes dos pesquisadores que o subsidiaram na revisão de literatura realizada sobre o tema. Outro fato é que ele também evidencia a diferença entre os livros antigos e os mais recentes, uma vez que, nos primeiros, as funções "são exploradas muitas vezes dentro do aspecto matemático e abstrato [...] alguns livros destacam não apenas o aspecto formal, mas também as situações que mostram as funções como modelo matemático, que podem ser utilizados com situações reais do cotidiano" (NASCIMENTO, 2007, p. 65).

No ensino da matemática, além da diferença entre as formas antigas e recentes supracitadas, também divulga-se distintas maneiras de representá-las, como, por exemplo, as que sugerem o uso de máquinas que processam valores numéricos, a partir de um campo numérico estabelecido para o conjunto a que pertence, seja por meio de representação gráfica e, ainda, pela via de coordenadas cartesianas.

Assim, as formas antigas e modernas do conceito de função, mesmo distintas, possibilitam diferentes vias de acesso ao entendimento desse conteúdo.

Com efeito, a noção de função é observada como uma das mais complexas na Educação Básica. Nascimento (2007) dialoga com vários outros autores sobre o tema para levantar as dificuldades na aprendizagem da função; entre elas, destacam-se a multiplicidade das visões, a variabilidade do conceito dentro de um ambiente estático, a dificuldade na identificação de elementos como imagem, contradomínio e domínio, a dificuldade de identificação dos elementos da função em sua apresentação gráfica, a dificuldade dos estudantes em identificar a tipologia da função, como função constante etc. O trabalho do pesquisador explora o uso de um software Modellus (TEODORO; VIEIRA; CLÉRIGO, 1997) que fornece a compreensão matemática da situação cotidiana apresentada, para análise a partir de dados fornecidos, chegando à compreensão do modelo representativo do cotidiano usado como situação-problema, colaborando com o entendimento do estudante.

Em outro estudo investigativo que foca nas dificuldades observadas no ensino das funções, Oliveira (1997), ao abordar o tema da função, discute sobre a didática utilizada na educação básica. Para ela, o problema está na maneira de não se fazer uso das várias formas de representações utilizadas para função, apontando que os livros didáticos utilizados no País, observados por ela, apresentam "primeiro as funções na sua forma algébrica e depois o seu gráfico, sem fazer o caminho inverso" (OLIVEIRA, 1997, p. 33).

Além dessas questões sobre a importância das diversas representações no ensino de função é possível também perceber que se busca por metodologias diversas, novas abordagens do ensino deste tema.

2.2 Algumas tendências e abordagens do Ensino da Matemática

2.2.1 Etnomatemática

A Etnomatemática surgiu na segunda metade do século passado e, por meio dela, propôs-se uma abordagem interdisciplinar, que seu próprio nome deixa evidente, isto é, a relação entre as ciências humanas e a própria matemática. Fato é que existiam críticas ao currículo de matemática quanto à maneira de apresentação dos saberes próprios e o emprego da matemática com enfoque no social, como retratado por Nunes, Carraher e Schliemann (1989), que discutem sobre uma matemática não apresentada nos livros didáticos, mas presente no dia a dia das crianças e pessoas comuns, a matemática tratada *in loco*, na vida cotidiana de crianças não escolarizadas e que vivem fora do ambiente escolar.

Quanto aos conhecimentos sociológicos e sua aplicabilidade no ensino da Matemática, verifica-se o fato da quebra da relação hierarquizada do professor e do aluno, como discutido por Campos e Nunes (1994), ao observar essa nova relação de diálogo que traz elementos sociais não apresentados nos livros didáticos, no qual se questiona um contrato implícito entre aluno e professor, para que os alunos participem do processo de solução de problemas em Matemática de uma maneira que permita recriar a noção de uma comunidade que examina a validade dos conceitos científicos. (CAMPOS; NUNES, 1994, p. 6).

Ainda neste foco, é preciso pensar na relação com o mundo social dos alunos para uma otimização do ensino da Matemática. Por isso, o apoio dos conhecimentos da Etnomatemática é essencial. Leia-se tal conhecimento como a valorização dos estudos da antropologia aplicados ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos de determinada cultura, levantados por D'Ambrósio (1993) ao destacar que:

> Etnomatemática propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica. (D'AMBROSIO, 1993, p. 6).

A Etnomatemática tornou-se um campo de grande importância às novas tendências do ensino da Matemática, pois a complexa formação cultural do Brasil não permite uma padronização total do ensino; é preciso que se leve em consideração as complexidades culturais que existem no nosso país. Nesse propósito, a Etnomatemática surge como uma via livre de possibilidades, "uma vez que a valorização seletiva de conhecimentos matemáticos, difundidos na cultura, precisa ser reconhecida e enfrentada como uma das formas de alienação dos alunos diante da aprendizagem da Matemática" (CAMPOS; NUNES, 1994, p. 6).

No tocante ao papel do professor, percebe-se que as novas tendências do ensino da Matemática criaram uma distância entre a escola onde o professor foi formado e o propósito de fazer uso de novas experiências pedagógicas que o mundo contemporâneo vem apresentando. Trata-se de um processo de refazer a prática, pois o ensino, atualmente, deveria vir permeado de uma reflexão crítica, e não mais imbuído pela imposição do conteúdo de forma autoritária pelo professor:

> Finalmente, o professor de Matemática precisa também comprometer-se com o ensino crítico da Matemática. A Matemática cria realidades para o indivíduo como, por exemplo, através da escolha social de modelos que determinam o preço de serviços essenciais (como eletricidade) e os índices de inflação. A análise desses modelos que criam realidades é essencial à formação crítica do aluno. (CAMPOS; NUNES, 1994, p. 7).

Além dos avanços propostos a partir da Etnomatemática, verificamos também a inserção de uma Matemática oriunda da crítica que se pode fazer dos saberes informados e selecionados, tais quais 'com que foco', 'para servir a que propósito', entre outros aspectos. Nesse ponto, podemos olhar "Quando se trabalha com a Educação Matemática Crítica, onde é possível mostrar outra face do papel da Matemática na sociedade para o aluno." (GOMES; RODRIGUES, 2014, p. 61). Esse é um ponto de observação para entender o ensino da Matemática no final do século XX, e por meio desse viés é possível compreender relações entre mundo científico e o contexto social.

No livro Etnomatemática – Elo entre as Tradições e a Modernidade, D'Ambrósio (2001) aponta para importância da introdução deste ponto de estudo da matemática no processo de ensino/aprendizagem, tendo como foco o cotidiano do corpo discente:

> A utilização do cotidiano das compras para ensinar matemática revela práticas apreendidas fora do ambiente escolar, uma verdadeira Etnomatemática do comércio. Um importante componente da Etnomatemática é possibilitar uma visão crítica da realidade, utilizando instrumentos de natureza matemática. (D'AMBROSIO, 2001, p. 23)

Portanto, proporcionar no ambiente de aprendizagem um comportamento nos alunos que possa destacar atitudes, compreensão e novas habilidades, próprias do conhecimento matemático e de suas práticas, deve ser implementado, como enfatizado por D'Ambrósio (1993):

> [. . .] o enfoque da Etnomatemática para a matemática, é de implementar a sua utilização nas escolas, proporcionando aos alunos uma vivência que somente faça sentido se eles estiverem em seu ambiente natural e cultural; criar situações variadas que possam despertar e aguçar o interesse e a curiosidade que os alunos possuem naturalmente, para tornara matemática agradável de ser aprendida, tendo como objetivo conectar a matemática ensinada nas escolas com a matemática presente em seus cotidianos. (p.27).

2.2.2 Os recursos computacionais e o ensino da Matemática

Desde o final do século passado, a computação vem tomando conta de diversos aspectos da vida moderna. Claro está que sua influência também se desdobra na educação e, por conseguinte, no ensino da matemática. Segundo Albuquerque e Nascimento (2016, p. 48),

> a computação passou a ser o principal eixo articulador de processos interdisciplinares realizados entre áreas do conhecimento humano. Diversas atividades que envolvem a Computação são requisitadas no ensino de Matemática, sendo uma delas o uso de softwares, para a identificação de conceitos da Geometria de forma prática.

Borba (1996) questiona o uso da informática na educação, visualizando que aquela trará mudanças importantes na educação brasileira. A questão que o autor coloca é no sentido de se ter aberturas de novas perspectivas para o ensino, em vários aspectos. Como destaque, Albuquerque e Nascimento (2016, p. 49) reforçam que "é importante que os profissionais do ensino entendam que o ambiente computacional torna rico o processo de aprendizagem e ensino".

Balacheff (1994) apud Albuquerque e Nascimento (2016, p. 49) discute o valor de um ambiente informático ao considerar que um software permite construções e representações de um saber matemático quando coloca em cena a complexidade que, muitas vezes, resulta desse saber. Portanto, os recursos computacionais, ao proporcionarem representações e significados, permitem o controle, a manipulação e a construção de simulações desse saber matemático, que são importantes para o ensino e a aprendizagem. Nesse ponto de discussão Lévy (1996) concorda que os recursos computacionais trazem várias formas de organização de dados, produção de hipertexto, manipulação de multimídia, entre outras possibilidades de adaptações da cultura tecnológica, no campo educacional.

Percebe-se que a tecnologia da informática, e seus recursos, colocam em cena um conhecimento indispensável para o mundo contemporâneo e, obviamente, traz para a Matemática pressupostos para seu desenvolvimento. Neste sentido, diversos programas de incentivo governamentais, baseados no desenvolvimento da informática, implantados a partir da década de 1980, buscaram colocar a informática dentro da sala de aula, em um processo de modernização dos métodos e ferramentas pedagógicas.

No livro intitulado *Informática e educação matemática*, Borba e Penteado (2001) enumeram a importância e limites de projetos como o EDUCOM (Computadores na Educação), em 1983, o PRONINFE, lançando em 1989 e o PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1997.

Em um artigo que relaciona o pensamento do brasileiro Paulo Freire e do matemático sul-africano Seymor Papert, o professor Renato Soffner (2013) identifica aspectos importantes no uso da tecnologia da informática dentro do processo de ensino-aprendizagem:

> Para Papert, os computadores podem gerar inúmeras formas de representação, diferentemente dos artefatos materiais e analógicos. Sua essência é universal, inclusive seu poder de simulação. Seu modelo epistemológico compartilha a conotação de aprendizagem como sendo a construção de estruturas de conhecimento, independentemente das circunstâncias deste aprendizado. (SOFFNER, 2013, p. 151-152).

Sem dúvidas, pensar no uso da informática como uma potencialidade no ensino da função pode trazer inúmeras benesses ao processo de ensino de um tema tão complexo. Além de utilizar a capacidade de fazer cálculos e padrões matemáticos, inerente a esta tecnologia, o uso do computador pode agregar aspectos da vida cotidiana dos alunos neste processo.

Ao responder o ‘porquê’ e ‘como’ da utilização desta tão nova quanto importante tendência do ensino da Matemática, Barbosa (2004a) enfatiza o poder do espaço de debate, da investigação, da problematização dos conteúdos da matemática em uma dinâmica de sala de aula verdadeiramente dialógica.

2.2.3 Modelagem no Ensino da Matemática

Além da irresistível tendência do uso da Tecnologia da Informação na sala de aula, outra tendência importante é a Modelagem Matemática, que se trata de:

> Uma arte de expressar, por meio da linguagem matemática, situações-problema reais. É um modo diferente de ver a Matemática e consiste na arte de tornar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los por meio da interpretação das suas soluções, na linguagem do mundo real. (GOMES; RODRIGUES, 2014, p. 62)

A Modelagem figura como uma usual tendência no ensino da Matemática, sendo entendida no contexto da educação da disciplina como:

> Um estudo matemático acerca de um problema não essencialmente matemático, que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos para analisar o problema em estudo, pode ser vista como uma alternativa para inserir aplicações da Matemática no currículo escolar sem, no entanto, alterar as formalidades inerentes ao ensino. (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 20)

Além da apreensão de uma percepção da lógica matemática no contexto da vida social, outro valor dado à Modelagem reside no olhar dos pesquisadores, como apontado por Nascimento (2007, p. 38-39) ao citar uma descrição de Barbosa (2001, p. 1) que nos reporta às concepções de algumas pesquisas sobre como enfatizar a atividade de modelagem. Dessa forma, o foco tem relação quanto aos campos de investigação de cada pesquisador, como enumerado a seguir:

1. Bassanezi (2002) analisa a obtenção dos modelos;

2. D'Ambrósio (1993) e Orey (2000), quando discutem a relação entre Etnomatemática e Modelagem, a tratam como ação pedagógica;

3. Borba, Meneghetti e Hermini (1997) destacam a participação do aluno no processo de aprendizagem ao utilizar essa técnica;

4. Barbosa (2001) discute a compreensão crítica que pode ser trabalhada pelo aluno na aplicação do conhecimento matemático em situações-problema da realidade e o desenvolvimento de habilidades intelectuais nos educandos;

5. Bean (2001) destaca que a modelagem matemática vai exigir habilidades de raciocínio as quais diferem das mobilizadas em resolução de problemas típicos, e, "portanto, é recomendável que ela seja incorporada no ensino e na aprendizagem de matemática". Neste mesmo sentido, Franchi (1993) utilizou um problema "dirigido" para sistematizar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Ela problematizou um artigo de jornal com os alunos para abordar conteúdos programáticos de Estatística.

6. Biembengut & Hein (2000) preocupam-se em enriquecer o conhecimento da técnica de modelagem, tratando-a como metodologia voltada para o ensino. Suas pesquisas apresentam algumas situações reais, em que se formulam modelos matemáticos, como por exemplo, o tipo de embalagem ideal para um produto, levando-se em consideração algumas questões: que tipo de material se presta à embalagem do produto, que quantidade mínima deverá ser utilizada, qual a relação custo benefício para a elaboração da embalagem, entre outras.

2.2.4 A prática de Resolução de Problemas

Outra temática de tendência importante é a da Resolução de Problemas, considerada uma das mais utilizadas no contexto contemporâneo.

Buscando focar na problemática da resolução de problemas, Onuchic (2012, p. 9) discute sobre "como ela pode se tornar um componente integrante do currículo, ao invés de ser tratada separadamente como um tópico, muitas vezes até mesmo negligenciado", e destacaram English, Lesh e Fennewald, (2008) quando exploraram as seguintes questões:

- Qual é a natureza da resolução de problemas em várias áreas do mundo de hoje?
- Quais perspectivas orientadas para o futuro são necessárias sobre o ensino e aprendizagem de resolução de problemas incluindo um foco no desenvolvimento de conceitos matemáticos através da resolução de problemas?
- Como podem os estudos de hábeis resolvedores de problemas contribuir para o desenvolvimento de teoria que possa guiar projetos de experiências de aprendizagem que valem a pena?

- Por que modelos e perspectivas de modelação são uma poderosa alternativa para as visões existentes sobre resolução de problemas? (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008, p. 6).

Onuchic (2012) argumenta que esses estudos apontam para um avanço no Campo da Pesquisa em Resolução de Problemas e, também, no Desenvolvimento Curricular a partir dos subitens intrínsecos à resolução de problemas, tais como: A Natureza da Resolução de Problemas do Mundo de hoje; Perspectivas Orientadas para o Futuro sobre o Ensino e a Aprendizagem de Resolução de Problemas; Estudos de Habilidades em Resolução de Problemas e suas Contribuições para o Desenvolvimento de uma Teoria; Desenvolvimento da Teoria: uma Perspectiva de Modelos e Modelação sobre o Desenvolvimento de Resolução de Problemas na escola e além dela.

Nessa perspectiva, Dante (1998) destaca que, apesar da euforia no uso dessa tendência que hoje vem sendo tratada como metodologia de ensino da matemática, percebe-se a dificuldade em ser explorada pelos professores, pois, apesar de tão valorizada, a resolução de problemas coloca os alunos a executarem os algoritmos que são ensinados, mas não conseguem resolver o problema da forma como são apresentados nos livros didáticos, simplesmente como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados. (DANTE, 1998, p. 8).

Assim, percebemos que as propostas metodológicas buscam estar conectadas às novas tendências - ou surgem delas -, e se propõem a ser um novo cenário para a matemática escolar, seja no uso e desenvolvimento de jogos matemáticos, uso de recursos computacionais, no resgate a Etnomatemática, como, também, no uso de vários artefatos neste processo de ensino/aprendizagem da resolução de problemas diversos e que aparecem na vida cotidiana do estudante.

Levando em conta o caderno dos PCNs (BRASIL, 1998) sobre a relação interdisciplinar que a matemática se vê inserida, não se percebe que ela propõe uma hierarquização entre as disciplinas, pois agora atua como participante, quando outrora o ensino da Matemática era visto como hegemônico. Com a inclusão dos temas transversais, houve uma melhor adaptação das disciplinas do currículo escolar. Este enfoque do papel da Matemática no ensino escolar valoriza as novas tendências da educação matemática, fugindo dos aspectos conteudistas e procedimentais.

Neste sentido, os PCNs (BRASIL, 1998) destacam a abertura que é dada às novas possibilidades do ensino da Matemática, no qual reformas são observadas, no intuito de atender às necessidades do mundo contemporâneo e o papel da matemática neste contexto.

2.3 A valorização da contextualização no ensino da matemática

Buscando o entendimento da palavra ‘contexto’, observamos que ela tem sua etimologia firmada no Latim e significa: “A relação de dependência entre as situações que estão ligadas a um fato ou circunstância”[2]. Quer dizer, dentro do ambiente escolar, o contexto seria a relação de diálogo entre o conteúdo abordado em sala de aula com as circunstâncias que performam a vida social em um dado momento histórico. No entanto, Barbosa (2004b) discute que o termo contextualização tem sido usado sem o devido cuidado, pois, para ele, o conhecimento matemático já é contextualizado, dando ao termo um alcance mais distante que envolve a própria matemática e suas relações.

