UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ MARCOS DE LIMA BARBOSA

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM RECURSOS DIGITAIS PARA O ESTUDO DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

RECIFE – PE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTE DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ MARCOS DE LIMA BARBOSA

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM RECURSOS DIGITAIS PARA O ESTUDO DE OPERAÕES COM FRAÇÕES

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Elisângela Bastos de Melo Espíndola

RECIFE - PE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J83a Barbosa, José Marcos de Lima
ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM RECURSOS DIGITAIS PARA O ESTUDO DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES / José Marcos de Lima Barbosa. - 2021.
134 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo Espindola.
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2022.

1. Operações com frações. 2. Ensino Médio. 3. Recursos digitais. I. Espindola, Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 510

JOSÉ MARCOS DE LIMA BARBOSA

ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM RECURSOS DIGITAIS PARA O ESTUDO DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07/12/2021

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Elisângela Bastos de Mélo Espíndola (Orientadora)– UFRPE

____

Prof. Dr. Evanilson Landim Alves– UPE

____

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento– PROFMAT/UFRPE

Dedico este trabalho aos meus pais, por me ensinarem o valor da dignidade, à minha esposa por ter me acompanhado em todo esse processo e às minhas filhas por me ensinarem a ser uma pessoa melhor.

AGRADECIMENTOS

A todos os colegas da Turma do PROFMAT – 2019.1, da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, por terem me ajudado a ultrapassar todos os obstáculos encontrados durante o curso. Em particular, aos professores Jonas Nascimento, Paulo Santiago e Neiviton Silva pela parceria durante a pandemia da COVID-19, no ano de 2020.

Aos professores do PROFMAT da UFRPE por terem exercido sua profissão com dignidade e dedicação, nos levando a um patamar mais avançado na compreensão da matemática.

Aos coordenadores e funcionários do Mestrado PROFMAT da UFRPE pela presteza e dedicação.

À professora Laís Amanda da Hora, por sua contribuição neste trabalho.

Aos alunos que participaram da pesquisa por proporcionarem a efetivação deste trabalho.

À minha sobrinha Emanuelle Cavalcanti Bezerra e à amiga Nailene Lira pelos ensinamentos da língua inglesa.

Por fim, à Professora Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola, minha orientadora, sem a qual esse trabalho não seria possível.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar a contribuição de recursos digitais para a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio sobre operações com frações. Como subsídios teóricos, utilizamos as orientações curriculares sobre o uso de tecnologias para o estudo de conteúdos matemáticos no Ensino Médio, pesquisas sobre as dificuldades dos alunos em operar com números fracionários e acerca do uso de recursos específicos para o ensino desse tema, dentre outros. A pesquisa foi organizada em três etapas. Na primeira etapa, ocorreu a sondagem sobre qual das operações com frações os alunos apresentavam mais dificuldade, via questionário e ficha de exercícios. Na segunda etapa, foram propostas, socializadas e discutidas cinco atividades envolvendo o manuseio de recursos digitais, sendo três da plataforma PheT (Frações - Intro, Números Mistos e Frações - Igualdade) e duas com o GeoGebra. Na terceira etapa, aplicamos um questionário para que os alunos opinassem sobre a experiência do uso dos recursos digitais para o estudo do tema. Dentre os resultados, verificamos que os alunos do Ensino Médio ainda têm muita dificuldade nas operações com frações, sobretudo, na divisão. Além desse fato, verificamos que o uso das representações interativas, possibilitadas pelos recursos selecionados para este trabalho, contribuiu para um avanço na compreensão dos alunos sobre o conceito de fração e do uso das regras utilizadas. Grosso modo, os alunos indicaram gostar de usar os recursos apresentados e afirmaram que outras aulas poderiam ser melhores e mais agradáveis com o uso de recursos digitais. Dessa forma, constatamos que um recurso interativo, desde que bem escolhido e explorado pelo professor, pode fazer o aluno ter um maior interesse pelas aulas e ajudar na compreensão de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Operações com frações. Ensino Médio. Recursos digitais.

ABSTRACT

This work intends to evaluate the contribution of digital resources for the learning of operations with fractions by High School students. As theoretical tools, we used the curricular orientations about the usage of technologies in the studying of mathematical content in High School, researches on the students's difficulties on working with fractional numbers and on the usage of specific digital means for the teaching of this topic, among others. The research was organized in three stages. In the first stage, an investigation took part into which of the operations with fractions the students presented more difficulties, via questionnaire and sheet of exercises. In the second stage it was proposed, socialized and discussed five activities involving the usage of digital resources, three of them from PheT platform (Fractions - Intro, Mixed Numbers and Fractions - Equality) and two of them with Geogebra. In the third stage, we deployed a questionnaire so the students could talk about their experience in using digital resources to study the topic. In the results we verified that High School students still have lots of difficulties with operations with fractions, especially with division. Besides that fact, we verified that the use of interactive representations, made possible by the resources selected for this assignment, contributed to an advance in the students's comprehension of the concept of fractions and the rules used. Roughly speaking, the students indicated that they like using the resources that were presented to them and they said that classes could be better, more enjoyable with the use of digital resources. Thus, we verified that an interactive resource, if it is well chosen and well explored by the teacher, can make students have more interest in the classes and it can help them to understand mathematical concepts.

Keywords: Operations with fractions. High School. Digital resources.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EJA	Educação de Jovens e Adultos
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FUFS	Faculdade Unidas de Feira de Santana
IFPI	Instituto Federal do Piauí
IMPA	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFABC	Universidade Federal do ABC
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFCA	Universidade Federal do Cariri
UFERSA	Universidade Federal Rural do Semi Árido
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFG	Universidade Federal de Goiás
UFGD	Universidade Federal da Grande Dourados
UFMA	Universidade Federal do Maranhão
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
UFOPA	Universidade Federal do Oeste do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRB	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UFSE	Universidade Federal de Sergipe

UFSJ	Universidade Federal de São João Del Rei
UFT	Universidade Federal do Tocantins
UNIR	Fundação Universidade Federal de Rondônia
UNIRIO	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
UNIVASF	Universidade Federal do Vale do São Francisco
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.. 13
1.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA... 13
1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA.. 20
1.3 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS... 21
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.. 22
2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES... 22
2.1.1 Notas históricas... 22
2.1.2 Dificuldades dos alunos em operações com frações.......... 26
2.1.3 As operações de adição e subtração................................. 31
2.1.4 A operação de multiplicação de frações............................ 37
2.1.5 A operação de divisão de frações..................................... 40
2.2 O USO DE RECURSOS DIGITAIS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA... 44
2.2.1 Matemática e o uso de tecnologias no Ensino Médio......... 45
2.2.1.1 O GeoGebra.. 47
2.2.1.2 A plataforma Physics Educacional Technology (PhET).. 49
3 METODOLOGIA.. 51
3.1 PRIMEIRA ETAPA... 53
3.2 SEGUNDA ETAPA... 57
3.2.1 Atividade 1... 58
3.2.2 Atividade 2... 60
3.2.3 Atividade 3... 62
3.2.4 Atividade 4... 65

3.2.5 Atividade 5 67
3.3 TERCEIRA ETAPA 72
4 RESULTADOS 74
4.1 RESULTADOS DA PRIMEIRA ETAPA 74
4.1.1 Resultados do Questionário 74
4.1.2 Resultados do teste diagnóstico 76
4.2 RESULTADOS DA SEGUNDA ETAPA 84
4.2.1 Resultados da primeira e segunda fase 84
4.2.2 Resultados da terceira fase 85
4.2.3 Resultados da quarta fase 97
4.3 RESULTADOS DA TERCEIRA ETAPA 113
4.3.1 Resposta do questionário avaliativo 113
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 118
REFERÊNCIAS 122
APÊNDICE A – Quadro 25 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2020) 126
APÊNDICE B – Quadro 26 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2019) 127
APÊNDICE C – Quadro 27 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2018) 129
APÊNDICE D – Quadro 29 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2017) 131
APÊNDICE E – Quadro 30 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2016) 133

1 INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

Em nossa experiência como professor de Matemática, na Educação Básica, por mais de 20 anos, percebemos que os alunos apresentam muitas dificuldades no aprendizado das frações e passam por essa etapa sem estabelecer as bases necessárias para este conhecimento. Corroborando com esta percepção, muitos colegas, professores das áreas de Física e Química se queixam que os alunos chegam ao Ensino Médio sem saber operar com frações. De sorte que nos interessamos, inicialmente, por levantar pesquisas versando sobre propostas de atividades para melhorar a aprendizagem de Fração.