Spinelli (2011, p. 28), no seu estudo de tese de doutorado, defendida na Universidade de São Paulo, acerca da contextualização no ensino de matemática, procura deixar claro a importância deste tipo de perspectiva para uma transformação do próprio ensino da matemática:

> Tornou-se frequente a argumentação, em várias estâncias, a respeito da necessidade da contextualização do ensino em todos os segmentos de ensino. Farta também é a argumentação que imprime à ausência de contextualização boa parcela da responsabilidade do aprendizado deficiente dos alunos em Matemática. O significado maior da contextualização, visto sob o prisma do senso comum, diz respeito unicamente à condução dos conteúdos matemáticos em direção às suas aplicações cotidianas e imediatas. (SPINELLI, 2011, p. 28)

Os PCNs (BRASIL, 1999) propõem a introdução da contextualização enquanto uma perspectiva que deve ser praticada na pedagogia escolar:

> O professor, considerando a multiplicidade de conhecimentos em jogo nas diferentes situações, pode tomar decisões a respeito de suas intervenções e da maneira como tratará os temas, de forma a propiciar aos alunos uma abordagem mais significativa e contextualizada. (BRASIL, 1999, p. 44).

É a partir do final do século passado que esta perspectiva começa a ganhar espaço no pensamento pedagógico, exigindo o aparecimento de aspectos sociais que envolvem qualquer tipo de conteúdo escolar:

> Contextualizar implica estabelecer uma relação dinâmica, dialética e dialógica entre contexto histórico-social-político e cultural e o currículo como um todo, concebido como um processo em constante construção que se faz e se refaz. O que se quer afirmar com a contextualização do currículo é que ele seja o veículo, o interlocutor dos saberes locais, com os saberes globais, que seja visto como campo de transgressões e que permita a possibilidade de criação. (MENEZES; ARAUJO, 2007, p. 38-39).

[2] *In* https://www.dicio.com.br/contexto/ acesso em 10/03/2020

De fato, se for levado em conta os fatores sociais que envolvem a vida escolar, será possível que se adeque os conteúdos abordados em sala de aula ao cotidiano e à vida prática dos estudantes. Desta forma, se configura um cenário em que se poderia tornar possível a verdadeira articulação entre teoria e prática, baseada nos conteúdos matemáticos. No entanto, como afirmam Gitirana e Carvalho (2010), o ensino da matemática ainda carrega muito dos aspectos do ensino tradicional, isto quer dizer que não apresenta uma preocupação devida no que concerne à autonomia do estudante.

> Muitas vezes, essa transmissão de conteúdos é feita com apoio de exercícios resolvidos. Segundo a concepção de aprendizagem que está por trás dessa metodologia, é por meio do treinamento de procedimentos e da repetição de noções que o aluno irá interiorizar o conhecimento matemático. (GITIRANA; CARVALHO, 2010, p. 32).

Nascimento (2018, p. 133) destaca que o processo de execução da contextualização é ainda um cenário difícil na prática. Para ele:

> No ensino básico da Matemática, apesar de existir diversas metodologias que podem ser utilizadas no sentido de minimizar as dificuldades de aprendizagem, ainda se discute um ponto comum, que é como operacionalizar boas estratégias de ensino aprendizagem para os estudantes (BORIN, 1996; FLAVELL, 1976; SKOVSMOSE, 2001). Esse problema, relativo ao ensino de Matemática, pode estar relacionado a uma ausência de contextualização, recurso usado no ensino aprendizagem para verificação, validação e compreensão do uso do conhecimento matemático.

Uma proposta que envolve outras formas de contextualização, além do contexto matemático no ensino, exige do professor saberes próprios do assunto que estará correlacionando ao tema da aula, como também as estratégias que serão possíveis utilizar; ou seja, suas sequências didáticas, o uso de recursos tecnológicos, as pesquisas em material didático e o uso do livro com textos que possam fazer o diálogo entre o conteúdo e o tema da aula, para que os alunos possam se apropriar dos saberes envolvidos de modo significativo.

Nascimento (2018, p. 134) levanta uma questão quanto à presença de uso de contexto em atividades de livro didático. Segundo ele, os estudantes desprezam esse envolvimento, se preocupando apenas com a formalidade da matemática, não há um trabalho didático voltado a essa questão. Tal fato minimiza a presença do contexto na atividade proposta, destacando que:

> A questão da existência de dificuldade de valorização do contexto reside no fato de que muitos problemas propostos nos livros didáticos, oferecidos aos alunos, buscam trabalhar uma Matemática a partir de situações que lhe dê um significado da realidade vivenciada, ou seja, uma forma de contextualizar, mas esse processo é tratado pelo aluno unicamente valorizando os procedimentos que precisa aplicar, ele muitas vezes descarta o contexto que na situação é evidente, ficando preocupado puramente com os processos matemáticos exigidos, de forma que a força do contexto oferecido não é muito significativa, sendo esse um ponto que deve ser discutido quanto ao uso de contexto na Matemática.

Nossa pesquisa busca viabilizar o uso de contexto utilizando material didático manipulativo, ou seja, uso de jogos, que configura uma prática bastante aceita pelos estudantes. Segundo Gitirana e Carvalho (2010), o jogo, enquanto recurso didático, apresenta esta dimensão de diálogo e do lúdico, que possuem a capacidade de prender o estudante ao processo educativo, posto que "além de valorizarem o aspecto lúdico da aprendizagem, os jogos têm papel importante na integração da criança ao contexto escolar" (GITIRANA; CARVALHO, 2010, p. 35).

Sendo assim, a proposta do nosso estudo de dissertação busca articular o contexto proporcionado pelos jogos matemáticos com suporte na História em Quadrinhos, no intuito de melhor entender como os estudantes trabalham o conceito de função, uma vez que o conteúdo de função parece enriquecer os aspectos da vida social dos estudantes.

2.4 O uso do recurso do HQ no ensino de matemática

Esta seção discute o desenvolvimento histórico das Histórias em Quadrinhos (HQ) como recurso para o trabalho metodológico de ensino de funções a partir do uso de jogos. Nesse sentido, faremos uma breve apreciação desse recurso que será utilizado no estudo de dissertação proposto.

Iniciamos com uma definição genérica deste tipo de manifestação artística e como tal recurso vem sendo explorado no ensino escolar básico. Nosso propósito é utilizar o HQ como recurso para facilitar o processo de contextualização do ensino de matemática, especificamente o ensino de funções, a partir da metodologia de jogos matemáticos, buscando a compreensão necessária para discutir as dificuldades de aprendizagem.

Na literatura, a História em Quadrinhos, comumente chamada pela sigla de HQ, é um tipo de narrativa que engloba a linguagem verbal e a linguagem imagética. Nesta espécie de arte visual, confluem os mais diversos gêneros - do terror ao gênero didático, do pornográfico à história de ação. Guimarães (1999) define este tipo de arte e a insere na antiga tradição das Artes Visuais como uma forma:

> [...] de expressão artística distinta, cuja origem se encontra no início do desenvolvimento cultural da raça humana, muitas vezes misturando-se a outras formas de expressão também embrionárias, e cujo conceito compreende um conjunto de produtos artísticos muito mais amplo do que o tipo de HQ mais comum explorado pela indústria cultural (GUIMARAES, 1999, p. 12)

O HQ não se resume aos gêneros mais utilizados e nem mesmo sua origem está resumida ao mundo contemporâneo, quer dizer, trata-se de uma possibilidade de expressão muito antiga, quando, desde o final da Pré-História, articula a linguagem verbal com a escrita.

Exemplos deste fato são os murais egípcios, que já contavam com uma relação entre essas duas linguagens, numa justaposição entre hieróglifos e pinturas para narrar as histórias dos deuses e faraós. Na Idade Média, as imagens gráficas (iluminuras) serviam para ilustrar as passagens bíblicas e eram utilizadas não só para adornar os manuscritos, mas também para fazer a relação entre escrita e imagem em um mundo onde os cristãos eram, na sua maioria, considerados analfabetos para o entendimento da escrita.

A relação entre linguagem verbal e a imagéticas sempre foi constantemente utilizada ao longo da História, nas diversas culturas, como um recurso de comunicação. Foi a partir do século XIX que os HQ's ganharam cada vez mais espaço no campo das Artes Visuais e sua aparição ficou relacionada somente com o gênero da comédia. Dessa compreensão, segundo Gama e Omena (2011) discutem que:

> A palavra "Comics", deriva do inglês Comic (engraçado), pois os primeiros quadrinhos eram em sua maioria relacionados à comédia. Alguns defensores das "origens" dos Comics dizem que, encadernado e editado semanalmente, teríamos um marco fundamental com *The Yellow Boy* ou *O Menino Amarelo* em 1895, um dos primeiros quadrinhos a serem publicados em Nova Iorque, por Richard Fenton Outcault. [...] Houve alguns outros mais antigos, porém de pouca penetração em relação aos consumidores. Foram eles: Topffer, em 1840 e Wilhelm Busch, respectivamente, um suíço e um alemão. (GAMA, 2011, p. 4).

No século XIX, o HQ se expande através da cultura japonesa, passando a ser conhecido como Mangá, e, dessa vez, adentra de uma vez por todas as fronteiras da cultura brasileira:

> Os primeiros quadrinhos japoneses que chegaram ao Brasil foram, provavelmente, aqueles lançados por pequenas editoras, que começaram a publicar versões piratas de HQ's eróticas japonesas ainda nos anos 80. Em 1988, a Cedibra lançou Lobo Solitário (GRAVETT, 2004, p. 11)

Sendo assim, esta intersecção entre linguagens começou a ser usada dentro de uma perspectiva pedagógica, sendo este um ponto que esta dissertação pretende explorar como forma de facilitar uma proposta de contextualização do ensino da Matemática, no sentido de perceber uma leitura mais ampla dos HQ's, isto é, para além do seu uso meramente comercial.

Um destaque que pode ser dado a importância dos HQ's são os trabalhos:

- O uso pedagógico de histórias em quadrinhos no ensino de Matemática, de Patrícia Peripolli e Cláudia Barin (2018);
- A sistematização do conhecimento matemático através das histórias em quadrinhos, de Ricardo Anchieta e Lígia Pantoja (2016);
- O uso e exploração de dois aplicativos de celulares, comicspanel e stripcreator: uma experiência realizada no ensino de Matemática, de Terezinha de Oliveira e Carmem Amaral (2019);
- Histórias em quadrinhos: algumas conexões com a Matemática, de (CORDEIRO; CARDOZO; SILVA, 2019);

- Um diálogo das teorias curriculares com a história da matemática em quadrinhos de Santos e Rodrigues (2016).

Os trabalhos acima apresentados apenas atestam um espaço cada vez maior do uso de HQ como nova perspectiva para o ensino da matemática, ao utilizar as diversas disposições discutidas nos documentos oficiais de orientação pedagógica, com destaque OCN, PCN, BNCC, Gitirana (2010), Bittar e outros. A seguir, apresentamos uma ilustração de um HQ, referente ao uso de instrumento de medição:

Figura 3 – Uso da História em Quadrinhos em livros didáticos como instrumento de mediação

Fonte: História em Quadrinho de Maum Britto em livro de Matemática [3]

Realizando uma busca na plataforma do '*Google Acadêmico*', utilizando os termos HQ + Ensino + Matemática, são encontrados 3.780 textos acadêmicos como resultado. Outro ponto importante é que os trabalhos, em sua maioria, datam do século XXI, deixando claro que o HQ venceu as barreiras acadêmicas e mercadológicas para se tornar uma rica experiência de recurso pedagógico.

Neste sentido, nosso estudo de dissertação faz uso desse recurso como instrumento auxiliar para o ensino e compreensão de funções, através da metodologia de jogos matemáticos. Assim como a Figura 3, apresentada anteriormente, representa uma transposição do texto em HQ para o livro, ao explorar seu aspecto gráfico e verbal para explicação de conteúdos matemáticos. Vejamos outro exemplo abaixo:

[3] Matemática: livro do estudante: ensino fundamental / Coordenação: Zuleika de Felice Murrie. — 2. ed. — Brasília: MEC: INEP, 2006, p. 105.

Figura 4 – Uso de HQ para explicar conteúdos matemáticos em livro didático

Fonte: Livro didático Praticando Matemática (ANDRINI, 2012, p. 192)

É com esse propósito que procuramos inserir um tópico específico para a discussão que trata do uso de HQ como recurso didático, destacando a necessidade desse instrumento que a cada dia torna-se comum na prática pedagógica.

3 A metodologia do uso de jogos no ensino de matemática

Na proposta deste estudo, tem destaque o uso de 03 (três) jogos matemáticos, os quais são ferramentas importantes na busca de saberes sobre ensino- aprendizagem de funções, e serão discutidos nesse trabalho.

3.1 A Torre de Hanói

A Torre de Hanói tem no seu uso a valorização do conhecimento matemático, especificamente funções. Tratada como jogo matemático, foi, segundo Machado (2006), idealizado em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O jogo tem fundamentos-base no mito indiano que:

> [. . .] segundo o qual o centro do mundo encontrar-se-ia sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Nesse centro, haveria uma placa de latão onde estariam fixados três pinos de diamante. Ao criar o mundo, Brahma teria colocado em um desses pinos sessenta e quatro discos de ouro, apoiados uns sobre os outros, com diâmetros decrescentes, estando o maior junto à placa que serve de base e o menor no topo da pilha. Esta seria a Torre do Brahma. (MACHADO, 2006, p. 13).

A Torre de Hanói é um jogo que, desde longas datas, vem sendo discutido entre professores e pesquisadores e, hoje, é bastante utilizado como material didático. Geralmente é utilizado de forma individual, buscando verificar o raciocínio usado pelo aluno diante do desafio de transpor as peças do jogo de um pino extremo a outro.

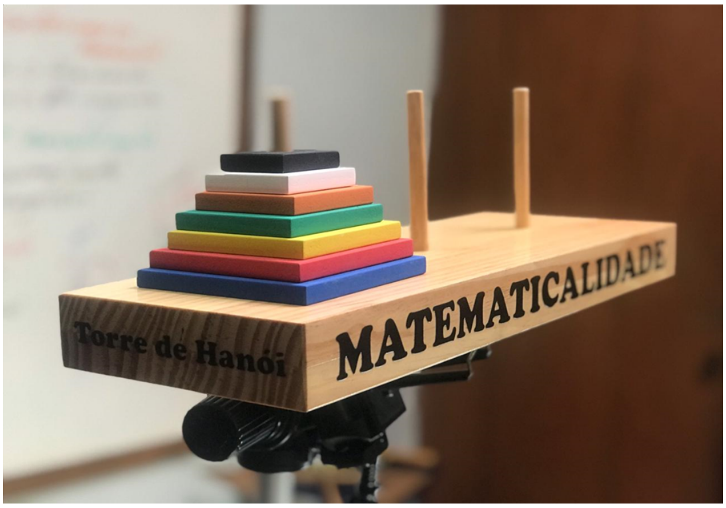
O jogo é constituído por uma plataforma com três pinos equidistantes que recebem sete discos de tamanhos diferentes (perfurados no seu centro e com diâmetro em valor crescente), conforme Figura 5.

O objetivo do jogo é transpor o conjunto dos sete discos do primeiro pino ao terceiro. O empilhamento dos discos nos pinos deve obedecer às seguintes regras:

- Só é permitido mover um disco por vez;
- Um disco menor não pode ficar embaixo de um disco maior em cada jogada;
- Só podemos mover o disco que está por cima dos demais, em cada torre de peças;

O jogo pode ser manuseado de forma livre, em forma de desafio, de modo que o manipulador consiga transpor todas as peças em um menor número de jogadas.

Figura 5 – Tabuleiro do jogo Torre de Hanói



Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

Nessa estratégia de uso não se busca mobilizar os diversos conteúdos matemáticos envolvidos, mas apenas deixar o usuário fazer descobertas.

Através de uma prática mais direcionada, pode-se observar que é possível identificar que o movimento das peças obedece a uma ordem sequencial. Em um artigo intitulado O jogo Torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos, Oliveira e Calejón (2016) apresentam os passos do jogo em uma representação matemática, descritos por meio de um quadro, evidenciando uma função matemática:

quadro 1 – Valores relacionados à quantidade de movimento de cada peça do jogo

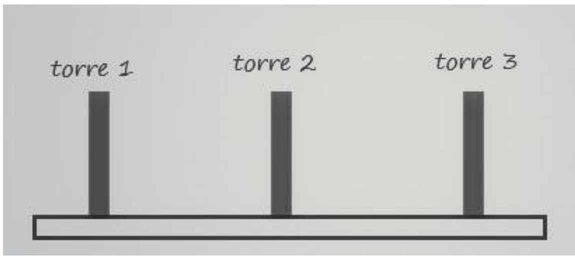
Quantidade de discos das torres	Quantidade de movimentos de cada peça							Total de movimentos
	Pç. 1	Pç. 2	Pç. 3	Pç. 4	Pç. 5	Pç. 6	Pç. 7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127

Fonte (OLIVEIRA; CALEJON, 2016, p. 154)

Percebe-se no quadro que é possível identificar algumas relações e saberes matemáticos envolvidos como a proporção do aumento do número de peças usadas no jogo, relacionada com o aumento do total de movimentos dessas peças manipuladas no jogo. Neste ponto, já é possível fazer uma introdução ao conhecimento de sucessão, relação proporcional do número de jogadas e número de peças, conceito de função, representação de um triângulo gerado pelo movimento das peças, entre outros... Tais saberes já são de grande importância em um trabalho direcionado e com objetivos pré-definidos. O jogo oferece ao aluno a possibilidade de pesquisar a lei que mantém a sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...), que, no caso, indica a representação de uma progressão geométrica de razão 2, onde, a depender do trabalho didático do professor, poderá, ainda, solicitar a expressão algébrica ou gráfica do modelo, colocando o uso do jogo como essencial para o entendimento do conceito de P.A. e P.G., baseado no modelo funcional.

Na prática do jogo, a descrição matemática é colocada em cena a partir da lei que é estabelecida para o manuseio correto do jogo. Em um exercício dirigido, o estudante que trabalha o conceito de função chega a entender que a lei de formação (modelo), tem a seguinte representação: $f(n) = 2n - 1$, levantando o conceito de função exponencial, no qual n indica quantidade de discos colocados entre os três pinos. Ou seja, a cada movimentação dos discos, a quantidade de movimentos destes cresce em uma P.G., cuja sua razão é 2, onde o primeiro termo é igual a 1. O número de movimentos de uma das torres com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com $n - 1$ discos adicionados de um movimento. Esta equação deverá ser construída no mesmo processo em que a lógica do jogo é apresentada, gerando, como já dito, uma progressão geométrica. Vejamos:

Figura 6 – Ilustração do tabuleiro do jogo Torre de Hanói



Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

Figura 7 – Sequência decorrente do movimento das peças no jogo Torre de Hanói

Sequência decorrente da ordem das peças movimentadas

Uma peça (1) → 1

Duas peças (1, 2) → 1, 2, 1

Três peças (1, 2, 3) → 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1

Quatro peças (1, 2, 3, 4) → 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1

Cinco Peças (1, 2, 3, 4, 5) → 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor quadro 2 – Movimentos do jogo. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Torre de Hanói

PEÇAS	MOVIMENTOS
1 peça	1 movimento
2 peças	3 movimentos
3 peças	7 movimentos
4 peças	15 movimentos

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

quadro 3 – Movimentos do jogo. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Torre de Hanói

$a_{1=1}$	$+2=2^1$
$a_{2=3}$	$+4=2^2$
$a_{3=7}$	$+8=2^3$
$a_{4=15}$	$+16=2^4$

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

Figura 8 – Demonstração de fórmula por recorrência para o movimento das peças do jogo, que gera uma Progressão Geométrica de razão 2

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 2^1$$
$$a_3 = a_2 + 2^2$$
$$a_4 = a_3 + 2^3$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2^{n-2} \qquad +$$
$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$
$$a_n = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + (\ldots) + 2^{n-1}$$
$$a_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + (\ldots) + 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1.(2^n - 1)}{2-1}$$
$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

E, para tal, utilizou-se a fórmula da soma dos termos da P.G abaixo. Vejamos:

$$Sn = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1}$$

No jogo, o professor pode viabilizar as diversas compreensões matemáticas que são pouco discutidas nos trabalhos acadêmicos sobre a Torre de Hanói. Por exemplo, buscar saberes se há relação entre o triângulo da torre de Hanói e o triângulo de Pascal; o triângulo da torre de Hanói e o triângulo de Sierpinski e o triângulo da torre de Hanói com o triângulo de Leibniz.

quadro 4 – Representação do triângulo de Hanói

Nº de discos	Triângulo formado pela quantidade de movimento de cada peça do jogo torre de Hanói							Nº de Movimentos das peças
	p1	*p2*	*p3*	*p4*	*p5*	*p6*	*p7*	
1	**1**							1
2	**2**	**1**						3
3	**4**	**2**	**1**					7
4	**8**	**4**	**2**	**1**				15
5	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**			31
6	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**		63
7	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	127

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

Tais pontos sugeridos podem incrementar o entendimento das leis, assim como das possibilidades envolvidas e geradas a partir do jogo, valorizando a representação de saberes matemáticos históricos, colocando o estudante como um pesquisador.

3.2 O Salto de Rã

Assim como a Torre de Hanói, um outro jogo que foi selecionado para nossa pesquisa, e que podemos estudar seu uso pedagógico direcionado a conteúdos matemáticos, é o Salto de Rã. Embora este jogo não seja tão conhecido e explorado quanto o primeiro, oferece uma rica possibilidade para seu uso no estudo de sequências, compreensão de lógica matemática e da noção de função.

Ao analisar o uso do jogo Salto de Rã como ferramenta pedagógica, Barros (2011) aponta, na sua dissertação de mestrado, a importância desta experiência lúdica no ensino da matemática. Embora seu trabalho tenha o foco centrado no ensino superior, a proposta de trabalho pode ser estendida a educação básica. Para ele:

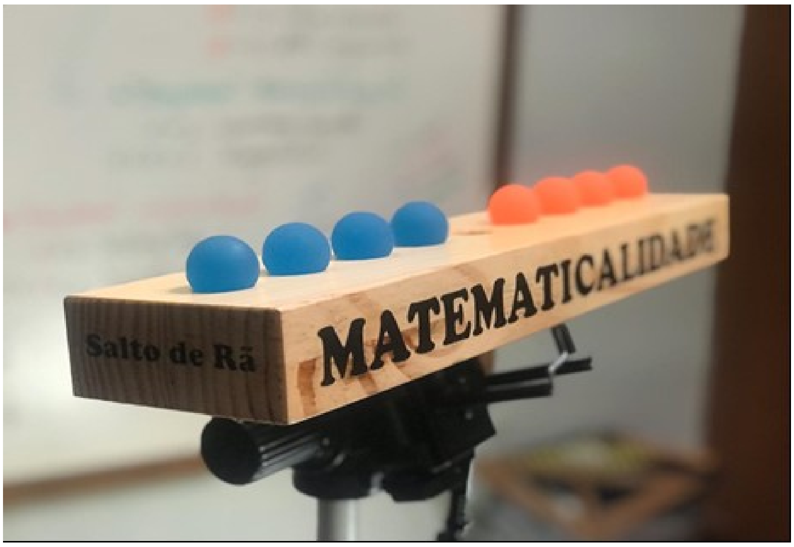
> O Salto de Rã é um jogo rico, que pode ser aplicado nos três níveis de ensino. No ensino fundamental, desde os anos iniciais, os alunos mobilizam contagem, sequência de formação de jogadas e preenchimento de tabelas com os valores de

> movimentos obtidos a partir do número de peças em cada um dos dois grupos (BARROS, 2011, p. 34)

Em artigo chamado *O jogo Salto da Rã como instrumento auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da função quadrática*, Franco *et al.* (2019) apresentam uma caracterização do jogo:

> é construído a partir de um tabuleiro plano com um número ímpar de casas e um número par de peças, que podem ser confeccionados em cartolina. As peças são divididas em dois grupos de mesma quantidade, mas com cores diferentes, distribuídas inicialmente como indicado na ilustração a seguir. O jogo requer apenas um jogador (FRANCO et al., 2019, p. 85).

Figura 9 – Tabuleiro do jogo Salto de Rã



Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

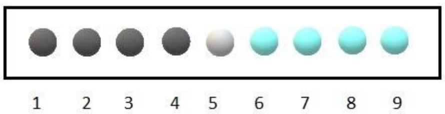
As regras do jogo Salto de Rã são bem simples:

- Cada casa só contém uma peça;
- Cada peça poderá ser movida somente em uma direção, dependendo de sua lateralidade (esquerda/direita). Se estiver à esquerda, moverá para direita. Se estiver à direita, moverá para esquerda;
- Após o movimento de uma peça, não poderá voltar à posição anterior;
- Só é permitido mover uma peça para uma casa vazia;
- Não se pode pular peça da mesma cor;
- Não se pode pular mais de uma peça por vez;

- O objetivo do jogo é inverter a posição das peças (pretas para a posição inicial das brancas e vice-versa).

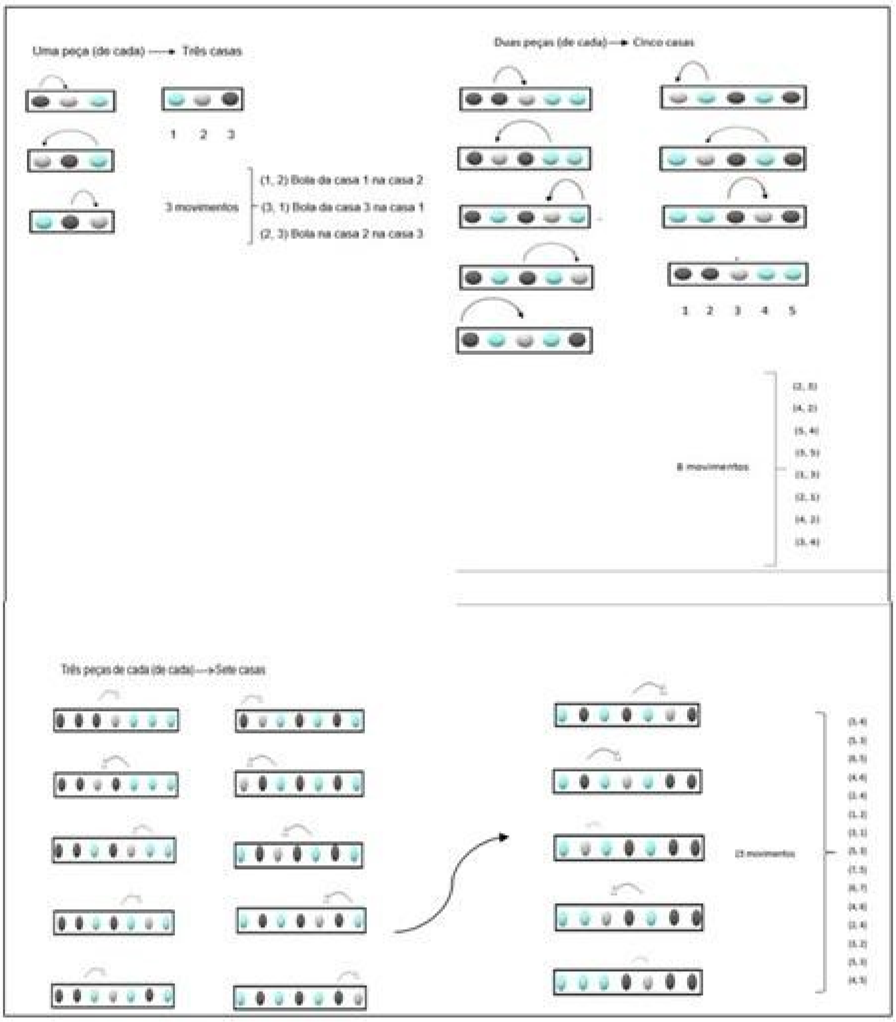
Na lógica do jogo, cada bola de gude represente uma rã que deve “saltar” por sobre seu oponente de cor distinta. O jogo permite visualizar o conceito de funções a partir de uma estratégia de raciocínio que o aluno terá que construir para transpor o obstáculo a enfrentar, pois estará diante de um desafio que requer a construção de um modelo matemático para a situação em que o jogo o coloca. Vejamos como funcionaria a movimentação do jogo:

Figura 10 – Ilustração do tabuleiro do jogo Salto de Rã



Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Figura 11 – Movimentos do jogo indicando uma sequência decorrente do posicionamento das peças no jogo Salto de Rã



Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

quadro 5 – Movimentos dos jogos. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Salto de Rã

PEÇAS	MOVIMENTOS
1 peça	3 movimentos +5
2 peças	8 movimentos +7
3 peças	15 movimentos +9
4 peças	24 movimentos +11
(...)	

Números ímpares

Fonte: Material do trabalho de pesquisa do Autor

Do ponto de vista matemático, o jogo mobiliza a noção de função polinomial de segundo grau que está associada ao número de lances de uma cor de rã. Desta forma, é possível compreender o padrão matemático que rege os movimentos das peças, chegando à compreensão matemática que define a estrutura e a lógica do jogo. O passo a passo do jogo também pode ser ilustrado (Figura 12) sendo executado por um estudante, conforme descrito no modelo de Menezes (2008, p. 48) a seguir:

Figura 12 – Movimentos de solução do jogo Salto de Rã

passo, duas peças de cor contrária darão pulos; segue-se este raciocínio sendo que, após uma peça dar um passo, as peças de cor contrária darão um pulo a mais que no caso anterior. Assim, indicando um passo por Pa e um pulo por Pu, o número de jogadas será:

$$1Pa + 1Pu + 1Pa + 2Pu + ... + 1Pa + nPu = n\ Pa + (1 + 2 + ... + n)\ Pu$$

Para a contagem de movimentos no restante do jogo, quando a única peça que pode se mover dá um passo, as outras (n-1) de mesma cor dão pulos; apenas uma peça de cor contrária dará um passo e as outras de sua cor darão pulos, de modo que o número de movimentos será:

$$1Pa + (n-1)\ Pu + 1Pa + (n-2)Pu + ... + 1Pa + 1Pu + 1Pa = nPa + [(n-1) + (n-2) + ... + 1]Pu.$$

Somando os movimentos, teremos um total de:
$2nPa + \{ (1 + 2 + ... + n) + [(n-1) + (n-2) + ... + 1] \}\ Pu.$

Ora, a soma

$$\frac{n.(n+1)}{2} + \frac{(n-1)\ n}{2}$$

dará n^2. Assim, como um passo ou um pulo são movimentos, o número mínimo de movimentos do jogo será obtido somando o número de passos com o número de pulos, o que dará

$$2n + n^2.$$

Observemos que aumentando em uma unidade o número de peças de cada grupo, aumentará $1Pa + (n+1)Pu$ na primeira parte do jogo e, no restante, aumentará $1Pa + nPu$, totalizando um aumento de $2Pa + (2n+1)Pu$ ou $(2n+3)$ movimentos.

Fonte: Menezes (2008)

O quadro 6, que segue abaixo, representa a construção numérica que descreve a lógica funcional do jogo. Observamos três pontos aleatórios onde as coordenadas nos eixos x e y são substituídas na equação $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obter a função: $f(x) = x^2 + 2x$, onde o número de peças em cada lado (x) e $f(x)$ seja representado como o número de movimentos necessários para mover todas as peças, quer dizer, todas as rãs, dentro da ficção do jogo:

Através da Linguagem matemática oferecida no quadro 6 e da Figura 13 é possível perceber a importância da contagem das casas e dos movimentos realizados pelo jogador, daí a pertinência da introdução de conteúdos matemáticos como a noção de função, como levantado por Pimentel & Vale (2012):

> Generalizando o problema para n sapos e n rãs, com $2n + 1$ casas no total, o número de casas a deslocar por cada um é $n + 1$; o número total de deslocações

quadro 6 – Descrição da matemática do jogo “Salto de Rã”

Número de rãs em cada lado (x)	Número de movimentos para completar o jogo y = f(x)	Relação matemática
1	3	$3 = 1^2 + 2.1$
2	8	$8 = 2^2 + 2.2$
3	15	$15 = 3^2 + 2.3$
4	24	$24 = 4^2 + 2.4$
5	35	$35 = 5^2 + 2.5$
6	48	$48 = 6^2 + 2.6$

Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

> é $2n(n+1)$; o número de saltos é n^2; assim, o número total de movimentos será dado pela expressão $2n^x(n+1) - n^2$ que é equivalente a qualquer uma das expressões referidas atrás (PIMENTEL; VALE, 2012, p. 34)

Com efeito, embora o jogo não tenha a riqueza de informações como a Torre de Hanói, é possível perceber que a manipulação do jogo Salto de Rã também tem sua contribuição para o ensino de função, por colocar o estudante do 9º ano do ensino fundamental no entendimento de contextos envolvidos no uso de jogos para a aplicação da linguagem matemática.

3.3 O Troca Peças

O jogo de Troca Peças também é uma ferramenta didática para o ensino da matemática, posto que, como os outros jogos supracitados, também possui uma lógica que pode ser valorizada para que o estudante compreenda, por meio da modelagem do jogo, que há um contexto que leva a compreensão e aplicação do conceito de função.

Segundo Menezes (2008, p. 50), “o conteúdo matemático que pode ser abordado com esse jogo corresponde as sequências numéricas e progressões, gráficos e tabelas, funções.”

O jogo é apresentado em um tabuleiro, formado por duas fileiras de furos - sendo nove furos em uma delas e oito em outra. Nestes furos repousarão as bolas de gude, enquanto peças de movimentação para o jogo. Ao total, são dezesseis bolas de gude, divididas em dois grupos, que, para diferenciar os jogadores, terão que ser em formatos ou cores distintos, conforme figura abaixo:

Figura 13 – Demonstração de fórmula por recorrência a partir do movimento das peças do jogo. Formação de uma Progressão

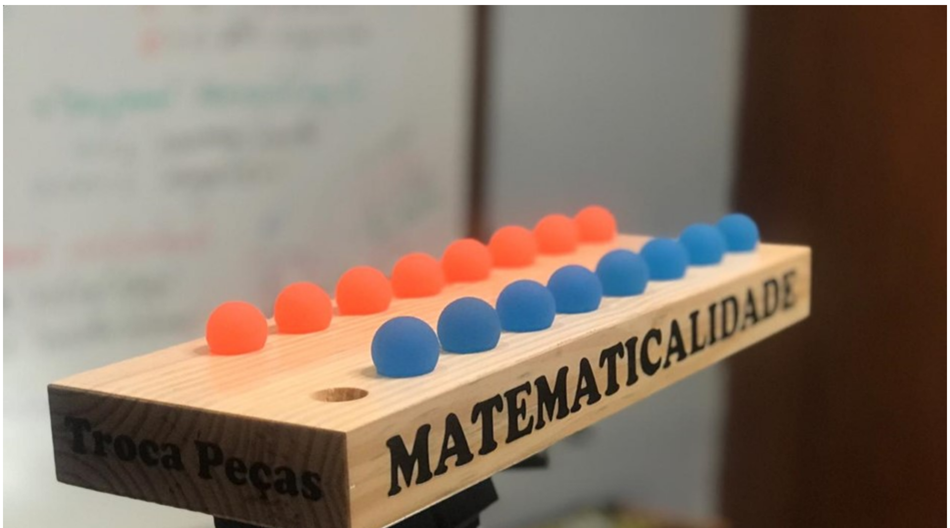
$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 5$$
$$a_3 = a_2 + 7$$
$$a_4 = a_3 + 9$$
$$(\ldots)$$

$$a_1 = 2\,.1 + 1$$
$$a_2 = a_1 + 2\,.2 + 1$$
$$a_3 = a_2 + 2\,.3 + 1$$
$$a_4 = a_3 + 2\,.4 + 1$$
$$(\ldots)$$
$$a_n = a_{n-1} + 2\,.n + 1$$

$$a_n = (2\,.1 + 1) + (2\,.2 + 1) + (2\,.3 + 1) + (\ldots) + (2\,.n + 1)$$
$$a_n = 2.(1 + 2 + 3 + [\ldots] + n) + \underbrace{(1 + 1 + 1\,[\ldots] + 1)}_{n\ vezes}$$
$$a_n = 2.(1 + n).\frac{n}{2} + (1 + 1).\frac{n}{2}$$
$$a_n = n + n^2 + n =$$
$$\boxed{n^2 + 2n}$$

Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Figura 14 – Tabuleiro do Troca de Peças



As regras do jogo são simples. No Troca Peças, apenas um furo estaria sem bola de gude, e as peças podem se mover de forma vertical, horizontal e diagonal, no intuito de ocupar os espaços vizinhos numa das direções. Como apenas um furo estará ocioso, no primeiro lance a peça terá que se mover ou na horizontal (do lado onde há o furo ocioso) ou na diagonal (do lado onde não há o furo).