Em particular, constatamos que o tema “Fração” tem sido objeto de diversas pesquisas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). No Quadro 1 temos o levantamento que realizamos no site do PROFMAT, usando os termos de busca “fração e frações” nos títulos e resumos das dissertações. No período de 2016-2020, identificamos, neste programa, 51 dissertações produzidas sobre este tema.

Quadro 1 - Levantamento de dissertações no PROFMAT sobre o tema Fração - 2016-2020

Ano	Quantidade de dissertações
2016	9
2017	12
2018	9
2019	14
2020	7
Total	51

Fonte: autoria própria.

Dentre as 7 dissertações do PROFMAT (Quadro 1), identificadas em 2020, apenas a de Conrado (2020) contou com a efetiva utilização de recursos em sala de aula e participação de alunos da Educação Básica.

Conrado (2020) buscou investigar o impacto do ensino de frações na aprendizagem de Matemática na Educação de Jovens e Adultos (EJA), utilizando situações desencadeadoras voltadas para a realidade dos alunos. Para tanto, desenvolveu uma sequência didática para o estudo de frações a partir de atividades, tais como: preparo de pizza, jogos (dominó e memória de frações), dobraduras, líquidos em recipientes de vidro, dentre outros. Destaca-se sobre os resultados desta investigação que:

> O ensino de frações, utilizando situações desencadeadoras voltadas para a realidade dos discentes, tem um impacto positivo na aprendizagem de Matemática na EJA. Com a metodologia adotada para a execução das atividades, percebeu-se um empenho dos alunos, os quais procuraram participar das aulas relatando as experiências vivenciadas ao longo de suas vidas, quer seja na escola quer seja em outro ambiente fora desta (CONRADO, 2020, p.80).

No ano de 2019, das 14 dissertações desenvolvidas no PROFMAT com o tema Frações, 6 versaram sobre a aplicação de atividades em sala de aula.

Ribeiro (2019) buscou desenvolver uma forma atrativa e dinâmica de aprendizagem das frações para facilitar a compreensão e a assimilação desse conteúdo em turmas de 6º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, propôs uma sequência didática com atividades como: Dominó de frações; jogo "papa todas de frações", jogo "memória dos racionais", tangram, discos de frações e preparo de bolo e cobertura de chocolate. No que concerne aos resultados, assinala-se que:

> Em linhas gerais, foram positivos, dado que os recursos utilizados durante o decorrer de toda a pesquisa apontaram satisfatoriamente para um ensino-aprendizagem de qualidade e significativo, já que motivaram os alunos, estimulando a colaboração, a concentração, o interesse e a socialização deles (RIBEIRO, 2019, p.148).

Destaca-se na dissertação de Pacheco (2019, p.66), a apresentação de uma abordagem sobre a representação dos números reais por meio das frações contínuas, sugerindo-se atividades às quais possam ser trabalhadas no Ensino Médio. Em particular, foram utilizados os seguintes materiais: folha quadriculada, régua, lápis de cor e folhas de rascunho. Aponta-se nos resultados que: "as folhas quadriculadas tornaram mais interessante a aula, pois os alunos no final dos exercícios adquiriram habilidade para escolha da escala, um ganho que é fundamental em outras disciplinas como a Geografia” (PACHECO, 2019, p. 66).

No trabalho de Porto (2019), verifica-se a elaboração, aplicação e análise de duas sequências didáticas, uma para a abordagem das operações com frações associadas à representação figural, e a outra para os produtos notáveis relacionados com as áreas de retângulos. Neste trabalho pode-se observar:

> Na turma do 6º ano os alunos tiveram um melhor desempenho nas operações de soma e subtração, em especial quando as frações tinham os mesmos denominadores, e também na operação de multiplicação de frações. A maior dificuldade nessas situações foi nos itens relacionados à operação de divisão [...]. Na turma do 8º ano os alunos desenvolveram satisfatoriamente a expansão dos produtos notáveis e o desempenho foi melhor quando os itens das atividades envolviam somente números inteiros. A inserção de frações em alguns itens das atividades influenciou negativamente o percentual de acertos, resultado este previsto na análise a priori das atividades, evidenciando um possível obstáculo didático (PORTO, 2019, p. 88-89).

Para o seu trabalho, Santos (2019), baseou-se no Método de Singapura que consiste na junção de três teorias: a primeira teoria se refere à abordagem Concreto-Pictórico- Abstrato (CPA) que tem relação com o trabalho do americano Jerome Bruner. A segunda, são os princípios de Variabilidade Matemática e Perspectiva, do educador húngaro Zoltán Paul Dienes (o criador dos Blocos Lógicos), defensor que para construir um conceito deve ser levado em consideração diversos exemplos, contextos e representações. E a terceira teoria é o trabalho do psicólogo inglês Richard Skemp sobre a importância de se estabelecer conexões para que o conhecimento seja sólido e duradouro, ou seja, tudo deve estar relacionado. Para tanto, foi aplicado um teste diagnóstico com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Após, realizou-se a apresentação do conteúdo em sala de aula e, por fim, um teste avaliativo. Em sua conclusão, Santos (2019, p. 121), afirmou que: “os números de acertos cresceram significativamente, principalmente no quesito frações equivalentes”.

Mendonça (2019) construiu com alunos do 1º ano do Ensino Médio, materiais pedagógicos como metodologia de ensino e aprendizagem de frações e produtos notáveis. Após 60 alunos responderem um questionário diagnóstico, foram selecionados 20 alunos, isto é, aqueles que apresentaram mais dificuldades nas questões propostas. Depois de apresentadas algumas opções de figuras geométricas e materiais, os alunos escolheram construir “discos de frações” usando folhas de EVA. Para a abordagem dos produtos notáveis a figura escolhida foi o quadrado. A participação dos alunos na construção do material usado, para aprendizagem dos conteúdos, fez com que eles vivenciassem o processo de aprendizagem na prática, além de deixar o ambiente da sala de aula mais leve e prazeroso, como acentua Mendonça (2019). Ainda sobre esse trabalho, temos que:

> O resultado da pesquisa responde positivamente à pergunta norteadora: “Será que, ao colocar o aluno para desenvolver a construção e manipulação de materiais concretos, pode ajudar no ensino aprendizagem?” A metodologia aplicada permitiu aos alunos vivenciar, tocar, manipular o conteúdo que eles apresentavam dificuldades em interpretar a escrita, a teoria e sua definição. Houve compreensão do inteiro, do significado das partes e da simbologia da fração, conforme defende Scolaro (2008). Os alunos puderam construir o conhecimento, aproximando a teoria da prática, isto é, da aprendizagem real, diminuindo as dificuldades existentes em relação ao conteúdo. Após compreenderem que as frações estão presentes em seu cotidiano e conseguirem exemplificar essas com materiais concretos, os alunos enriqueceram o aprendizado, construindo uma base da teoria e aplicando o conhecimento adquirido para resolver os exercícios, alcançando dessa forma uma prática educativa bem-sucedida [...] (MENDONÇA, 2019, p. 79).