Neste sentido, para vencer, o jogador deve traçar uma estratégia capaz de observar os movimentos das bolas de gude onde o deslocamento diagonal será o movimento mais eficiente, uma vez que ele pode cobrir o espaço do lado oponente, até que a última peça, que começou na casa vazia inicial, possa chegar à vizinha.

Ainda a refletir sobre o tema da função, Menezes (2008) deixa claro a importância deste conteúdo, uma vez que "as quantidades de movimentos mínimos para jogar com dois grupos de n peças cada um, sendo $n = 1, 2, 3, 4...$, a sequência forma uma progressão aritmética" (MENEZES, 2008, p. 50).

O quadro abaixo mostra a progressão do jogo dentro desta função:

quadro 7 – Progressão aritmética nos movimentos do jogo Troca Peças

PEÇAS	MOVIMENTOS
1 peça	3 movimentos +2
2 peças	5 movimentos +2
3 peças	7 movimentos +2
4 peças	9 movimentos +2
5 peças	11 movimentos +2
(...)	

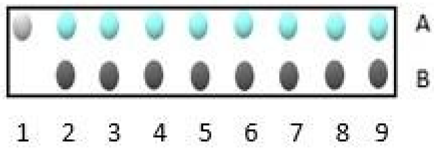
Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Logo, o objetivo desta atividade seria a de:

> Introduzir uma forma de modelagem do jogo na busca de estabelecer uma relação matemática que corresponda a um padrão de repetição dos movimentos do jogo. Em seguida, pode-se também buscar provar que esta relação, de fato, expressa automaticamente este padrão de repetição. (MENEZES, 2008, p. 51).

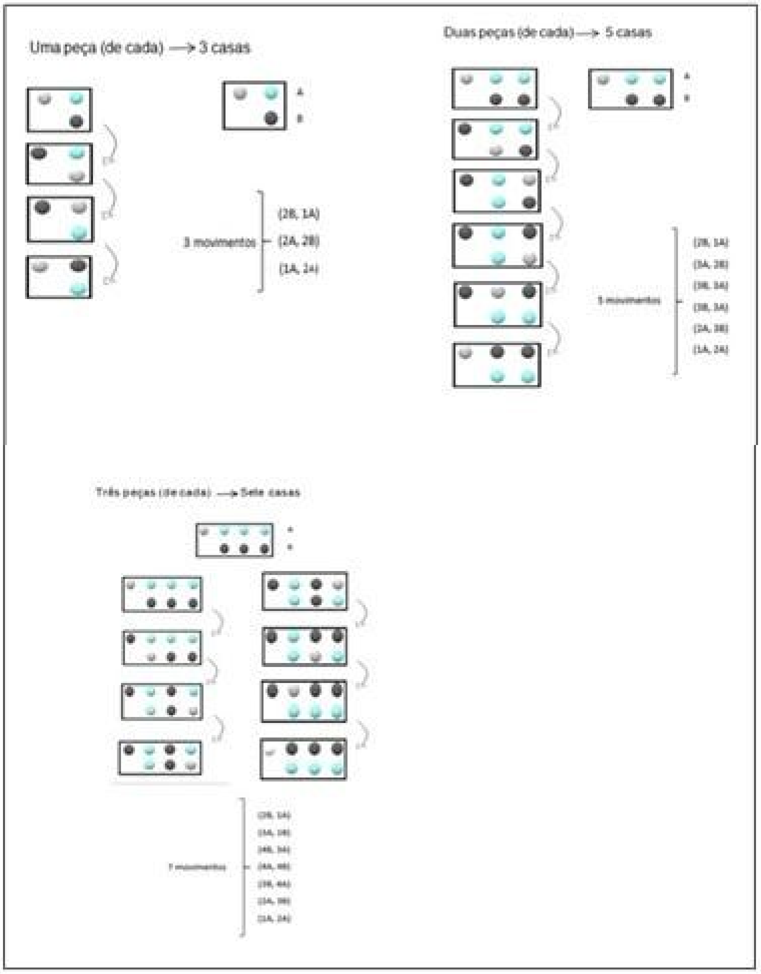
Vejamos a movimentação orquestrada no jogo e o desenvolvimento da fórmula, baseada na recorrência destas movimentações:

Figura 15 – Progressão aritmética nos movimentos do jogo Troca Peças



Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Figura 16 – Movimentos dos jogos. Sequência decorrente das peças movimentadas no jogo Troca Peças



Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Figura 17 – Demonstração de fórmula por recorrência dos movimentos das peças do jogo. Formação de uma Progressão

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2$$
$$(\ldots) \qquad +$$
$$a_n = a_{n-1} + 2$$
$$a_n = 3 + (n-1).2$$

$$a_n = 3 + 2n - 2$$
$$\boxed{a_n = 2n + 1}$$

Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Com efeito, a função é um assunto completamente possível de ser introduzido no contexto em abordagem, uma vez que sua lógica matemática pode ser expressada na própria dinâmica do jogo, assim como no Salto de Rã e na Torre de Hanói, podendo ser aplicado no ensino da matemática, sendo capaz de levar as questões da contextualização neste processo.

O passo a passo do movimento das peças pode ser organizado em quadro:

quadro 8 – Movimentos das peças no jogo Troca Peças

Peças	**Jogadas**
Um par	3
Dois pares	5
Três pares	7

Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

Vencer o jogo é traçar uma boa estratégia em que se possa observar o mínimo de jogadas a executar na troca a ser feita a partir dos movimentos das peças (deslocamento diagonal, para frente ou para trás), buscando o movimento mais eficiente.

Ainda, a refletir sobre o conhecimento de função, Menezes (2008) destaca a importância do conteúdo, uma vez que "o objetivo da atividade é justamente introduzir uma forma de modelagem do jogo na busca de estabelecer uma relação matemática que corresponda a um padrão de repetição dos movimentos do jogo" (MENEZES, 2008, p. 51).

Nota-se que o objetivo da atividade envolve o ensino da matemática e que:

> [. . .] introduzir uma forma de modelagem do jogo na busca de estabelecer uma relação matemática que corresponda a um padrão de repetição dos movimentos do jogo. Em seguida, pode-se também buscar provar que esta relação, de fato, expressa automaticamente este padrão de repetição. (MENEZES, 2008, p. 51).

Assim, o uso de jogos matemáticos, como prática educativa, gera um contexto de valorização do tema função para os alunos do 9º ano do ensino fundamental, possível e simples de ser introduzido a partir de atividades com material manipulativo, uma vez que sua lógica de manuseio coloca em cena uma matemática que pode ser expressa a partir da própria dinâmica do jogo, fato que pode ser observado no Salto de Rã e na Torre de Hanói. Portanto, o uso desse recurso didático trabalhado como contexto de valorização do saber matemático valoriza os processos de compreensão de função.

4 Metodologia

4.1 Modelo de pesquisa

O objetivo do estudo é analisar em que medida o uso de jogos, como a Torre de Hanói, o Troca Peças e o Salto de Rã, podem ser estruturas de contextualização para o ensino de funções, auxiliado pelo recurso de HQ's, e, para isto, recorremos ao tratamento de um estudo de caso que analisa, conforme já dito, o desempenho de 3 (três) estudantes do 9º ano do ensino fundamental no manuseio de jogos, para descrever, por meio de anotações (desenhos, gráficos, tabelas e representações em linguagens HQ), o que entendem dessa manipulação prática tão sugerida por professores e pesquisadores, que visam associar a matemática aprendida na escola.

Essa proposta é colocar o estudante em uma situação que o leve a detalhar sua forma de pensar relacionadas às tarefas que está executando, seja ela de forma escrita ou manipulativa, buscando a matemática que, muitas vezes, não é demonstrada por ele pela falta de domínio da linguagem ensinada nas escolas.

Quanto à forma e conteúdo trabalhados, focamos no conhecimento de funções, contextualização do saber, uso de jogos matemáticos e representação HQ. Essas abordagens estão presentes no trabalho, pois, buscamos uma via de entendimento daquilo que deixa o estudante mais livre e numa situação que seja adequada para que ele possa demonstrar a matemática que domina e as percepções do conteúdo que podem ser demonstradas fora do contexto muitas vezes formal do ensino.

Quanto ao processo de abordagens, a investigação foi traçada a partir do uso de 3 (três) jogos matemáticos - Torre de Hanói, Troca Peças e o Salto de Rã -, com objetivo na compreensão da aprendizagem baseada no processo de contextualização que esses materiais oferecem e inserindo o uso do recurso das Histórias em Quadrinhos que favorecem a escrita não formal da matemática, especificamente o conhecimento de funções.

A atividade proposta, incialmente, seria realizada em sala de aula, por três grupos de alunos do nono ano do ensino fundamental, com a finalidade de vivenciar a prática dos jogos mencionados. O experimento estava dividido em etapas que, ao todo, levariam, aproximadamente, 1h e 30 min.

1. Na primeira etapa, cada grupo faria o manuseio, de forma livre, do jogo pelo qual ficou responsável. Fora determinado o tempo de 20 min. para o exercício desta atividade.

Depois deste primeiro processo, com o auxílio e orientação do professor, a proposta envolvia uma vivência da historicidade dos jogos praticados, buscando a sensibilização dos estudantes. No caso da Torre de Hanói, o foco seria na lenda indiana que inspirou a criação do jogo, para que os alunos pudessem perceber uma narrativa no desenvolvimento do jogo. No jogo do Salto da Rã, o foco seria no aspecto lúdico, onde o anfíbio é representado pelas bolas de gude, dentro de uma sequência narrativa. A interação no Troca Peças também demonstra uma a riqueza deste jogo.

A noção de narrativa tem importância por fazer uma conexão entre os jogos trabalhados e a História em Quadrinhos. Com efeito, é a narrativa, a sequência lógica, que pode unir estas duas relações experimentais em uma abordagem do ensino da matemática.

2. A segunda etapa, com duração de 20 (vinte) minutos, seria desenvolvida depois da apresentação do jogo com os alunos que deveriam preparar um texto descritivo da ação desenvolvida, destacando as aprendizagens, conhecimento matemático envolvido, implicações no ensino aprendizagem, entre outros aspectos.

3. A terceira etapa teria 40 (quarenta) minutos. Nela, cada grupo, com base nas anotações realizadas e postas no texto descritivo, deveria preparar uma história em quadrinhos do processo descritivo relativo ao saber matemático, produzido por cada grupo sobre os jogos, já que os aspectos gráficos e narrativos dos HQ's propunham a possibilidades para uma apresentação das funções em seus aspectos algébricos e por representação em tabelas. Ao final da atividade, deveriam ser discutidas as dificuldades observadas, a partir dos dados matemáticos identificados.

quadro 9 – Etapa da Metodologia da aplicação da atividade.

Etapa	Resumo da Etapa	Tempo estimado
Sensibilização	Manipulação livre Manipulação coordenada	20 minutos
Descrição	Escrita de texto descritivo sobre o jogo	30 minutos
Criação do Mangá	Confecção de um HQ	40 minutos

Fonte: Material de trabalho da pesquisa do autor.

4.2 Sujeitos

A atividade proposta foi realizada de forma *online*, com apenas 3 (três) estudantes do 9º ano do ensino fundamental, selecionados pela disponibilidade em participar do experimento, utilizando o vídeo como forma de visualização e registro da ação proporcionada, através do aplicativo *Google Meet*, que facilitou a proposta de coleta de dados. Esse fato foi devido à questão de estarmos vivendo a pandemia denominada Covid-19, que isolou a população e resultou na paralização das escolas, ocorrendo bem no período da coleta de dados deste estudo.

4.3 Espaço de desenvolvimento da pesquisa

A atividade propunha a elaboração de um modelo de HQ como ferramenta de demonstração do conhecimento apresentado no tema função, contextualizada pelo uso dos jogos trabalhados (Troca Peças, Torre de Hanói e Salto da Rã).

Devido ao cenário atual da pandemia do Coronavírus e a consequente paralização das aulas presenciais, seguindo os protocolos de segurança da Organização Mundial de Saúde (OMS) e afins, o desenvolvimento da pesquisa foi realizado em sala de aula virtual, através do *Google Meet*. Diante da dificuldade encontrada pela configuração deste novo cenário, o trabalho não foi realizado com 3 (três) grupos de alunos, mas, sim, com apenas 3 (três) alunos (cada um experimentando um jogo). Todas as atividades foram gravadas.

O experimento aconteceu individualmente com cada estudante, em dias e horários previamente marcados pelo professor, dividido em 2 (duas) etapas, como consta nos formulários de coleta abaixo apresentados, seguindo os tópicos:

- Breve histórico do jogo;
- Compreensão das regras dos jogos;
- Manipulação de forma livre por 20 (vinte minutos);
- Questões a serem respondidas que visavam colocar em cena a modelagem desses jogos.

A coleta de dados foi obtida através de análise do pesquisador sobre as anotações dos participantes (alunos). Deveriam ser elaborados três HQ'S (sendo um por aluno), entretanto, apenas um fora produzido por aluna participante. Devido à dificuldade de acesso aos programas de computador, por conta da realização não-presencial, e, por isto, da indisponibilidade de laboratórios de informáticas, o HQ foi realizado de forma manual, com apresentações mais simplificadas do que as esperadas. Neste trabalho, analisaremos, demonstrativamente, as anotações feitas pelos alunos participantes.

4.4 Descrição das etapas de coleta dos dados

Os dados produzidos neste trabalho foram obtidos através de pesquisas bibliográficas – fundamentação teórica -, e, também, através de atividades de investigação realizadas com os alunos do ensino fundamental de escola particular da cidade de Recife-PE – finalidade prática.

Depois de analisar livros e artigos que versassem sobre o tema em questão, fez-se uma triagem e uma leitura destes – tanto de livros quanto de artigos -, para poder criar uma fundamentação teórica capaz de sustentar toda a problemática aqui trabalhada. Depois, focou-se na parte prática, iniciando a pesquisa com os alunos outrora mencionados. Como não foi possível trabalhar em sala de aula presencial, fora virtualmente feita uma pequena explanação sobre o assunto “funções” e como inferir este tema à prática dos jogos aqui mencionados e trabalhados. Depois da explanação, fora apresentada a atividade para ser realizada em caráter investigatório, por cada aluno, de forma individual e sem interferência externa. Depois de realizado o exercício com os jogos, os alunos participantes ficaram responsáveis por relatar como foi a experiência com relação à aprendizagem do tema e desenvolverem HQ’s sobre a função e seu ensino sobre os jogos, com a finalidade de ser um instrumento didático de fácil acesso ao conhecimento. Por fim, houve uma leitura sobre as observações levantadas pelos alunos como forma conclusiva deste trabalho. Frisando, novamente, que, devido às dificuldades encontradas na nova configuração pandêmica do COVID-19, apenas um aluno conseguiu produzir o HQ a tempo de ser retratado nesta pesquisa.

4.4.1 Fichas de coleta de dados da pesquisa

Figura 18 – Ficha de coleta de dados da pesquisa

Atividade virtual 1 - Torre de Hanói.

Olá, você estará participando de uma atividade de pesquisa (PROFMAT/URPE) organizada pelo seu professor (não confere nota, apenas enriquecimento de assuntos já trabalhados por você na escola). É necessário que você tenha em mãos caneta e papel para anotações. Obs.: tudo que for anotado é importantíssimo, não apague nada, por favor. Nosso interesse está nas anotações que, porventura, você venha realizar (números, desenhos, gráficos, tabelas, rascunhos, riscos e rabiscos). Você pode considerá-las adequadas ou não, mas, para nós, são fundamentais no entendimento e investigação de como aprendemos matemática. Outro fato importante é que você não precisa se identificar. Desde já, agradecemos por participar.
Leia as orientações para o passo a passo de sua participação.

FASE 1 (tempo máximo - 30 minutos):
1.Leia o breve texto sobre o histórico do jogo;
2.Leia com atenção as regras e o objetivo do jogo;
3.Realize o manuseio das peças de forma livre para melhor entendimento do jogo;
•Histórico do jogo - A torre de Hanói surgiu em 1883 com Édouard Lucas e tornou-se um jogo matemático muito interessante, seja por sua lógica, exigência, execução e observação. É um jogo tipo 'quebra-cabeça'. O jogo se constitui de uma plataforma com três pinos que são separados, entre si, por uma mesma distância. Um dos pinos, o da esquerda (usualmente), recebe sete discos, todos de tamanhos diferentes, com valor crescente seus diâmetros e são perfurados no seu centro para atravessar os pinos.