Neis (2019) trabalhou com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, usando materiais concretos para o ensino de frações, tais como: Pião reciclado, disco de frações, dominó de frações e corrida das frações. Inicialmente foi aplicado um questionário diagnóstico com questões relativas às frações. Feito esse diagnóstico, partiu-se para o estudo das frações com os referidos materiais, que foram construídos pelos alunos com a orientação do professor. Neis (2019) aponta as seguintes considerações sobre o resultado da sua pesquisa:

> Fazendo uma análise de todo o trabalho, percebemos um avanço significativo nos alunos após a aplicação do primeiro questionário. Assim entende-se que é relevante trabalhar com os materiais manipuláveis, possivelmente irá trazer bons resultados. Além do mais, é uma maneira de estimular os alunos a gostarem do conteúdo e da disciplina de matemática (NEIS, 2019, p. 56).

No ano de 2018, das 8 dissertações desenvolvidas no PROFMAT com o tema Frações, 2 foram voltadas à aplicação de atividades em sala de aula.

Portela (2018) procurou em seu trabalho fazer um estudo dos erros cometidos por estudantes do 9º ano de uma Escola Pública, quando esses estudantes aplicavam os números racionais no conteúdo de função afim. Para isso foi aplicado um questionário diagnóstico que tratava da resolução de funções afins com números racionais. Após a identificação dos erros cometidos pelos alunos foi criada uma atividade denominada Atividade de Análise do Erro (AAE) com a seleção dos erros recorrentes dos alunos e a *posteriori* exposição de tal seleção a eles. Essa atividade tinha por objetivo verificar se os discentes identificavam os erros e acertos em cada item da questão. Após essa atividade foi proposto um novo questionário aos alunos nos mesmos moldes do primeiro, com o objetivo de avaliar o progresso da turma. Em sua conclusão, acentua Portela (2018):

> Diante dos resultados encontrados na pesquisa, acredita-se que um trabalho contínuo com o uso da análise de erros como metodologia de ensino trará imensas vantagens para o aprendizado dos alunos, construindo e reconstruindo seus conhecimentos. Sendo assim, os erros podem ser considerados uma ferramenta essencial para ajudar professores e alunos em sua caminhada na busca de uma aprendizagem centrada em elevar o grau de conhecimento dos educandos e identificar problemas de acordo com o nível dos estudantes e as séries envolvidas. Quando os erros são explorados, podem ser superados, pois erros e acertos fazem parte do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o estudo da análise dos erros permite compreender o processo cognitivo dos alunos e ajudá-los a construir novos conhecimentos (PORTELA, 2018, p. 59).

Verifica-se na dissertação de Figueiredo (2018), a apresentação de uma sequência didática constituída por questionário diagnóstico, aulas expositivas, uso de jogos e questionário avaliativo. Essa sequência didática foi aplicada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental (A e B) de uma escola municipal. De modo que na Turma A, ocorreu o uso de jogos, enquanto na Turma B, ocorreram apenas aulas expositivas, tendo as duas abordagens a finalidade do estudo de frações. Na turma que usou a abordagem lúdica, foram desenvolvidos os seguintes jogos: Inversão, papa todas, boliche de frações e dominó de frações. A ideia foi comparar o aprendizado das duas turmas. Em sua conclusão, afirma Figueiredo (2018):

> No desenvolvimento das atividades na turma de 7º ano “A” os educandos tiveram mais interesse pelo conteúdo de frações. Mesmo não dando os resultados esperados, pelo envolvimento dos alunos, espera-se que se apropriaram dos conhecimentos de forma construtiva e divertida (FIGUEIREDO, 2018, p. 52).

No ano de 2017, das 11 dissertações desenvolvidas no PROFMAT sobre Frações, 3 foram desenvolvidas com aplicação de atividades em sala de aula.

Cintra (2017), em sua dissertação, trabalhou os conceitos de fração usando o método do Modelo de Barras de Singapura com alunos do 7º ano de uma Escola Estadual de São Carlos - SP. Para tanto apresentou uma sequência didática que se iniciou com uma avaliação diagnóstica com 10 questões de múltipla escolha, retiradas de avaliações do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP’s). Após a avaliação das dificuldades dos alunos foi realizada uma atividade composta de 5 aulas, baseadas no livro “My Pals are Here!”, volumes 3B, 4A e 5A da Coleção de Livros de Singapura. A avaliação final teve o propósito de verificar se houve avanços dos alunos em relação à avaliação diagnóstica inicial. Em suas considerações sobre os resultados deste trabalho, afirma Cintra (2017):

> Pelos resultados descritos nos capítulos anteriores acreditamos que o método configura-se uma estratégia de ensino capaz de alcançar resultados significativos quanto à aprendizagem do conteúdo de frações. Salientamos que tal método não restringe-se apenas a esse conteúdo, podendo estender-se à demais tópicos do ensino de matemática, como é possível observar nos livros “My Pals Are Here!” de Singapura e na dissertação de Queiroz (2014), onde este faz uso do método para o ensino de Pré-Álgebra e Álgebra (CINTRA, 2017, p. 153).

Vianna (2017) propôs implementar as ideias de um tratamento probabilístico-estatístico ao ensino de frações, para alunos do 6º ano de uma Escola da Rede Estadual do Rio de Janeiro. Após ser visto todo o conteúdo de fração, Vianna fez um estudo de caso a partir da aplicação de atividades contextualizadas no dia a dia com o objetivo de reforçar o conteúdo já estudado em sala de aula. Como resultado da pesquisa, este autor verificou:

> Foi possível constatar que após aprenderem o conceito de frações, os alunos do Ensino Fundamental podem adquirir o conceito científico de frações como Probabilidade e Estatística. Foi verificado que a Estatística e a Probabilidade devem ser ensinados a todos os indivíduos e em todos os níveis da educação num regime em espiral, para que possam utilizar esses conhecimentos básicos no exercício da sua cidadania. Atualmente, a proposta curricular em matemática enfatiza que o estudo deles é indispensável para que os indivíduos possam analisar índice de custos de vida, realizarem pesquisas, terem juízos sobre a escolha de amostras e tomarem decisões em diversas situações do nosso dia a dia (VIANNA, 2017, p. 63).

Loscha Filho (2017), buscou apresentar o conteúdo de frações de uma forma mais atrativa para os alunos e, para isso, realizou uma sequência didática na forma de oficina, distribuída em 7 encontros. Sua pesquisa teve como sujeitos alunos da Rede Pública Municipal do Prado-BA. Inicialmente, foi proposto um questionário diagnóstico com os alunos sobre o conceito de fração. Com base nesse diagnóstico foram entrevistados 12 professores sobre o conhecimento geral dos alunos sobre questões, tais como: Os alunos assimilam o que estudam? Quais os motivos que levam os alunos a não assimilarem o conceito de fração? Concluída a fase inicial foi aplicada a sequência didática. Os materiais usados nas oficinas foram os seguintes: lápis, borracha, papel ofício A4, calculadora, material dourado e a Escala Cuisenaire. De acordo com Loscha Filho (2017):

> Com base nos dados da pesquisa e análise dos resultados dos alunos e professores, chegamos a conclusão de que o estudo das frações está aquém do ideal, pois estamos formando alunos com pouca ou nenhuma base conceitual, que pecam nas definições mais simples e que não conseguem operacionar os cálculos (LOSCHA FILHO, 2017, p. 68).