•Objetivo do jogo
Transpor as peças do pino 1 para o pino 3, uma a uma, obedecendo as regras.

•Regras do jogo
Só é permitido mover um disco por vez;
A cada jogada, um disco menor não pode ficar por baixo de um disco maior;
Só é permitido mover os discos que estão por cima dos demais em cada pino.

•Atividade livre
Tente manipular o jogo (brincar um pouco). Caso se atrapalhe, vá devagar.
Sugestão: Utilize por vez apenas uma peça, duas peças, três peças, quatro peças (...) sete peças etc.;

Questionamentos:
Caso tenha algum questionamento, ou dúvida, converse e tire duvidas *online* com o professor.

FASE 2 (tempo – máximo 60 minutos):
Questões da atividade (anotações):
1)Durante a atividade livre, você percebeu alguma lógica para melhor solucionar o jogo? Anote ou desenhe suas indagações para sua resposta a essa pergunta.
2)Você consegue, por meio de escrita ou através de desenhos, indicar o passo a passo do jogo? Qual seria a sua descrição?
3)Você visualiza alguma relação matemática ao manusear corretamente o jogo? Escreva sobre esse fato, crie tabelas, faça desenhos e anotações?
4) Algum assunto que você já estudou tem relação com este jogo? Escreva sua resposta, faça anotações daquilo que você conectou de matemática, aprendido na sala de aula e a lógica de manuseio do jogo, que estão relacionados.
5)Se essa atividade fosse para ser avaliada pelo seu professor, solicitando uma descrição matemática em forma de "História em Quadrinhos', na qual você tivesse que apresentar as tabelas de movimentação das peças, a lógica envolvida, a matemática presente no jogo e a regra geral de solução – expressão modelo, como seria a sua descrição da atividade (História em Quadrinhos).

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Figura 19 – Ficha de coleta de dados da pesquisa

INSTRUÇÕES DE COLETA 2 - Atividade virtual – Salto de Rã

Olá, você estará participando de uma atividade de pesquisa (PROFMAT/URPE) organizada pelo seu professor (não confere nota, apenas enriquecimento de assuntos já trabalhados por você na escola). É necessário que você tenha em mãos caneta e papel para anotações. Obs.: tudo que for anotado é importantíssimo, não apague nada, por favor. Nosso interesse está nas anotações que, porventura, você venha realizar (números, desenhos, gráficos, tabelas, rascunhos, riscos e rabiscos). Você pode considerá-las adequadas ou não, mas, para nós, são fundamentais no entendimento e investigação de como aprendemos matemática. Outro fato importante é que você não precisa se identificar. Desde já, agradecemos por participar.
Leia as orientações para o passo a passo de sua participação.

FASE 1 (tempo máximo - 30 minutos):
1.Leia o breve texto sobre o histórico do jogo;
2.Leia com atenção as regras e o objetivo do jogo;
3.Realize o manuseio das peças de forma livre para melhor entendimento do jogo;

Histórico do jogo
O Salto de Rã é um jogo que tem sua historiografia desconhecida e é pouco utilizado por crianças e adolescentes. Existe em modelo físico e virtual e é bastante atrativo. O Salto de Rã explora o raciocínio lógico e processo de concentração, uso de estratégias, tipo tentativa e erro, e observação. O forte do jogo é perceber o caminhar das peças, na qual se pode inferir compreensões da lógica do jogo. O nome Salto de Rã é designado, pois cada peça representa uma rã, que, através de saltos, mudará de um lado do tabuleiro para o outro, saltando por sobre as oponentes que são de cor distinta. Lembrando que não podem saltar as irmãs do mesmo grupo (mesma cor).

•Objetivo do jogo
O objetivo do jogo é encontrar o número mínimo de movimentos (jogadas) que são necessários para mover o conjunto de rãs de um lado para o outro e vice e versa - cada grupo deverá estar do lado oposto do inicial.

•Regras do jogo.
Em cada casa só poderá conter uma peça;
Cada peça poderá ser movida somente em uma direção, dependendo de sua lateralidade esquerda/direita. Se estiver à esquerda, moverá para direita, se estiver à direita, moverá para esquerda;
Após o movimento de uma peça, não pode voltar à posição anterior;
Só é permitido mover uma peça para uma casa vazia;
Não se pode pular peça da mesma cor;
Não se pode pular mais de uma peça por vez;
Chegará ao final quando inverter a posição das peças (azuis para a posição inicial das laranjas e vice-versa).

•Atividade livre
Tente manipular o jogo (brincar um pouco), caso se atrapalhe, desmanche e reponha as peças com a forma original para reiniciar o jogo, lembre-se que não pode voltar, tem que saltar uma peça por vez, não pode passar por cima das amigas. Vá devagar.
Sugestão: você pode treinar utilizando o jogo com apenas duas peças (uma de cada cor), quatro peças, seis peças, mas lembre-se que para realizar (vencer no jogo), tem que fazer o caminho sem volta com todas as peças.

Questionamentos:
Caso tenha algum questionamento, ou dúvida, converse e tire duvidas *online* com o professor.

FASE 2 (tempo – máximo 60 minutos):
Questões da atividade (anotações):
1)Durante a atividade livre você percebeu alguma lógica para melhor solucionar o jogo? Anote ou desenhe suas indagações para sua resposta a essa pergunta.
2)Você consegue por meio de escrita ou através de desenhos, indicar o passo a passo do jogo? Qual seria a sua descrição?
3)Você visualiza alguma relação matemática ao manusear corretamente o jogo? Escreva sobre esse fato, crie tabelas, faça desenhos e anotações?
4) Algum assunto que você já estudou tem relação com este jogo? Escreva sua resposta, faça anotações daquilo que você conectou com a matemática já aprendida na sala de aula e a lógica de manuseio do jogo, em que estão relacionados.
5)Se essa atividade fosse para ser avaliada pelo seu professor, solicitando uma descrição matemática em forma de "História em Quadrinhos', na qual você tivesse que apresentar as tabelas de movimentação das peças, a lógica envolvida, a matemática presente no jogo e a regra geral de solução – expressão modelo, como seria a sua descrição da atividade (História em Quadrinhos).

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Figura 20 – Ficha de coleta de dados da pesquisa

INSTRUÇÕES DE COLETA 3 - Atividade virtual – Troca Peças

Olá, você estará participando de uma atividade de pesquisa (PROFMAT/URPE) organizada pelo seu professor (não confere nota, apenas enriquecimento de assuntos já trabalhados por você na escola). É necessário que você tenha em mãos caneta e papel para anotações. Obs.: tudo que for anotado é importantíssimo, não apague nada, por favor. Nosso interesse está nas anotações que, porventura, você venha realizar (números, desenhos, gráficos, tabelas, rascunhos, riscos e rabiscos). Você pode considerá-las adequadas ou não, mas, para nós, são fundamentais no entendimento e investigação de como aprendemos matemática. Outro fato importante é que você não precisa se identificar. Desde já, agradecemos por participar.
Leia as orientações para o passo a passo de sua participação

FASE 1 (tempo máximo - 30 minutos):
1. Leia o breve texto sobre o histórico do jogo;
2. Leia com atenção as regras e o objetivo do jogo;
3. Realize o manuseio das peças de forma livre para melhor entendimento do jogo;

Histórico do jogo - O jogo "Troca Peças" não tem um histórico divulgado como os demais jogos didáticos, sua natureza é um pouco desconhecida, apenas manipulado por estudantes e amantes de jogos matemáticos. A riqueza do jogo é tratá-lo como material didático para compreensão da matemática. Busca-se entender o pensamento lógico matemático, formulação de sequências, relações funcionais, organização de tabulação, entre outros. O jogo é apresentado por um tabuleiro de duas fileiras alinhadas de peças. Existem versões com número de peças (6, 8 ou até 12 grupos de peças), mas o normal é apenas dois grupos de oito peças. O jogo pode ser fabricado em cartolina, emborrachado e madeira, com suas peças representadas por tampinhas de garrafas, bolinha de gude ou botões, de modo que sejam dois grupos, um de cada cor, com mesma quantidade e tamanho.

Objetivo do jogo
O objetivo do jogo é deslocar todo o grupo da primeira fileira de peças (grupo A) para o local do segundo grupo de fileira peças (grupo B), ou seja, trocar os dois grupos de peças de posição.

•Regras do jogo
Vencer o jogo é atingir o número mínimo de jogadas;
Deve-se mover uma única peça por vez, sempre para uma casa vazia, em sentido diagonal, vertical ou horizontal, ou ainda, para frente e para trás buscando ocupar sempre a casa que vai ficando vazia ao longo das fileiras;*Não podemos retirar peças do tabuleiro, apenas trocar de posição uma a uma;
O tabuleiro desde o início até o fim do jogo deve conter as dezesseis peças (oito de cada cor).

•Atividade livre
Tente manipular o jogo (brincar um pouco), caso se atrapalhe, vá devagar, faça anotações para melhor entender a estratégia que precisa ser montada.

Questionamentos:
Caso haja questionamentos ou dúvida, converse *online* com o professor.

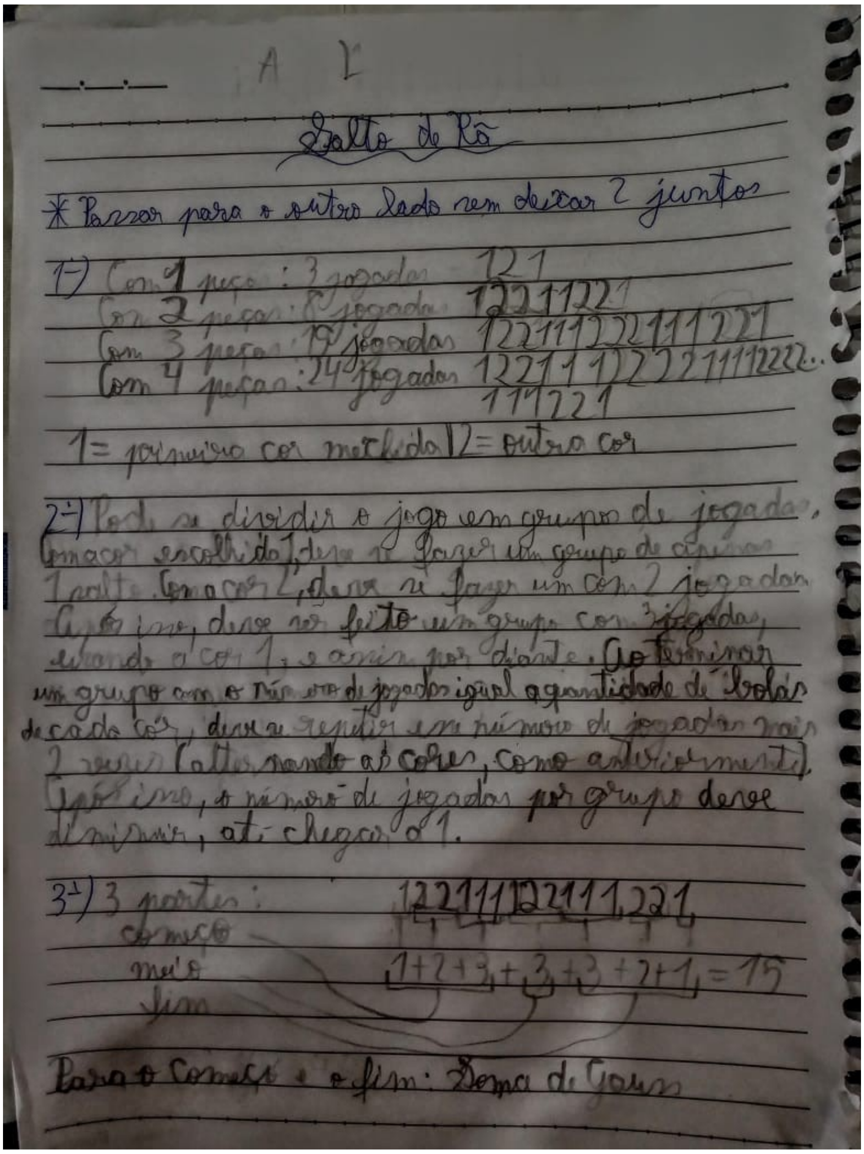
FASE 2 (tempo – máximo 60 minutos):
Questões da atividade (anotações):
1)Durante a atividade livre você percebeu alguma lógica para melhor solucionar o jogo? Anote ou desenhe suas indagações para sua resposta a essa pergunta.
2)Você consegue por meio de escrita ou através de desenhos, indicar o passo a passo do jogo? Qual seria a sua descrição?
3)Você visualiza alguma relação matemática ao manusear corretamente o jogo? Escreva sobre esse fato, crie tabelas, faça desenhos e anotações?
4) Algum assunto que você já estudou tem relação com este jogo? Escreva sua resposta, faça anotações daquilo que você conectou com a matemática já aprendida na sala de aula e a lógica de manuseio do jogo, em que estão relacionados.
5Se essa atividade fosse para ser avaliada pelo seu professor, solicitando uma descrição matemática em forma de "História em Quadrinhos', na qual você tivesse que apresentar as tabelas de movimentação das peças, a lógica envolvida, a matemática presente no jogo e a regra geral de solução – expressão modelo, como seria a sua descrição da atividade (História em Quadrinhos).

Fonte: Material de pesquisa do Autor

4.4.2 Análise do material de coleta

4.4.2.1 Jogo Salto de Rã – Estudante A1

Figura 21 – Foto enviada pelo(a) aluno(a) (A1), sobre as respostas ao Questionário da atividade com o jogo Salto da Rã



A 1

Salto de Rã

* Passar para o outro lado sem deixar 2 juntos

1-) Com 1 peça: 3 jogadas 121
Com 2 peças: 8 jogadas 12211221
Com 3 peças: 19 jogadas 1221112221111221
Com 4 peças: 24 jogadas 1221111222211112222...
111221

1 = primeira cor mexida / 2 = outra cor

2-) Pode se dividir o jogo em grupos de jogadas. Com a cor escolhida 1, deve se fazer um grupo de apenas 1 salto. Com a cor 2, deve se fazer um com 2 jogadas. Após isso, deve ser feito um grupo com 3 jogadas, usando a cor 1, e assim por diante. Ao terminar um grupo com o número de jogadas igual a quantidade de bolas de cada cor, deve se repetir esse número de jogadas mais 2 vezes (alternando as cores, como anteriormente). Após isso, o número de jogadas por grupo deve diminuir, até chegar a 1.

3-) 3 partes: 1221111222111,221
começo
meio $\underbrace{1+2+3}+\underbrace{3}+\underbrace{3+2+1}=15$
fim

Para o começo e o fim: Soma de Gauss

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Quanto aos artifícios baseados na aprendizagem matemática, observados a partir das anotações de A1, evidenciamos que ele busca entender a regra lógica que estrutura o jogo, pois logo de início tenta organizar as sequências de duas grandezas envolvidas (números x peças e número de jogadas). Essa é uma preocupação inicial que ele tenta descrever no passo a passo do jogo. Como está no início da atividade, escreve sem a preocupação do movimento mínimo, não chegando a uma solução correta:

quadro 10 – Movimento mínimo das peças do jogo Salto da Rã desenvolvido pelo estudante A1

1 peça ....3 jogadas
2 peças ......8 jogadas
3 peças ......15 jogadas
4 peças ....24 jogadas

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Nota-se que os procedimentos do aluno diante do jogo são descrever os passos que podem levar a uma matemática extraída do próprio jogo. A1 procura usar uma escrita matemática próxima da que é ensinada na escola. O cenário que está envolvido o coloca como o personagem que deve utilizar os conhecimentos matemáticos que domina e apresentar o modelo que descreve as ações de solução do jogo.

O fato de estar diante de uma situação prática, em que um contexto oferecido é fornecido por um recurso material, que deve auxiliá-lo na compreensão e descrição de saberes matemáticos, não faz parecer ser muito comum tal abordagem na sala de aula. Portanto, inicia seu processo de descrição buscando apresentar o passo a passo, um a um, do movimento das peças.

O processo que o estudante utiliza foca na lógica das regras do jogo. Mas, no caso em questão, o aluno se vê entre vários conteúdos, tais como: sequências numéricas, domínio e imagem, descrição de um evento numérico, descrição do modelo, regras de recorrência, entre outros saberes. É que, no ensino formal, tais saberes não são oferecidos com uso de contextos na sala de aula.

Na atividade, observamos que A1 se vê em momentos de dificuldades quanto à compreensão do contexto proporcionado pelo material, então, busca criar, primeiramente, um caminho baseado na descrição das regras, as quais podem ser tiradas do manuseio do jogo. Mas parece haver uma barreira no processo de descrição do evento, que é o fato de ter que colocar no papel os termos usuais da linguagem matemática; entretanto, tais termos tão necessários à explicação do fenômeno ou atividade parecem não surgir de forma clara. É nesse ponto que muitos educadores se perguntam sobre o porquê de os estudantes levarem um bom tempo para dominar com maestria a linguagem matemática, mesmo ela estando diante dos seus próprios olhos, como é o caso do jogo apresentado, o Salto de Rã.

A metodologia do uso de jogos, quando trabalhada corretamente na sala de aula, traz o aluno para a compreensão matemática do significado, dos conceitos, regras e contextos oferecidos que facilitam entender o registro do fato ou fenômeno que acontece naquele instante, oferecido pelo manuseio do jogo; ou seja, entender que passos estão sendo descritos e que escrevê-los usando a linguagem matemática aprendida na sala de aula, não parece ser coisa muito comum. Portanto, essa tarefa é de difícil descrição da maioria dos estudantes. O fato é que não é habitual essa prática do emprego de contexto no currículo escolar em que se exploram estratégias de compreensão da conexão de um conteúdo matemático que deve ser observado e descrito durante um evento real.