No ano de 2016, das 9 dissertações desenvolvidas no PROFMAT com o tema Frações, identificamos que 2 dessas versaram sobre a aplicação de atividades em sala de aula.

Rodrigues (2016) aplicou uma sequência didática com alunos do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual situada no Município de Petrolina - PE. No primeiro momento, foi realizada uma atividade diagnóstica, com o objetivo de identificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes no conteúdo de frações. No segundo momento, foi construído com os alunos o material concreto com cartolinas de cores diferentes, que consistiu em círculos formados por inteiro, meios, terços, quartos, quintos, sextos, oitavos, nonos, décimos e doze avos. A partir daí foram propostas questões relativas ao tema fração para que os alunos resolvessem usando o material construído. Em sua conclusão, pondera Rodrigues (2016):

> A utilização do material concreto possibilitou uma aprendizagem aos educandos, fazendo-os compreenderem o significado das frações, classificando-as em maior, menor ou igual, levando-os a compreenderem que os diferentes tipos de frações podem formar frações maiores que a unidade, realizando operações, não utilizando apenas regras, mas, sim, construindo seu próprio conhecimento, sendo agente de sua aprendizagem, levando-os ao desenvolvimento do raciocínio e do pensamento crítico, fazendo a ligação entre teoria e prática (RODRIGUES, 2016, p. 22).

Rodrigues (2016) propôs em seu trabalho duas sequências didáticas com alunos do 7º ano de uma escola pública, situada no Município de Petrolina - PE, para o estudo de frações e áreas usando o tangram. Cada sequência continha 5 atividades e foram desenvolvidas em 4 encontros com os alunos. O tangram foi apresentado como uma ferramenta para a construção do conceito de fração e de área, que por meio de reflexões os alunos foram construindo gradativamente. Como resultado do seu trabalho, aponta Rodrigues (2016):

> Com esta metodologia apresentada esperamos incentivar o uso do tangram em sala de aula, pois verificamos por meio das respostas dos alunos aos

> questionários propostos e das observações realizadas e aqui relatadas, que o Tangram, enquanto recurso de ensino contribuiu sim, qualitativamente e quantitativamente, de significativa para a construção e fixação dos conceitos de área e fração de forma prazerosa e envolvente, aumentando também, o nível de concentração, interesse, participação e motivação dos alunos (RODRIGUES, 2016, p. 28-29).

Após o levantamento das dissertações do PROFMAT dos anos de 2016 a 2020, verificamos que 14 dissertações, dentre as 51 dissertações identificadas sobre o tema Frações, versaram sobre a aplicação de atividades em sala de aula. Contudo, ao analisarmos cada uma dessas dissertações, percebemos que nenhuma delas voltou-se para o uso de algum recurso digital, bem como, constatamos uma escassez de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema envolvendo alunos do Ensino Médio.

Em virtude do exposto, consideramos relevante desenvolvermos uma pesquisa nos norteando pela seguinte questão: Qual a contribuição de recursos digitais para a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio sobre operações com frações? Para tanto, tecemos os seguintes objetivos.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

OBJETIVO GERAL

Analisar a contribuição de uma proposta de atividades com recursos digitais para o estudo de operações com frações.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diagnosticar as dificuldades de alunos do Ensino Médio sobre operações com frações.
- Vivenciar uma sequência de atividades para o estudo de operações com frações com alunos do Ensino Médio, usando recursos digitais.
- Analisar os resultados das atividades vivenciadas como os alunos do Ensino Médio.

1.3 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Além deste primeiro capítulo, em que buscamos apresentar a problemática e os objetivos da presente pesquisa, elaboramos um segundo capítulo intitulado Fundamentação Teórica, no qual esboçamos algumas considerações sobre: notas históricas sobre as frações e dificuldades dos alunos acerca das operações com frações e uso de recursos digitais para o ensino de Matemática, em particular no Ensino Médio. No terceiro expomos a metodologia com a descrição dos procedimentos de coleta e análise de dados das três etapas da pesquisa. No quarto capítulo expomos os resultados da pesquisa e por fim apresentamos algumas considerações e conclusões sobre o trabalho realizado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

2.1.1 Notas históricas

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) inclui entre as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 267).

A importância do contexto histórico para o aprendizado dos conceitos matemáticos também se faz presente nos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco. Este documento, no tópico "Fazer Matemática na Sala de Aula", destaca sobre a evolução histórica dos conceitos matemáticos:

> Uma das formas mais eficazes de atribuir significado aos conceitos matemáticos é contextualizá-los em seu processo de evolução histórica [...]. Em primeiro lugar, é importante que as articulações da Matemática com as necessidades humanas de cada época sejam evidenciadas. Mais importante ainda, é preciso levar em conta as contribuições do processo de construção histórica dos conceitos e procedimentos matemáticos para a superação das dificuldades de aprendizagem desses conteúdos em sala de aula. [...]. (PERNAMBUCO, 2012, p. 34).

Assim, neste tópico, faremos uma pequena abordagem histórica sobre o surgimento das frações a fim de melhor compreendermos como é possível apresentar este conteúdo, em sala de aula, a partir do conceito de "número", dentre outros aspectos.

Segundo Boyer (1974, p. 1) "o desenvolvimento do conceito de número foi um processo longo e gradual". Nascimento (2002) destaca em seu trabalho que esse processo, envolveu várias civilizações, como: os Maias, os Egípcios, os Hindus, os Romanos, os chineses, os Babilônios, os Árabes, etc. Tal processo é um indício da complexidade da ideia de número. Por exemplo, explicar a alguém o que é o "cinco" é algo de difícil exercício para muitas pessoas, ainda no nosso século.

Essa discussão nos coloca diante da importância que foi dada ao processo de construção do conceito de número e a organização dos conjuntos numéricos, que levou séculos e mobilizou diversas civilizações.

> A ideia de número finalmente tornou-se suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente a princípio somente na linguagem dos sinais [...]. Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré-histórico às vezes registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso (BOYER, 1974, p. 2).

Não se sabe exatamente quando e onde surgiu a ideia de número, mas sabemos que esse conceito surgiu há muito tempo atrás, possivelmente, em lugares diferentes e, como quase toda a Matemática com a necessidade da civilização humana de resolver seus problemas do cotidiano, como acentua Boyer (1974):

> Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos de número, representa um grande passo para a Matemática Moderna. É improvável que isso tenha sido a descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, e pode ter-se desenvolvido tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez haja300.000 anos (BOYER, 1974, p. 1).

De acordo com Celestino (2017, p.3), “o uso dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 é algo tão natural que, às vezes, parece que o ser humano ***já nasceu sabendo*** como manipulá-los.” No entanto, a História da Matemática sugere que as civilizações primitivas só contavam até dois. Boyer (1974, p. 2) acentua: “evidentemente nossos antepassados a princípio só contavam até dois, qualquer conjunto, além desse nível era dado como muitos”.

Cada civilização desenvolveu o seu sistema numérico, nos quais, inicialmente, só apareciam os números naturais, uma vez que uma das primeiras necessidades dessas civilizações era contar. O desenvolvimento do conceito de fração surgiu, possivelmente, quando se percebeu que os números naturais eram insuficientes para representar as medidas.

Assim, grosso modo, podemos dizer que os números naturais surgiram com a necessidade de contar e as frações com a necessidade de medir sem, contudo, podermos afirmar, precisamente, suas origens. Segundo Boyer (1974, p. 4) “afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”.

A maioria dos historiadores concordam que as frações surgiram no Egito Antigo por volta de 3.000 a.C (antes de Cristo). Essa ideia é baseada nas informações contidas no Papiro de Rhynd, conhecido por esse nome por ter sido comprado em 1958 por Henry Rhynd. Esse documento, também, é conhecido como o Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.

A história mais contada sobre o surgimento das frações nessa civilização é destacada por Celestino (2017), em seu trabalho intitulado: As Frações em Algumas Civilizações Antigas.

> Por volta do ano 3000 a.C., o faraó Sesóstris repartiu o solo do Egito, às margens do rio Nilo, entre seus habitantes, mas, uma vez por ano, as águas do Nilo sub muitos metros além de seu leito normal e quando voltavam a baixar as marcações de divisão das terras estavam perdidas. Então os funcionários do governo eram orientados a traçar novamente os limites do terreno de cada habitante e para fazer a medição eles esticavam uma corda, com uma unidade de medida já assinalada no comprimento dessa corda, através de nós, e verificavam quantas vezes aquela unidade cabia nos lados do terreno. No entanto, dificilmente aquela unidade de medida escolhida cabia exatamente no valor de um número inteiro de vezes nos lados do terreno e foi por esta razão que os egípcios criaram uma nova compreensão do conceito de número como medida: o número fracionário (CELESTINO, 2017, p. 9).

Ainda, de acordo com Celestino (2017): “As frações foram usadas por vários povos, de vários jeitos diferentes e com bases e notações que dependiam de cada civilização, cada uma elaborou sua própria maneira de representar frações, da mesma forma que aconteceu com os inteiros” (CELESTINO, 2017, p 12).

Inicialmente, as frações não eram consideradas como números e seu conceito era diferente do conceito que temos nos dias de hoje.

> Em suas primeiras formas as frações estavam limitadas a representar uma parte de algum objeto, o que hoje em dia chamamos de frações unitárias, pois o fato de o numerador ser sempre 1 facilitava a escrita das frações. Os egípcios parecem ter sido os primeiros a inserir a ideia de fração em seu sistema de numeração, mas além deles outros povos antigos também conheciam e utilizavam a ideia de fração e mesmo sem regras estabelecidas para trabalhar com elas estes povos já possuíam símbolos para representá-las (CELESTINO, 2017, p. 9).

De acordo com Boyer (1974, p. 10), os egípcios, com exceção da fração $\frac{2}{3}$, só admitiam as frações unitárias, ou seja, as frações de numeradores iguais a 1. Os egípcios “atribuíam à fração $\frac{2}{3}$ um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar um terço de um número, primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso.” Eles também tinham conhecimento e usavam o fato de dois terços da fração $\frac{1}{p}$ ser igual a soma de $\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}$. Qualquer outra fração era representada como a soma de frações unitárias. Por exemplo, a fração $\frac{3}{5}$ era representada no Papiro de Rhind, da seguinte forma: $\mathbf{\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}$. Segundo Boyer (1974, p. 10), "para facilitar a redução de frações próprias ***mistas*** à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo $\frac{2}{n}$ como soma de frações unitárias, para todos os valores de ***n*** de 2 a 101."

Apesar de se acreditar que as frações surgiram no Egito Antigo, é sabido que outras civilizações também conheciam e usavam as frações.

> Os babilônios desenvolveram também sua própria forma de representar as frações. Eles trabalhavam com o sistema sexagesimal (base 60) e, ao contrário dos egípcios, usavam a mesma notação tanto para números inteiros quanto para os fracionários, bastante análogo à representação atual (LOSCHA FILHO, 2017, p. 24).

Sobre a civilização grega, Celestino (2017), acrescenta:

> A Grécia conheceu os sistemas egípcio e babilônio e os astrônomos gregos passaram a utilizar as frações sexagesimais em suas medidas, por isso dos graus, minutos e segundos para medida de ângulos. O uso dessas frações era comum em trabalhos técnicos e mesmo quando o sistema decimal é adotado para números inteiros, o sexagesimal continua sendo usado para frações (CELESTINO, 2017, p. 11).

Com base nos estudos de Reis (2018), temos registros de como converter uma fração numa soma de frações unitárias, pelo método de Fibonacci. Devemos atentar para o fato de que os egípcios não conheciam as frações com nós, portanto trata-se de algoritmo para chegar aos resultados encontrados pelos egípcios, usando nossos conhecimentos mais recentes sobre frações.

Para exemplificar vamos escrever a fração $\frac{3}{5}$ como soma de frações unitárias, usando o método de Fibonacci.

1º passo: tomamos a fração $\frac{5}{3}$ e encontramos o menor inteiro x, tal que $\frac{5}{3}<x$. Logo $x=2$. Portanto $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$.

2º passo: subtraímos $\frac{1}{2}\ de\ \frac{3}{5}$. Assim, $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$. Logo, $\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

Caso a resultante da fração $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ não fosse uma fração unitária, continuaríamos o algoritmo até acharmos uma fração unitária. Veja que a decomposição de $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ é diferente da decomposição de $\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ encontrado no Papiro de Rhind. Não sabemos por que uma decomposição era preferida a outra.

Vários problemas trazidos no Papiro de Rhynd mostram que os egípcios também trabalhavam com a multiplicação e a divisão de frações. “O Prob. 13 do Papiro Rhynd, por exemplo, pede o produto de $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ por $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; o resultado $\frac{1}{8}$ é achado corretamente” (BOYER, 1974, p. 11).

Consideramos que a compreensão do conceito de fração nas civilizações antigas não foi simples e, cada uma delas, desenvolveu a sua maneira de representar as frações. A dificuldade de se trabalhar com frações, que remonta a essas civilizações, ainda hoje é observada entre os alunos do Ensino Básico e até mesmo entre alguns alunos do Ensino Superior.

No intuito de aprofundar nossa compreensão sobre as operações com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), expomos algumas colocações sobre essa temática.

2.1.2 Dificuldades dos alunos em operações com frações

As frações têm sido tema de muitas discussões entre os docentes da área de Matemática, tendo em vista a dificuldade apresentada pelos alunos quando se deparam com esse conteúdo. Especificamente, o aprendizado das operações com frações parece um desafio bem mais complexo que o aprendizado das operações com números naturais. Verifica-se que quando se passa do conjunto dos Números Naturais para o conjunto dos Números Racionais, do qual as frações também fazem parte, as dificuldades são bem maiores.

De acordo com Monteiro e Groenwald (2014):

> O ensino e a aprendizagem das frações é um processo complexo para os alunos e as dificuldades podem surgir quando estes transferem as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as frações, não compreendendo as características particulares de cada conjunto numérico (MONTEIRO; GROENWALD, 2014, p. 8).

Não é raro que um aluno apresente como resposta, para a soma de duas frações, uma fração cujo numerador é a soma dos numeradores e o denominador é a soma dos denominadores. Por exemplo: $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{4}{7}$. O valor correto dessa soma é $\frac{11}{10}$. Esse erro é muito comum e sugere a transferência da compreensão dos naturais para os racionais, sem atentar-se para os significados dos racionais representados na forma fracionária.

Como nos ensina Morgado e Carvalho (2015, p.2), o conjunto dos Números Naturais foi caracterizado pelos axiomas do matemático italiano Giuseppe Peano, usando como base a noção de sucessor.

$N=\{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$.

De acordo com Lima (2017, p.50), o conjunto dos Números Inteiros "é a reunião $Z=N\cup\{0\}\cup\{-N\}$, dos números naturais com o zero e o conjunto $-N$ dos números negativos."

$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Em nosso trabalho, o termo fração, refere-se aos números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a\in Z, b\in Z\ e\ b\neq 0$, ou seja, os números racionais, Segundo Caraça, (1951, p. 37), se a for divisível por b o número $\frac{a}{b}$ coincide com o número inteiro, se a não for divisível por b o número $\frac{a}{b}$ diz-se fracionário, nos dois casos $\frac{a}{b}$ é um número racional.