Os dados construídos para a pesquisa nos fizeram indagar sobre o porquê de muitos professores de matemática não refletirem sobre o uso de jogos matemáticos na sala de aula, se o recurso da contextualização faz o aluno ficar diante do fato de ter que apresentar ou descrever a matemática que visualiza e que está sendo oferecida a ele. Esse processo enriquece e valoriza a prática de ensino.

Em nossa visão, um fato que está em jogo é a demanda do currículo, pois o professor não está ali para fazer os alunos compreenderem demonstrações ou manusear a cada momento materiais que os faça vivenciar contextos matemáticos. Uma vez que não há tempo, o currículo tem pressa, essa forma de aprendizagem matemática fica para quem tem tempo de se dedicar a ela fora do âmbito da sala de aula. Desta forma, a matemática em contextos está distante do fato em que se queira colocar o aluno em condições de conhecer as ferramentas explicativas ensinadas pelo professor e que ele possa usar para expor e divulgar o quanto se vê diante de uma situação-problema em que um fenômeno do cotidiano necessita ser explicado.

Na moldagem desse estudo, percebemos que se oferecêssemos ao estudante um caminho que o fizesse descrever um fenômeno que observa, por mecanismos que seja capaz de detalhar o que presencia e entende, seria mais viável receber mais dados da análise do aluno diante da situação-problema, ou seja, uso e descrição da solução do jogo em termos matemáticos. Assim, buscamos na sugestão do HQ esse melhor detalhamento do pensamento do estudante diante da situação.

Por conseguinte, poderiam fugir dos esquemas formais da linguagem matemática e, então, entender o quanto o recurso do HQ pode minimizar as dificuldades relacionadas aos processos de descrição e uso de contextos. É fato que muitos estudantes parecem mudos quando se cobra deles que escrevam a matemática que percebem em um fenômeno ou em tarefas que necessitem destacar a linguagem matemática.

Isso é importante, pois propõe ao aluno uma maneira de descrever como quiser o que compreende e lhe dá segurança em afirmar a matemática que está entendendo, já que na escola não encontra, muitas vezes, esse caminho. Não se sentir seguro o faz esconder o jogo dos saberes e até onde pode chegar. Isso é um fato pouco conhecido de professores e que deveria ser tratado como diálogo nas aulas de matemática: em se ter um recurso intermediário para descrição matemática do que o aluno compreende e valoriza na escrita formal.

A importância da contextualização discutida nesse trabalho nos deu a compreensão de que um ensino explorando algum contexto tem mais significado para o estudante. No nosso caso, mostrar que explorar essa importância através do uso de jogos colabora com o professor em trabalhar atividades de mapeamento de jogos e trazer riquezas quanto ao processo de aprendizagem.

Trabalhar os jogos apenas de forma livre, não requisita do aluno a mesma compreensão que no caso de realizar o seu mapeamento. Dessa forma, o protagonismo quanto à aprendizagem terá mais importância, pois não se percebe na sala de aula, no ensino formal, estratégias em que os alunos trabalhem a matemática por meio de contextos de uso de jogos e assim tenham o direito de receber, de forma mais significativa, o saber que está manuseando.

Com base no material detalhado pelo estudante, observamos que A1 tenta criar regras de solução e anota os seguintes critérios:

a. Passar para o outro lado sem deixar duas peças iguais juntas;

b. Apresentar um sequencial lógico para o movimento das peças [121], [1221122], [...];

c. Criar um modelo descritivo de tabela para **n** peças;

d. Compreende que o jogo pode ser dividido em grupos de jogadas;

e. É possível estabelecer as jogadas em 3 partes (começo meio e fim);

f. Busca construir uma base lógica a partir dos movimentos gerados pelos dois grupos de peças;

A1 Tenta inserir saberes no contexto da matemática, associando a matemática dos movimentos das jogadas com a conhecida lógica da soma numérica de Gauss $(1 + 2 + 3 + 4 + 5[...]96 + 97 + 98 + 99 + 100)$.

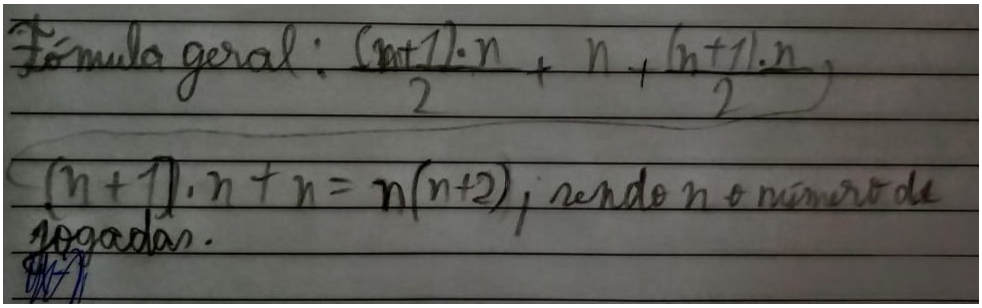
Figura 22 – Raciocínio executado pelo estudante A1 sobre os movimentos das jogadas e a soma de Gauss

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Busca uma expressão geral que represente o modelo da função que defina os movimentos e que dê solução ao jogo. Parece que sua ação é chegar a uma associação da sequência gerada como soma dos termos de uma P.A. finita, pois escreve:

Fórmula geral: $\frac{(n+1).n}{2} + n + \frac{(n+1).n}{2}$, que leva ao modelo: $(n + 1).n + n = n(n + 2)$. Que são termos sequenciais de uma possível progressão.

Figura 23 – Anotações de A1 para definir o termo geral



Fonte: Material de pesquisa do Autor

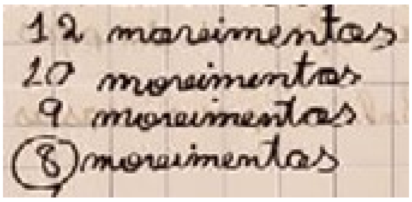
O modelo descrito por A1 não é bem o que esperávamos, mas serviu como contribuição para sabermos em que nível de compreensão ele trabalhou até chegar a essa solução. A1 finaliza com a seguinte colocação:

- *"Para encontrar a fórmula, foi necessário o conhecimento sobre progressão aritmética. Além disso, a própria fórmula é uma função."*

4.4.2.2 Jogo Troca Peças - Estudante A2

A estudante inicia o jogo com apenas dois pares de peças e propõe um conjunto de regras de alerta. Por exemplo, nunca deixar na casa vazia uma barra de cor azul; não deixar a última casa vazia. Tal preocupação tem sentido em evitar algum impedimento do andamento correto do jogo. Observe a movimentação analisada pela Estudante:

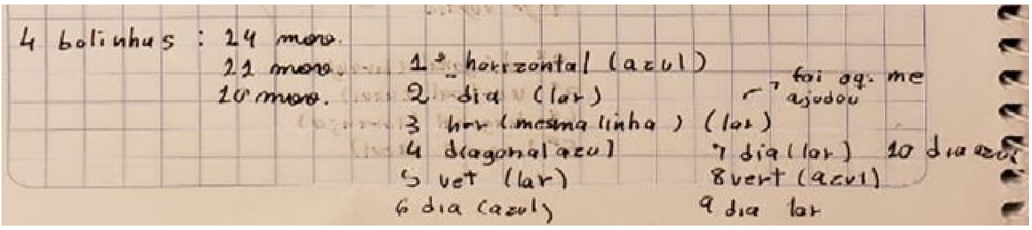
Figura 24 – Ações da estudante A2 no jogo



Fonte: Material de pesquisa do Autor

A aluna apresenta um rascunho de primeira sequência *(12, 10, 9, 8 movimentos)* para o grupo de dois pares de peças, mostrando que está buscando testar opções de estratégias. Descreve, também, uma lista de possíveis movimentos (horizontal, diagonal; horizontal, diagonal, vertical; diagonal, diagonal, vertical, diagonal). Atua como se estivesse testando nova estratégia, com base no tipo de movimento a ser executado em cada jogada com a peças do jogo. Vejamos:

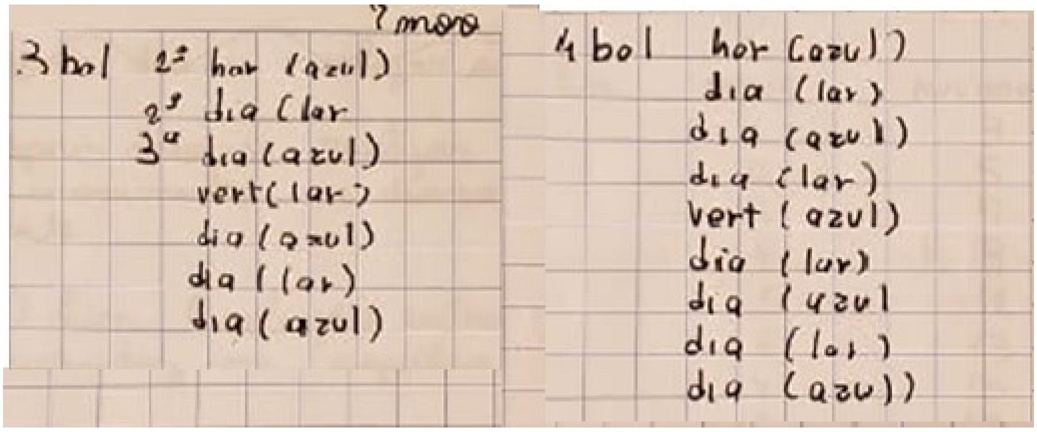
Figura 25 – Ações da estudante A2 no jogo



Fonte: Material de pesquisa do Autor

A aluna consegue estabelecer, a partir da descrição que está usando, algumas respostas que, para ela, são convincentes, pois já descreve passos com movimentos mínimos. Com representação de grupos de 3 e 4 peças, observe:

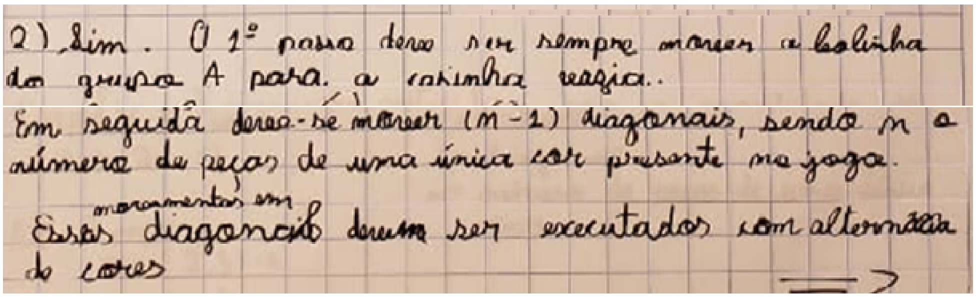
Figura 26 – Regra criada por A2 para o movimento de 3 e 4 peças



Fonte: Material de pesquisa do Autor

A estudante já descreve uma primeira regra, em que afirma o passo de sempre iniciar com o grupo A, que estabeleceu para as bolas azuis. Em seguida, deve executar $(n - 1)$ movimentos em diagonais. Segue raciocínio colacionado abaixo:

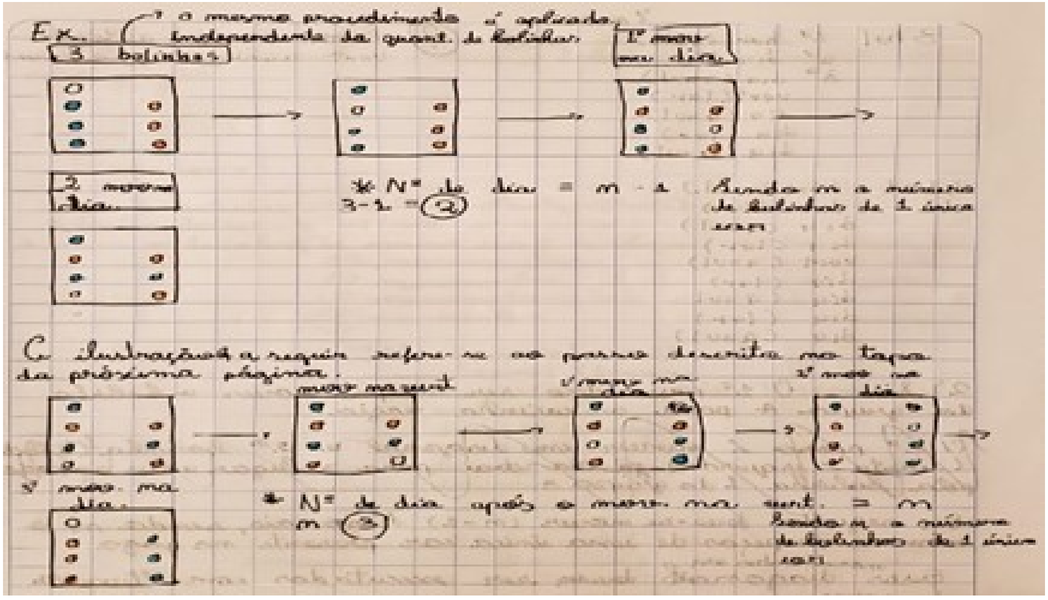
Figura 27 – Passos definidos por A2 para atingir o movimento mínimo



Fonte: Material de pesquisa do Autor

Após apresentar certa segurança em suas estratégias, A2 parte para definir uma descrição mais clara do movimento das peças para um grupo de 3 pares de peças no jogo. É um esquema próprio de escrita, baseado em cenários do próprio jogo, em que define o posicionamento do manuseio das peças em dado momento, como apresentado na figura abaixo:

Figura 28 – A2 define um passo a passo com grupos de 3 pares de peças



Fonte: Material de pesquisa do Autor

Após apresentar uma espécie de esquema gráfico de posicionamento das peças, durante o manuseio do jogo, A2 chega a definir um tabelamento em que já aparece a descrição da relação entre três grandezas (peças, movimentos e diagonais) presentes no jogo, e que são apresentadas por meio de tabelamento, como descrito na Figura 28.

A2 reconhece a presença de um esquema de progressão aritmética e afirma: *"pois a quantidade de movimentos aumenta de dois em dois a cada peça de única cor acrescentada, como é visto na tabela"*. A partir do tabelamento descrito chega a destacar, por meio de escrita matemática, a correlação entre grandezas, já apresentando um modelo descritivo por linguagem matemática, como sendo:

$$1H + 1V + (2n - 1)$$

$$2 + (2n - 1)$$

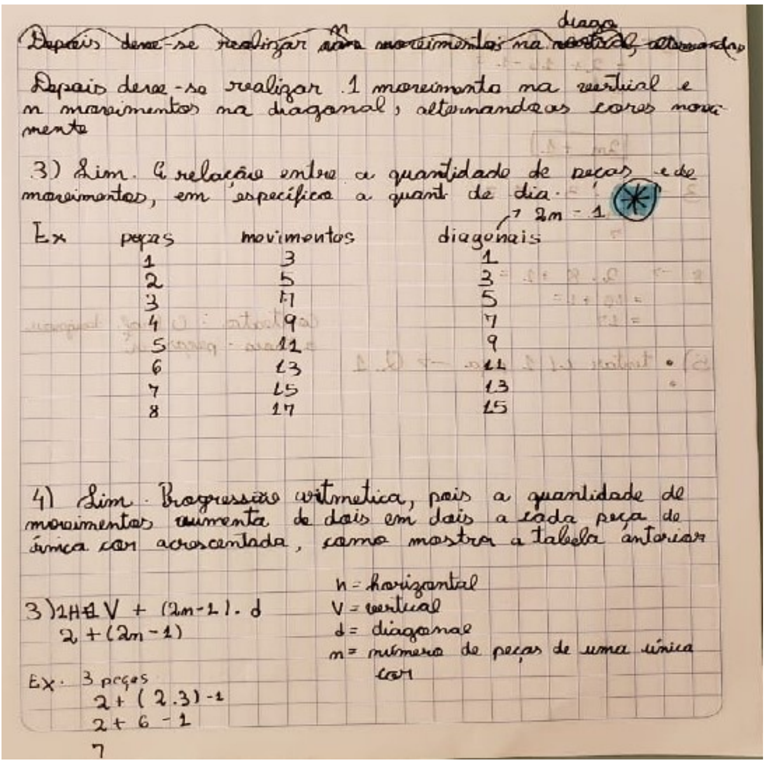
Com essa descrição, ela já aponta para determinações de termos do tabelamento que instituiu. E já faz um teste para 3 peças, que seria:

$$2 + (2x3) - 1$$

$$2 + 6 - 1 = 7$$

Esse primeiro modelo ajustado seria: $P(n) = 2n + 1$, que é uma escrita favorável a descrição do jogo.