Quando se passa do campo do conjunto dos Números Naturais para o dos Números Racionais, os alunos encontram muitas dificuldades para a compreensão desse novo campo numérico. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998, p. 101), "uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais".

Esse documento normativo aponta algumas dessas dificuldades encontradas pelos alunos ao trabalhar com os números racionais. São elas:

> 1. Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{9}\ e\ \frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;
> 2. A comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$.

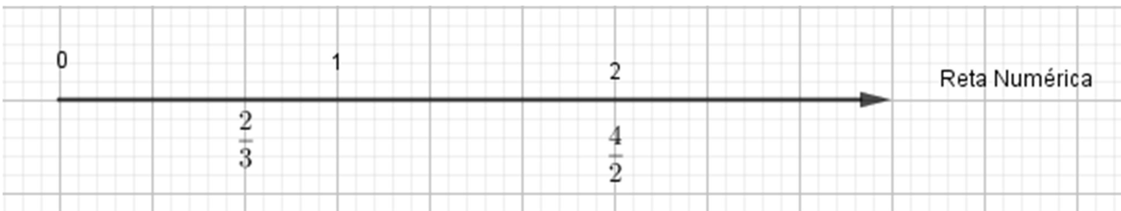
> 3. Se o tamanho da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
> 4. Se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> 5. Se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais, isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87 (BRASIL, 1998, p. 101).

Muitas das dificuldades encontradas pelos alunos, quando se passa dos Números Naturais para os Números Racionais, detalhadas pelo PCN (BRASIL, 1998), têm origem nas diversas compreensões e representações que são geradas pelo próprio conceito de fração, que para nosso estudo merece uma melhor descrição do seu significado. Portanto, recorremos à descrição de Santos (2017), à qual fizemos algumas adaptações e vamos apresentar a seguir, sugerindo discussões necessárias à proposta da nossa dissertação.

Significados das frações:

1. Número. A fração $\frac{a}{b}$, com ***a*** e ***b*** inteiros e ***b*** $\neq$ ***0*** representa um único número e, dessa forma, pode ser localizada na reta numérica. Por exemplo: $\frac{4}{2}\ e\ \frac{2}{3}$ estão representadas na reta numérica abaixo:

Figura 1 – Representação das frações $\frac{4}{2}\ e\ \frac{2}{3}$ na reta numérica



Fonte: autoria própria.

Observa-se que o número 2, por exemplo, pode ser escrito de infinitas formas fracionárias, por exemplo, $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}\ e\ \frac{8}{4}$. Portanto, cada fração representa um único número racional, mas todo número racional pode ser representado de infinitas formas fracionárias.

Este, talvez, seja o significado mais importante das frações. Bertoni (2019, p.12) faz o seguinte comentário sobre as frações: “Na verdade, há muita coisa poluindo e escondendo o cristal puro que fração é: um número. Uma ideia matemática associada à quantificação".

2. Relação parte-todo. Atribuímos este significado a uma fração quando dividimos o todo em ***b*** partes iguais e tomamos ***a*** partes. O número de partes que o todo foi dividido é chamado de denominador e o número de partes que foram tomadas é chamado de numerador. Na fração $\frac{a}{b}$, ***a*** é o numerador e ***b*** é o denominador.

Exemplo 1. Um casal foi a uma pizzaria e pediu uma pizza. A pizza já veio dividida em 8 pedaços iguais, pois no restaurante usa-se um cortador com essa característica. Se o casal comeu 6 pedaços da pizza, levando o restante para casa, qual a quantidade de pizza que foi comida pelo casal e qual a quantidade de pizza levada para casa?

Resposta. Se a pizza foi dividida em 8 pedaços iguais, o denominador da fração é 8 e cada parte representa $\frac{1}{8}$ da pizza. O casal comeu 6 pedaços, portanto devemos tomar 6 partes para representar a fração da pizza comida pelo casal, ou seja, $\frac{6}{8}$. Verifica-se que, ainda, sobraram 2 pedaços, representados pela fração $\frac{2}{8}$. Logo, o casal levará para casa $\frac{2}{8}$ da pizza. Note que a pizza inteira é representada pela fração $\frac{8}{8}$.

Como nos outros casos, no estudo do significado parte-todo de uma fração, podemos explorar a soma e a subtração de frações, vejamos: a pizza inteira é igual à parte que foi comida mais a parte que sobrou, ou seja, $\frac{8}{8} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8}$. Ou ainda, o total da pizza levada para casa é $\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$.

É importante fazer as seguintes considerações: a) quando nos referimos a partes iguais ou pedaços iguais, queremos dizer que cada parte ou pedaço tem o mesmo comprimento, a mesma área ou o mesmo volume, no caso de grandezas contínuas; b) quando se tratar de grandezas discretas, partes iguais ou pedaços iguais significam ter a mesma quantidade. A pizza do Exemplo 1 pode ser dividida em quantos pedaços quisermos, ou seja, sempre fará sentido representar qualquer fração da pizza. A esse tipo de grandeza, denominamos grandeza contínua. Agora considere 10 alunos numa sala de aula. Neste exemplo, só faz sentido falar nas frações de alunos que correspondam a um número inteiro de alunos, pois não temos meio aluno, por exemplo. Esse tipo de grandeza é denominado grandeza discreta.

3. Medida. Aqui o significado de fração refere-se à comparação de duas grandezas de mesma espécie. Por exemplo, podemos medir um segmento, tomando como base outro segmento que definimos como padrão.

Exemplo 2. Como podemos medir um segmento $\overline{AB}$? Para isso, vamos tomar, de uma maneira simplificada, os ensinamentos de Caraça (1951):

Resposta. Primeiro vamos tomar um segmento $\overline{CD}$ como unidade de comprimento. Depois comparamos o segmento $\overline{CD}$ com o segmento $\overline{AB}$. A medida do segmento $\overline{AB}$ é igual ao número de vezes que o segmento $\overline{CD}$ cabe exatamente em $\overline{AB}$. Por exemplo, se o segmento $\overline{CD}$ cabe exatamente 3 vezes em $\overline{AB}$, então $\overline{AB} = 3$.
Agora, vamos admitir que o segmento $\overline{CD}$ não caiba um número inteiro de vezes, no segmento $\overline{AB}$. Para resolver esse problema podemos dividir o segmento $\overline{CD}$ em ***n*** partes iguais a ***u*,** e dividir o segmento $\overline{AB}$ em ***m*** partes iguais a ***u***. Quando isso for possível, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos comensuráveis. $\overline{AB} = m \times u$. Como $u = \frac{\overline{CD}}{n} = \frac{1}{n}$, pois tomamos $\overline{CD}$ como unidade de comprimento, $\overline{AB} = m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. Portanto, se um segmento mede $\frac{7}{3}$, entendemos que a unidade de comprimento foi dividida em 3 partes iguais e 7 dessas partes cabem exatamente no segmento a ser medido. A grandeza do comprimento é contínua, mas nem todos os segmentos podem ser expressos por um número racional. Para representar todos os segmentos precisamos ampliar o conjunto dos racionais e incluir os números irracionais. Esse novo campo numérico não é tema do nosso trabalho.

4. Quociente. Esse significado aparece quando recorremos a uma divisão para resolver o problema. Podemos entender o numerador como o dividendo e o denominador como o divisor.

Exemplo 3. Eu tenho 2 chocolates iguais e quero dividi-los para 3 crianças. Quanto caberá a cada criança? Devemos fazer a divisão de 2 por 3. O resultado será a fração $\frac{2}{3}$, ou seja, a cada criança caberá $\frac{2}{3}$ de cada chocolate. Note que esse número, também, representa $\frac{1}{3}$ dos dois chocolates juntos (todo).

5. Operador Multiplicativo. Nesse caso, a fração $\frac{a}{b}$ funciona como um transformador numérico ao multiplicar o número por ***a*** e logo após dividi-lo por ***b***, ou vice-versa.

Exemplo 4: Eu disponho de 60 reais. Se eu gastar $\frac{2}{3}$ desse valor quanto me sobrará? Uma opção é calcular $\frac{2}{3}$ de 60, que nada mais é, senão dividir 60 por 3 e o resultado multiplicar por 2. Daí, teremos como resultado 40. Logo, restará 20 reais. A preposição de, nesse caso, tem o mesmo valor da expressão multiplicado por. Entendemos que esse é um “bom momento” para se explorar a multiplicação de frações.

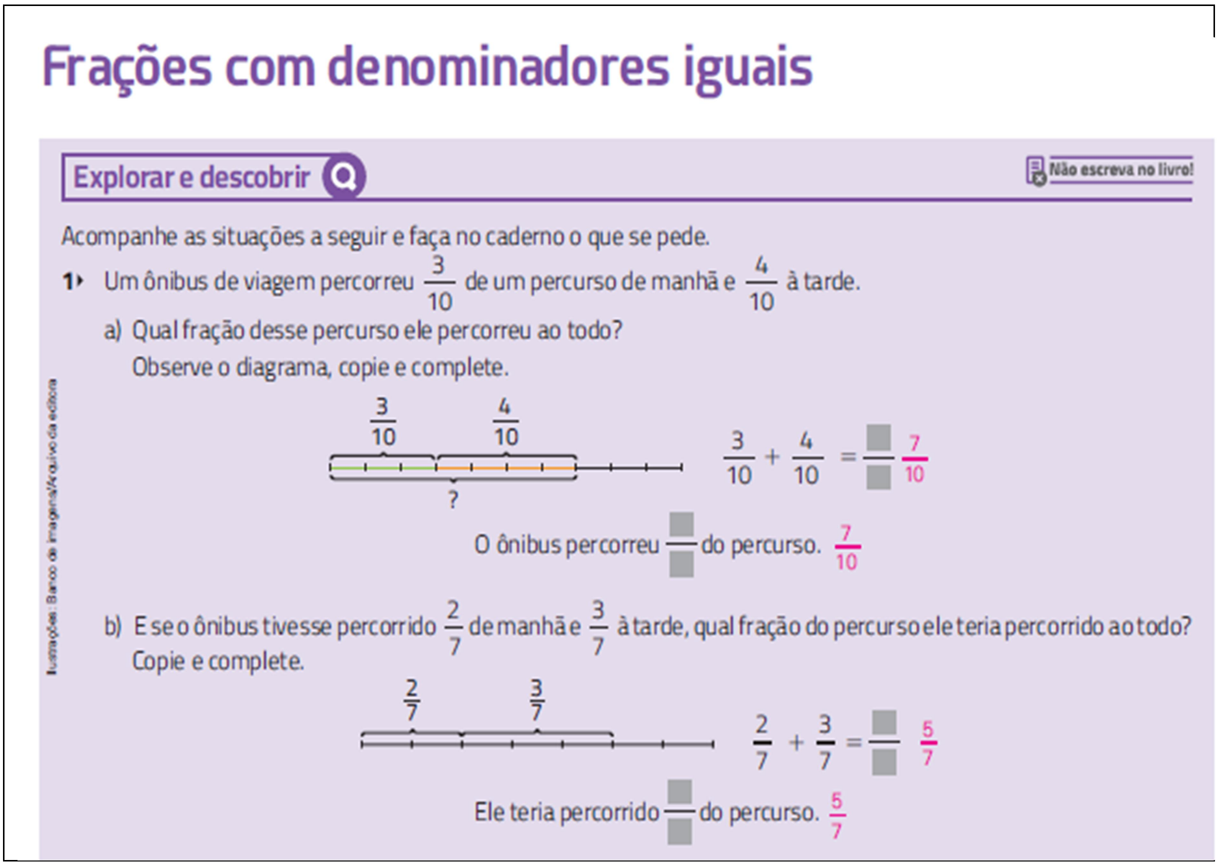
Para que o conceito de fração seja devidamente compreendido, as dificuldades mencionadas acima devem ser superadas. Bem como, compreendemos que as operações de frações sob a óptica de seus diferentes significados são necessárias aos alunos do Ensino Médio.

O nosso trabalho tem como interesse investigar e contribuir para o aprendizado dos alunos do Ensino Médio sobre as operações com frações e, faremos isso, explorando em particular o significado de parte-todo de uma fração. Essa ideia está presente em quase todos os livros didáticos como o de Dante (2018) e Pataro e Balestri (2018), ambos relacionados para o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2020). Como podemos ver a seguir, nos tópicos sobre as operações de frações.

2.1.3 As operações de adição e subtração

Dante (2018) aborda as operações de adição e de subtração de frações em duas etapas. Na primeira etapa propõe, inicialmente, um problema para trabalhar o aprendizado da operação de adição de frações com denominadores iguais.

Figura 2 - Adição de frações com denominadores iguais



Frações com denominadores iguais

Explorar e descobrir — Não escreva no livro!

Acompanhe as situações a seguir e faça no caderno o que se pede.

1 Um ônibus de viagem percorreu $\frac{3}{10}$ de um percurso de manhã e $\frac{4}{10}$ à tarde.

a) Qual fração desse percurso ele percorreu ao todo?
Observe o diagrama, copie e complete.

$\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{7}{10}$

O ônibus percorreu $\frac{\square}{\square}$ do percurso. $\frac{7}{10}$

b) E se o ônibus tivesse percorrido $\frac{2}{7}$ de manhã e $\frac{3}{7}$ à tarde, qual fração do percurso ele teria percorrido ao todo?
Copie e complete.

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{5}{7}$

Ele teria percorrido $\frac{\square}{\square}$ do percurso. $\frac{5}{7}$

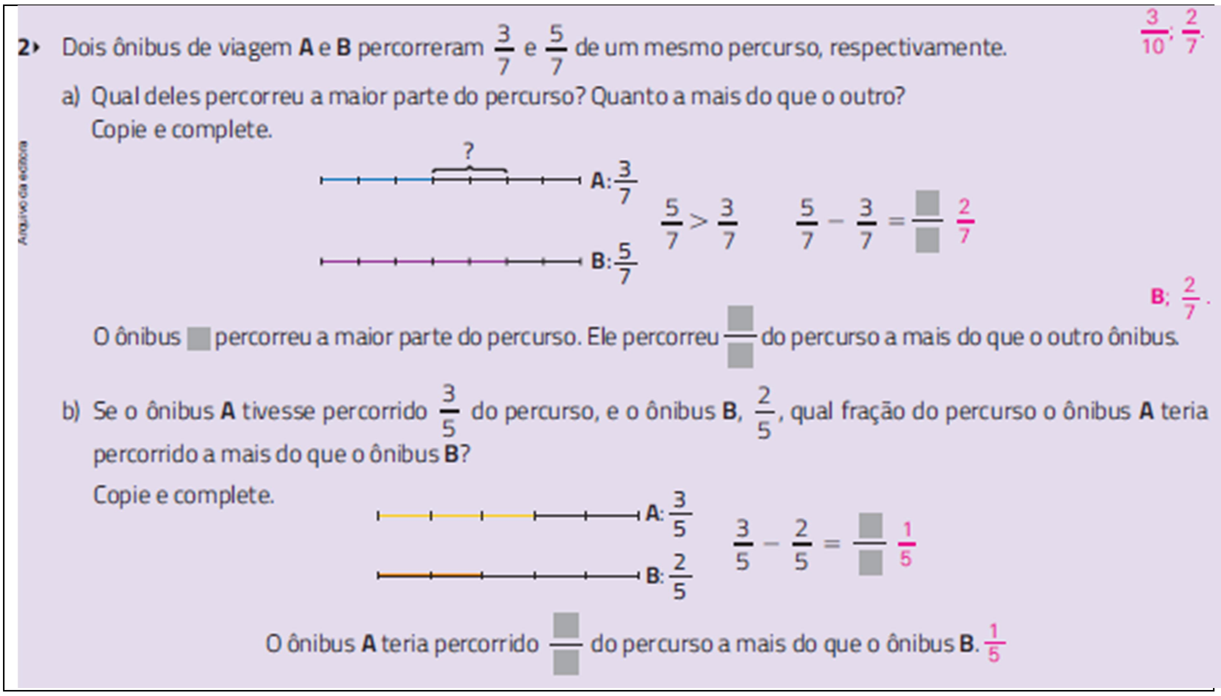
Ilustrações: Banco de Imagens/Arquivo da editora

Fonte: Dante (2018, p. 190).