Figura 29 – Tabelamento entre grandezas definidas por A2


~~Depois deve-se realizar n movimentos na vertical, alternando~~

Depois deve-se realizar 1 movimento na vertical e n movimentos na diagonal, alternando as cores novamente

3) Sim. A relação entre a quantidade de peças e de movimentos, em específico a quant. de dia. → 2n - 1

Ex	peças	movimentos	diagonais
	1	3	1
	2	5	3
	3	7	5
	4	9	7
	5	11	9
	6	13	11
	7	15	13
	8	17	15

4) Sim. Progressão aritmética, pois a quantidade de movimentos aumenta de dois em dois a cada peça de única cor acrescentada, como mostra a tabela anterior

3) 1H + 1V + (2n - 1) . d
2 + (2n - 1)

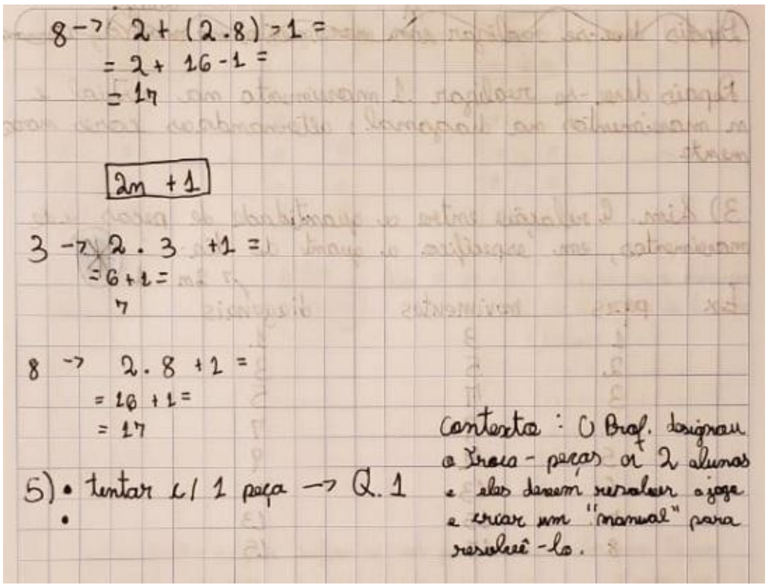
h = horizontal
V = vertical
d = diagonal
n = número de peças de uma única cor

Ex. 3 peças
2 + (2.3) - 1
2 + 6 - 1
7

Fonte: Material de pesquisa do Autor

A2 faz novos testes no modelo que conseguiu. Para 3 e 8 pares de peças, como observado na Figura 30:

Figura 30 – Teste do modelo para 8 pares de peças



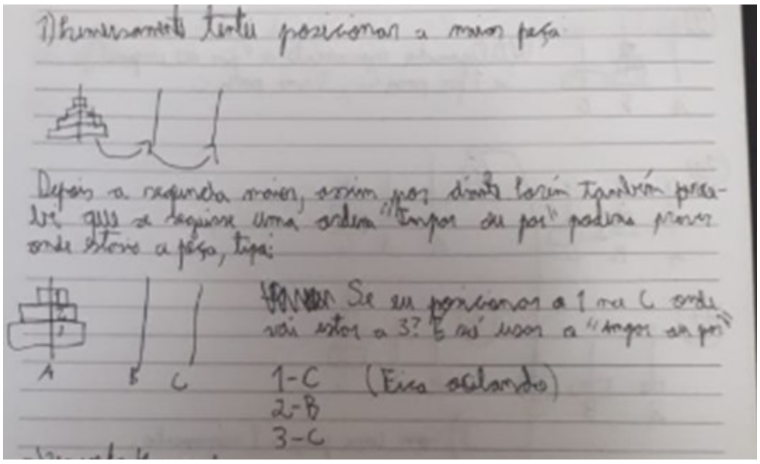
Fonte: Material de pesquisa do Autor

Por fim, a estudante A2 foi a única que conseguiu desenvolver o trabalho do HQ (Anexo 1), de forma manual, onde, através das figuras correlacionadas no referido anexo, podemos inferir que a escrita e a descrição utilizadas no HQ facilitou a expressão do conhecimento matemático apreendido por ela. Foi fácil demonstrar a matemática utilizando-se dos contextos presentes na prática do jogo, facilitando o entendimento do tema funções. Desta forma, conclui-se que averiguar as possibilidades de expressão da linguagem matemática, através do HQ, faz com que o estudante consiga ultrapassar o rigor formal costumeiro da disciplina nas escolas e, assim, demonstrar informações que corroboram sua apreensão do saber sobre o tema em debate (função).

4.4.2.3 Jogo Torre de Hanói - Estudante A3

Após realizar a atividade livre de 20 minutos com o jogo Torre de Hanói, o estudante A3 inicia apresentando um breve entendimento de como movimentar corretamente as peças do jogo. Nota-se que ele aprendeu o esquema básico de movimento das peças procurando atingir o número mínimo de jogadas. Dessa forma, escreve como seria o movimento ideal para apenas três peças no jogo e demonstra através de desenho, a desta ideia, na qual vai discriminando, mediante um código criado por ele (1C, 2B, 3C - que indica o movimento de cada uma das peças), como observado na Figura 31, abaixo:

Figura 31 – Teste do modelo para 3 peças no jogo



Fonte: Material de pesquisa do Autor

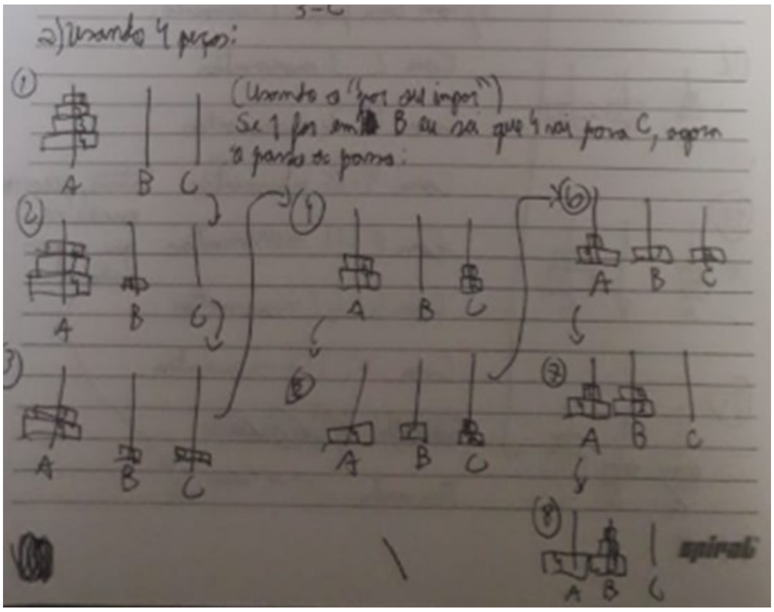
Depois de ter adquirido segurança com essa descrição-código que criou, o estudante parte para a ampliação do número de peças, elevando para 4 peças no tabuleiro, e continua na mesma estratégia, agora com a descrição-código criada. Nota-se que ele não chega a definir o número mínimo de jogadas, apenas descreve o passo a passo de posicionamento das peças em cada lance, como se pode observar na fotografia 32. Notamos, também, que A3 parece já ter conhecimento anterior do jogo, possivelmente já teria manuseado, pois começa a descrever o tabelamento das relações entre duas das grandezas (número de peças X número de jogadas), conforme apresentado na Figura 32 e que descrevemos no quadro abaixo. Além disso, ele também já estabelece a lei de recorrência, que define como: $2^{(N^\circ depeas)} - 1$

quadro 11 – Número de peças versus número de jogadas no jogo Torre de Hanói

Número de peças	Número de jogadas
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

Fonte: Material de pesquisa do Autor

Figura 32 – Anotações do estudante A3 ao trabalhar com 4 peças no jogo



Fonte: Material de pesquisa do Autor

Como observado nas anotações do estudante, ele chega a trabalhar por dedução, após manusear a Torre de Hanói com 4 peças, pois trabalha a construção das jogadas a partir do aumento que vai instituindo nas peças no jogo, já com o modelo de solução matemática que conhece, ou seja, $P(x) = 2^n - 1$.Esse fato nos faz perceber que A3 não descreve as jogadas através dos desenhos que estava realizando antes. Portanto, não teceremos detalhes mais aprofundados.

5 Resultados e Considerações

Após as análises dos dados, encontramos alguns elementos que consideramos importantes quanto aos propósitos delineados na pesquisa. Dessa forma, consideramos que os resultados trazem contribuições diversas, as quais destacamos a seguir:

- Os estudantes, quando são orientados a uma liberdade de escrita, sem o rigor matemático, mesclam linguagem matemática e linguagem esquematizada na descrição da resolução dos jogos que lhes foram oferecidos;
- Através da manipulação de jogos para trabalhar o conceito de função, notamos certa autonomia dos estudantes quanto aos esquemas matemáticos que buscam para criar representações, tabelas e desenhos;
- Nos três jogos trabalhados, os estudantes apresentaram elementos matemáticos apropriados ao tipo de mapeamento dos jogos oferecidos;
- Apesar de nas folhas de coleta de dados existir orientação quanto ao uso de um modelo de escrita por técnicas de HQ, apenas um aluno (A2) conseguiu desenvolvê-lo, conforme Anexo 1, e de forma manual, devido ao contexto da pandemia do COVID-19;
- Foi observado que os estudantes ficaram desinibidos quanto à demonstração e descrição da matemática envolvida nos jogos;
- O uso de jogos como contexto para o entendimento da matemática foi favorável para que visualizassem e relacionassem o entendimento de funções a objetos concretos;
- Entendemos, a partir dos resultados, que as estratégias para o ensino de funções, na escola, deveriam partir da compreensão de como o saber matemático está presente em artefatos manipuláveis, como os jogos;
- A seleção dos jogos matemáticos que foram trabalhados na pesquisa foi uma excelente ideia, pois nos fez refletir sobre a importância do uso de contextos apropriados ao ensino do conceito de função, especificamente na elaboração do termo geral obtido por mapeamento e modelagem.

Referências

ALBUQUERQUE, R. A. P. d.; NASCIMENTO, R. A. d. Visualização do conceito de progressões a partir de representações geométricas construídas no software superlogo. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 2, n. 1, p. 46–57, jul. 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.

ANCHIETA, R. J. F.; PANTOJA, L. F. L. A sistematização do conhecimento matemático através das histórias em quadrinhos. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática*, v. 4, n. 1, p. 35–56, jun. 2016.

ANDRINI, A. *Livro didático: Praticando Matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BALACHEFF, N. La transposition informatique: note sur um nouveau problème pour la didactique. In: ARTIQUE, M. et al. (Ed.). *Vingtans de didactiquedes mathématiques en France*. Grenoble: La pensée sauvage, 1994. p. 364–370.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: Contribuições para o debate teórico. In: *Anais da reunião anual da ANPED*. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por que? como? *Veritati*, n. 4, p. 73–80, 2004. Acessado em 22/02/2020. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/capacitacao/capacitacao_curso/jonei_barbosa2%20.doc>.

BARBOSA, J. C. A "contextualização" e a modelagem na educação matemática do ensino médio. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO*. Recife: SBEM, 2004. CD-ROM.

BARROS, R. *A utilização de jogos concretos na aprendizagem de indução finita no Ensino Superior*. 103 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, UFRPE, Recife, 2011.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, ano 8, n. 9/10, p. 49–57, abril 2001.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BORBA, M. C. Informática trará mudanças na educação brasileira. *Zetetike*, v. 4, n. 2, p. p.123–134, 1996.

BORBA, M. d. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. *Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas*. São José do Rio Preto: SBEM, 1997. 63-70 p.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP, 1996.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Introdução. Ensino Fundamental*. Brasília: MEC|SEF, 1998.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Introdução. Ensino Fundamental*. Brasília: MEC|SEF, 1999.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Introdução. Ensino Fundamental*. Brasília: MEC|SEF, 2010.

BRASIL, P. d. R. *Lei 9394/96–Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* 2020. Acessado em 20/02/2020. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.html>.

CAMPOS, T.; NUNES, T. Tendências atuais do ensino e aprendizagem da matemática. *Em aberto*, v. 14, n. 62, p. 3–7, 1994.

CORDEIRO, N. J. N.; CARDOZO, D. A.; SILVA, M. N. da. Histórias em quadrinhos: algumas conexões com a matemática. *Revista Educação Matemática em Foco*, v. 7, n. 3, p. 110–136, 2019.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa a educação matemática. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 5–11, 1993.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, U. et al. *Tempo-Memória na Educação:Reflexões*. São Paulo-SP, Montenegro-RS: BT Acadêmica; Ed. da FUNDARTE, 2016.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, L. R. *Matemática - Contexto e Aplicações*. Volume Único. Ensino Médio. São Paulo: Editora Ática, 2001.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In: *Conferência apresentada no 11º Congresso Internacional de Educação Matemática*. Monterrey, México: ICME, 2008.

FLAVELL, J. H. *El Desarrollo Cognitivo*. Madrid: Visor, 1976.

FRANCHI, R. H. de O. L. *A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia*. Dissertação (Mestrado) — IGCE/UNESP, Rio Claro, 1993. 148p.

FRANCO, C. M. R. et al. O jogo salto da rã como instrumento auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da função quadrática. *Educação, Ciência e Saúde*, v. 6, n. 1, p. 29–50, 2019.

GAMA, S. d. O. L. Quadros da história. considerações historiográficas sobre o uso de hqs como fontes. *O olho da História*, n. 16, julho 2011.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J. A matemática do contexto e o contexto na matemática. In: ____. *Matemática: Ensino Fundamental*. Brasília: Ministério da Educação, Sec. de Educação Básica, 2010. p. 248.

GOMES, T. de A.; RODRIGUES, C. K. A evolução das tendências da educação matemática e o enfoque da história da matemática no ensino. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, v. 4, n. 3, 2014.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000. Acessado em 22/03/2020. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334>.

GRAVETT, P. *Mangá: como o Japão reinventou os quadrinhos*. São Paulo: Conrad, 2004.

GUIMARAES, E. Uma caracterização ampla para a história em quadrinhos e seus limites com outras formas de expressão. In: *XXII Congresso Brasileiro De Ciências Da Comunicação*. Rio de Janeiro: InterCom, 1999.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. São Paulo: Cortez, 2008.

LEVY, P. *As tecnologias da inteligência: O futuro do pensamento na era da informárica*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1996.

LIMA, E. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 92 p.

MACHADO, N. J. A vida, o jogo, o projeto. In: ____. *Jogo e projeto: pontos e contrapontos*. São Paulo: Summus, 2006. p. 49–86.

MELO, M. D. P. Quadrinhos e comunicação: Uma história das histórias em quadrinhos. *Revista FSA (Centro Universitário Santo Agostinho)*, v. 7, n. 1, 2014.

MENEZES, A. C. S.; ARAUJO, L. M. *Currículo, contextualização e complexidade: espaço de interlocução de diferentes saberes*. Juazeiro-BA: Selo Editorial da RESAB, 2007. 33 p.

MENEZES, J. *Conhecimento, interdisciplinaridade e atividade de ensino com jogos matemáticos: uma proposta metodológica*. Recife: UFRPE, 2008.

NASCIMENTO, R. A. *Modelagem Matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação - UFPE, Recife, 2007.

NASCIMENTO, R. A. d. Monocórdio: contextualizando a matemática por meio da música. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 4, n. 1, p. 132–146, ago. 2018.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. L. *Na vida dez, na escola zero*. 3. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1989.

OLIVEIRA, N. *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Estudos Pós-Graduados da PUC-SP, 1997.

OLIVEIRA, S.; CALEJON, L. O jogo torre de hanói para o ensino de conceitos matemáticos. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 07, n. 4, p. 149–158, nov, 2016.

OLIVEIRA, T.; AMARAL, C. O uso e exploração de dois aplicativos de celulares, comics panel e stripcreator: uma experiência realizada no ensino de matemática. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 6, p. 29–43, dez, 2019. ISSN (2358-4122).

ONUCHIC, L. de la. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? In: *ANAIS da IV Jornada Nacional de educação Matemática*. Passo Fundo, RS: Universidade de Passo Fundo, 2012. Acessado em 17/03/2020. Disponível em: <http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>.

OREY, D. C. The ethnomathematics of the sioux tipi and cone. In: ____. Dordrecht, Netherlands: Kulwer Academic Publishers, 2000. p. 239–252. Acessado em 02/04/2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=000167&pid=S1517-97022012000400006000018&lng=em>.

PERIPOLLI, P.; BARIN, C. O uso pedagógico de histórias em quadrinhos no ensino de matemática. In: *CIET: EnPED*. São Carlos: UFSCar, 2018.

PIMENTEL, T.; VALE, I. Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, v. 21, n. 2, p. 29–50, Dez. 2012.

PONTE, J. P. da. O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, p. 3–9, 1990.

SANTOS, R. Aplicações da história em quadrinhos. *Comunicação & Educação*, n. 22, p. 46–51, dez. 2001.

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia*. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SOFFNER, R. Tecnologia e educação. um diálogo freire – papert. v. 19, n. 1, jan/jun 2013. Acessado em: 28/04/2020. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/viewFile/22353/18549.>

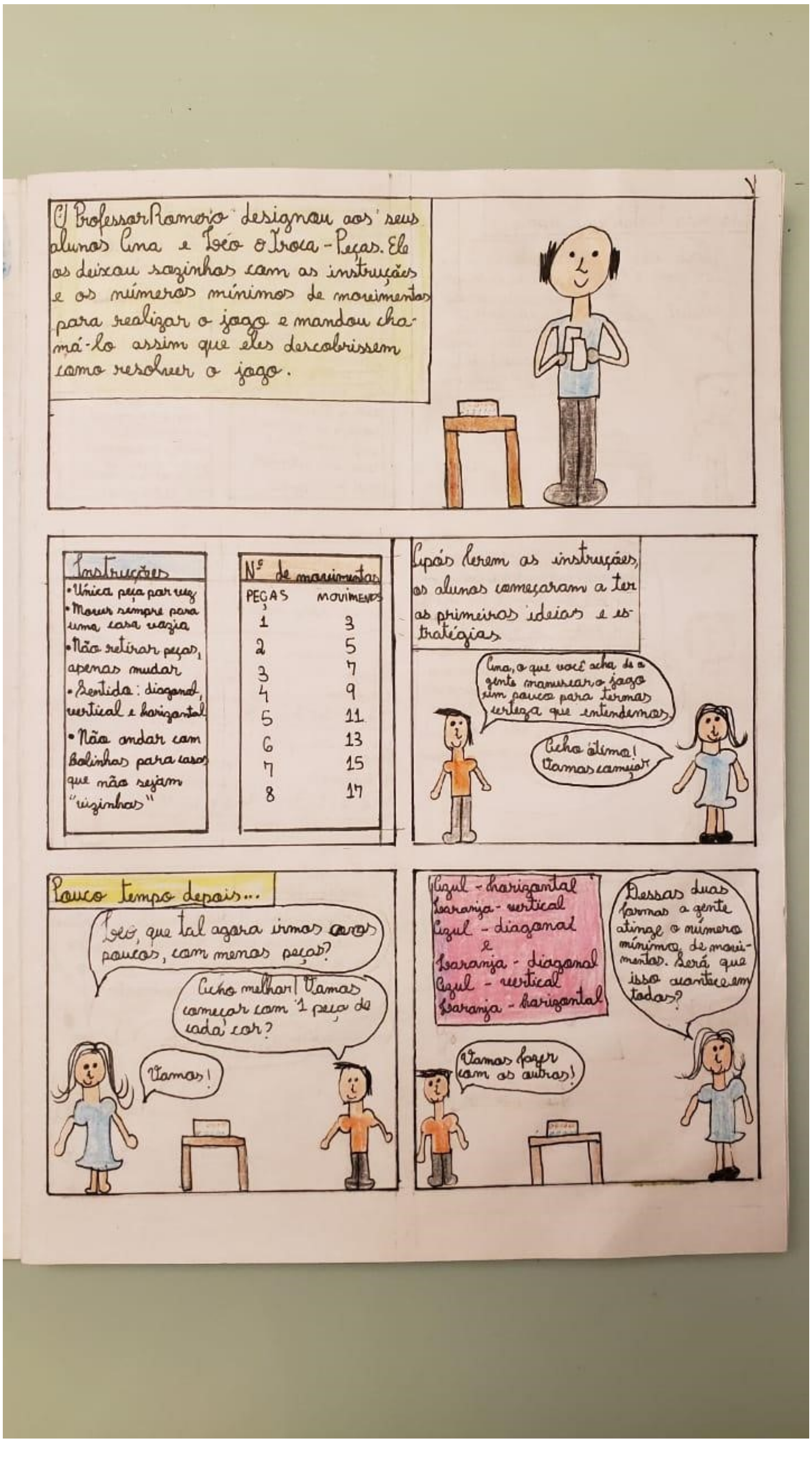
SPINELLI, W. *A construção do conhecimento entre o abstraire o contextualizar: o caso do ensino da matemática*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação - USP, São Paulo, 2011. 138p.

TEODORO, V. D.; VIEIRA, J.; CLÉRIGO, F. C. *Modellus, interactive modelling with mathematics [Software for Windows]*. San Mateo: Knowledge Revolution, 1997. Acessado em 23/04/2020. Disponível em: <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>.

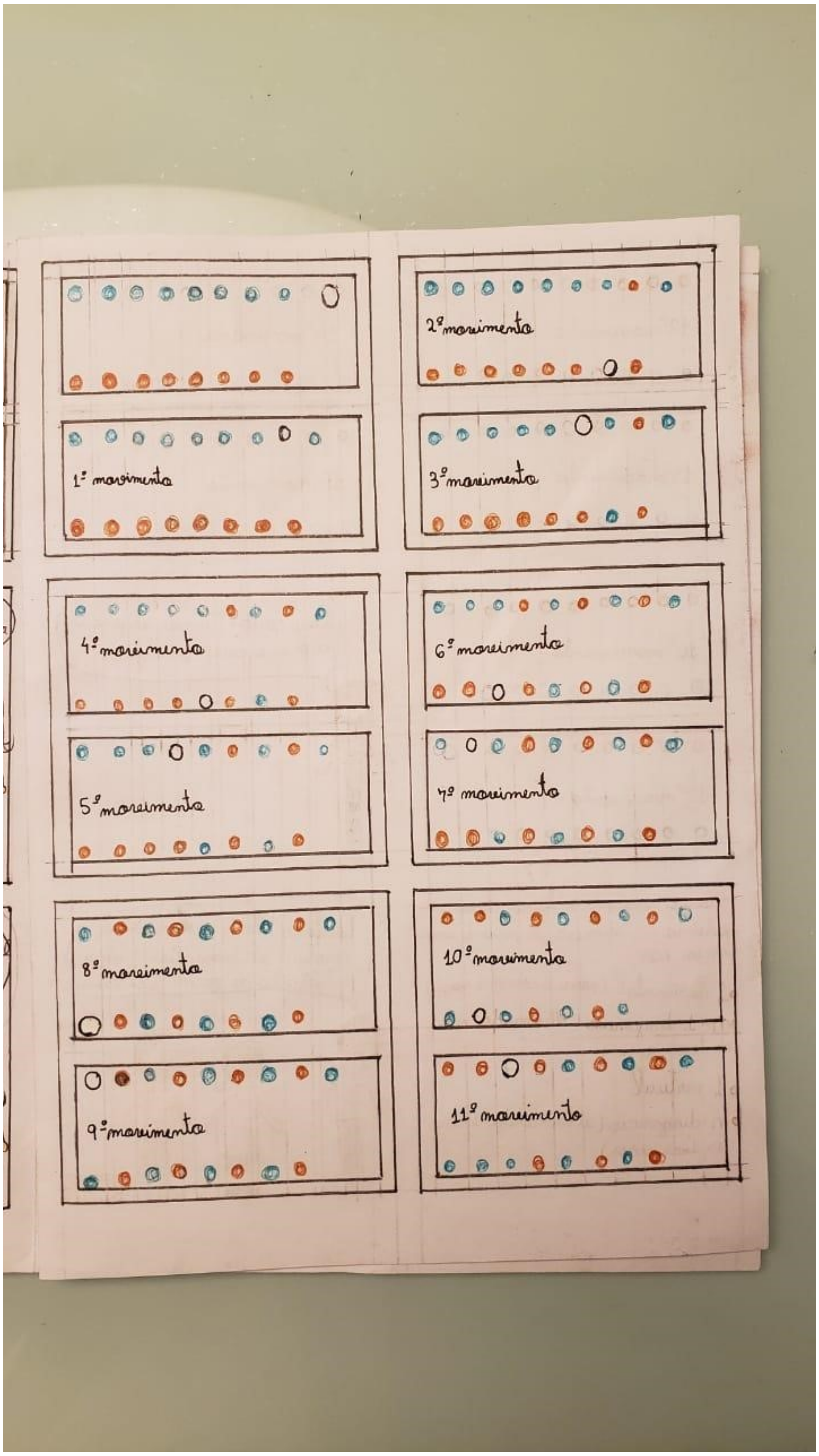
VALENTE, J. A. *O Computador na sociedade do conhecimento*. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

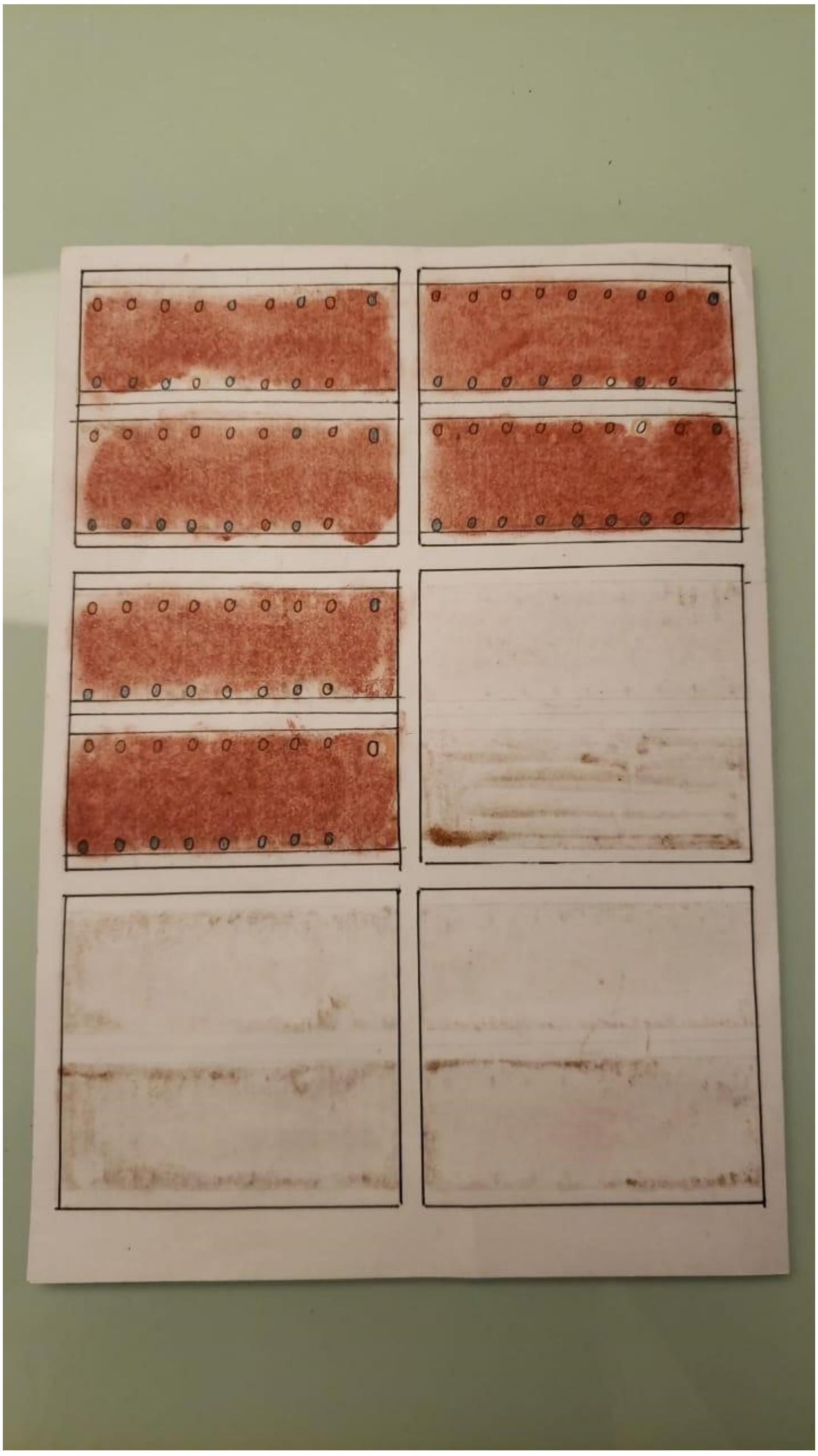
Anexos

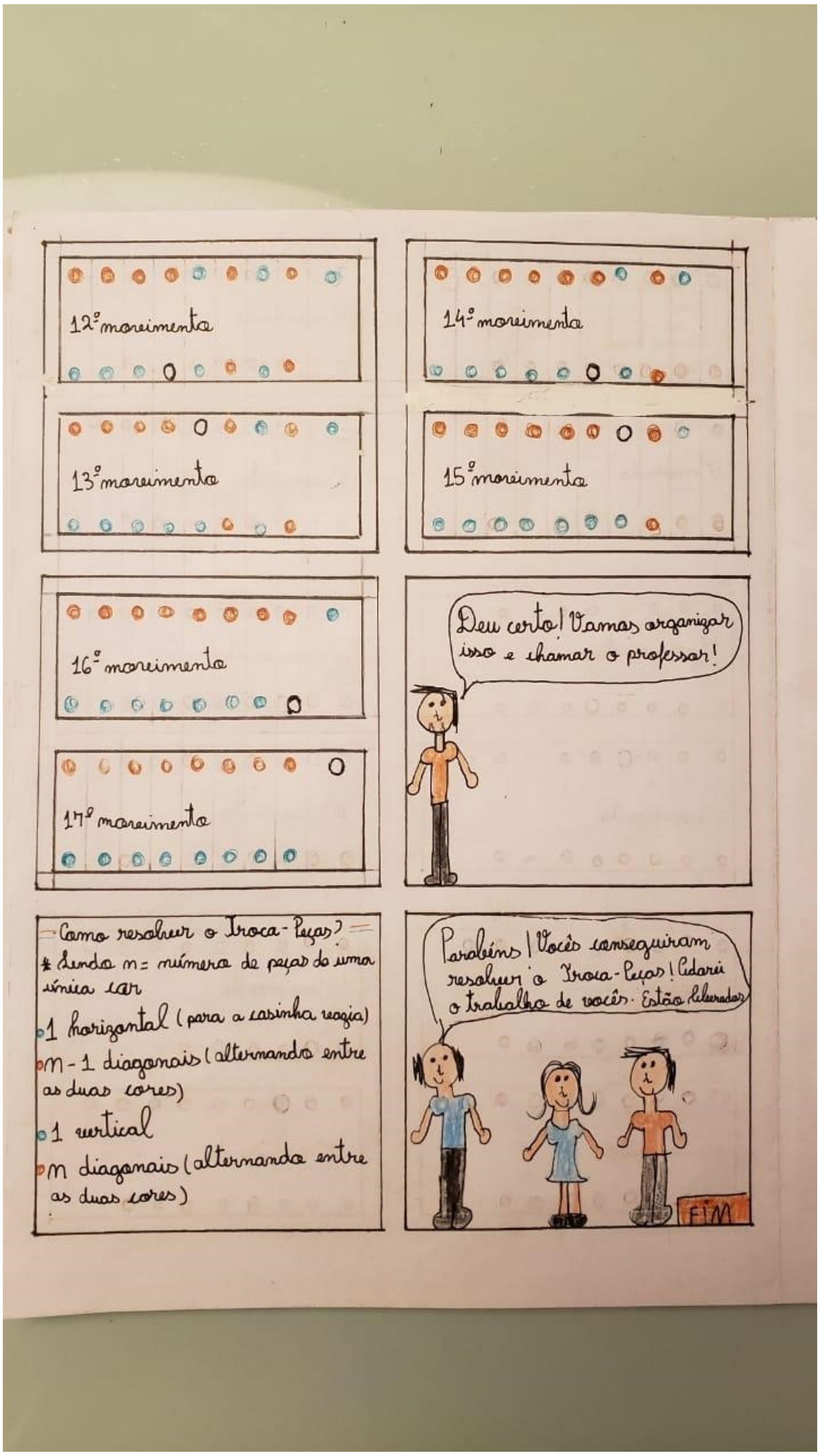
ANEXO 1 – FIGURAS DA PRODUÇÃO DO HQ DESENVOLVIDO, MANUALMENTE PELA ESTUDANTE A2.


O Professor Ramorio designou aos seus alunos Lina e Léo o Troca-Peças. Ele os deixou sozinhos com as instruções e os números mínimos de movimentos para realizar o jogo e mandou chamá-lo assim que eles descobrissem como resolver o jogo.
Instruções
• Única peça por vez
• Mover sempre para uma casa vazia
• Não retirar peças, apenas mudar
• Sentido: diagonal, vertical e horizontal
• Não andar com bolinhas para casas que não sejam "vizinhas"
Nº de movimentos
PEÇAS MOVIMENTOS
1 3
2 5
3 7
4 9
5 11
6 13
7 15
8 17
Após lerem as instruções, os alunos começaram a ter as primeiras ideias e estratégias
Lina, o que você acha de a gente manusear o jogo um pouco para termos certeza que entendemos.
Acho ótimo! Vamos começar
Pouco tempo depois...
Léo, que tal agora irmos aos poucos, com menos peças?
Acho melhor! Vamos começar com 1 peça de cada cor?
Vamos!
Azul - horizontal
Laranja - vertical
Azul - diagonal
e
Laranja - diagonal
Azul - vertical
Laranja - horizontal
Dessas duas formas a gente atinge o número mínimo de movimentos. Será que isso acontece em todas?
Vamos fazer com as outras!


Algumas tentativas depois...
Ana, acho que agora depois de tentar com 1, 2, 3 e 4 peças de cada cor a gente tem dados suficientes para estabelecer um padrão, não acha?
Acredito que sim! Vamos organizar nossos dado e repassar o que concluímos
1
azul -> horizontal
laranja -> vertical
azul -> diagonal
laranja -> diagonal
azul -> vertical
laranja -> horizontal
2
azul -> horizontal
laranja -> diagonal
azul -> vertical
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
3
azul -> horizontal
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
laranja -> vertical
azul -> diagonal
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
4
azul -> horizontal
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
laranja -> diagonal
azul -> vertical
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
laranja -> diagonal
azul -> diagonal
Todos começam da mesma forma: mantendo a bolinha da cor da fileira que sobra para a casinha que sobra, em todos os testes utilizamos o azul como sendo essa cor. Depois desse movimento, algumas diagonais que se alternam entre as duas cores, um movimento na vertical e mais algumas diagonais.
E o número de diagonais é sempre o dobro da quantidade de peças de uma única cor menos 1. Veja:
1 peça
1 diagonal
-> 2.1 - 1 = 1
2 peças
3 diagonais
-> 2.2 - 1 = 3
3 peças
5 diagonais
-> 2.3 - 1 = 5
4 peças
7 diagonais
-> 2.4 - 1 = 7
Sim! E o número de diagonais antes do movimento na vertical é n - 1 e depois n, sendo n o número de peças de uma única cor
Sendo assim, devemos realizar 1 horizontal, 7 diagonais, 1 vertical e 8 diagonais para resolver o jogo com 8 peças de cada cor com o menor número de movimentos possíveis.
Vamos testar!


1º movimento
2º movimento
3º movimento
4º movimento
5º movimento
6º movimento
7º movimento
8º movimento
9º movimento
10º movimento
11º movimento




12º movimento
14º movimento
13º movimento
15º movimento
16º movimento
17º movimento
Deu certo! Vamos organizar isso e chamar o professor!
Como resolver o Troca-Peças?
* Sendo n = número de peças de uma única cor
1 horizontal (para a casinha vazia)
n - 1 diagonais (alternando entre as duas cores)
1 vertical
n diagonais (alternando entre as duas cores)
Parabéns! Vocês conseguiram resolver o Troca-Peças! Adorei o trabalho de vocês. Estão liberados
FIM