O item ***a*,** do Problema 1, Figura 2, resume-se a calcular o valor de $\frac{3}{10} + \frac{4}{10}$. Para isso, o autor faz uso do significado parte-todo das frações. O percurso total (todo) é representado por um segmento de reta dividido em 10 partes iguais, já que as frações envolvidas no problema têm denominador igual a 10. Para a fração $\frac{3}{10}$, são tomadas 3 dessas partes na Figura 2 e para a fração $\frac{4}{10}$ são tomadas 4 dessas partes. Como todas as partes são iguais entre si, o resultado é $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$. O item ***b*** do Problema 1 é semelhante ao item ***a***.

Em seguida, o autor propõe outro problema, semelhante ao Problema 1 da Figura 2, para trabalhar a operação de subtração de frações com denominadores iguais (Figura 3).

Figura 3 - Subtração de frações com denominadores iguais



$\frac{3}{10}$; $\frac{2}{7}$.

2› Dois ônibus de viagem **A** e **B** percorreram $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7}$ de um mesmo percurso, respectivamente.

a) Qual deles percorreu a maior parte do percurso? Quanto a mais do que o outro?
Copie e complete.

$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ $\quad \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{■}{■}$ $\frac{2}{7}$

B; $\frac{2}{7}$.

O ônibus ■ percorreu a maior parte do percurso. Ele percorreu $\frac{■}{■}$ do percurso a mais do que o outro ônibus.

b) Se o ônibus **A** tivesse percorrido $\frac{3}{5}$ do percurso, e o ônibus **B**, $\frac{2}{5}$, qual fração do percurso o ônibus **A** teria percorrido a mais do que o ônibus **B**?
Copie e complete.

$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{■}{■}$ $\frac{1}{5}$

O ônibus **A** teria percorrido $\frac{■}{■}$ do percurso a mais do que o ônibus **B**. $\frac{1}{5}$

Fonte: Dante (2018, p. 190).

A resposta do item ***a*** do Problema 2 da Figura 3, resume-se a encontrar qual das duas frações é maior, $\frac{5}{7}$ ou $\frac{3}{7}$. E no item ***b*** do mesmo problema devemos calcular o valor de $\frac{5}{7} - \frac{3}{7}$. Novamente, recorre-se ao significado parte-todo das frações, neste caso, o todo é um segmento de reta dividido em 7 partes iguais, já que os denominadores das frações envolvidas no problema têm denominador igual a 7. Para a fração $\frac{5}{7}$ toma-se cinco dessas partes e para a fração $\frac{3}{7}$, toma-se 3 dessas partes. Observando que essas partes são iguais entre si, os resultados para os itens a e b são respectivamente, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$.

Na segunda etapa, Dante (2018) propõe as operações de adição e de subtração de frações com denominadores diferentes, usando o conhecimento sobre frações equivalentes e sobre as operações de adição e de subtração de frações com denominadores iguais (Figuras 4 e 5).

Figura 4 - Adição de frações com denominadores diferentes

Frações com denominadores diferentes

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Acompanhe as situações a seguir e faça no caderno o que se pede.

1 Pela manhã, uma balsa percorreu $\frac{2}{3}$ de um percurso e, à tarde, $\frac{1}{4}$. Qual fração do percurso ela percorreu ao todo?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar esta adição:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = ?$$

Para isso, vamos reduzir as frações ao mesmo denominador usando frações equivalentes, ou seja, escrevemos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ até encontrarmos 2 frações com denominadores iguais.

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \boxed{\frac{8}{12}}, \frac{10}{15}, \ldots$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \boxed{\frac{3}{12}}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \ldots$$

Copie, complete e escreva a resposta no caderno.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{■}{■} \quad \frac{11}{12}$$

Logo, a balsa percorreu $\frac{11}{12}$ do percurso ao todo.

Fonte: Dante (2018, p. 191)

No Problema 1 da Figura 4, deve-se calcular o valor de $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$. O autor propõe encontrar a classe de equivalência das duas frações até que se achem frações equivalentes. Daí $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.

Figura 5 - Subtração de frações com denominadores diferentes

2 Uma balsa percorreu $\frac{3}{4}$ de um percurso. Quanto ela ainda precisa percorrer para completar $\frac{5}{6}$ do percurso?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar esta subtração:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = ?$$

Analogamente, vamos reduzir as frações ao mesmo denominador usando frações equivalentes.

a) Observe as frações equivalentes de $\frac{5}{6}$ e, no caderno, faça o mesmo para a fração $\frac{3}{4}$.

$$\frac{5}{6} \rightarrow \frac{5}{6}, \boxed{\frac{10}{12}}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \ldots$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow ■ \quad \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \boxed{\frac{9}{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \ldots$$

b) Agora, copie, complete e escreva a resposta no caderno.

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{■}{■} = \frac{■}{■} \quad \frac{9}{12}; \frac{1}{12}$$

Logo, para completar $\frac{5}{6}$ do percurso, a balsa ainda precisa percorrer $\frac{1}{12}$ dele.

Fonte: Dante (2018, p. 191).

No Problema 2 da Figura 5, deve-se calcular o valor de $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$. Novamente, encontra-se a classe de equivalência das duas frações até que se achem frações equivalentes. Logo, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$.

Usando o significado parte-todo de uma fração, podemos somar e subtrair essas frações, somando e subtraindo o número de partes do todo, que cada fração representa. Isso será possível desde que cada fração esteja relacionada ao mesmo todo e para cada fração o todo tenha sido dividido no mesmo número de partes.

Exemplo 5. Uma pizza foi dividida em 8 partes iguais. Duas pessoas comeram dessa pizza. A primeira comeu $\frac{3}{8}$ da pizza e a segunda pessoa comeu $\frac{2}{8}$ da pizza. Qual a fração que representa o total da pizza comida pelas duas pessoas? Qual a fração que corresponde ao total da pizza que sobrou?

Para responder a primeira pergunta, devemos calcular o valor de $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$. A primeira e a segunda fração referem-se ao mesmo todo (pizza). A primeira fração representa 3 pedaços da pizza e a segunda dois pedaços da pizza. Esses pedaços são iguais entre si e cada um deles equivale a $\frac{1}{8}$ da pizza, logo teremos $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$. Para a segunda pergunta, o resultado é $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$, pelos motivos já apresentados.

Vejamos agora o seguinte exemplo:

Exemplo 6. Uma pessoa comeu $\frac{1}{3}$ de uma pizza e uma segunda pessoa comeu $\frac{1}{2}$ dessa mesma pizza. Quanto da pizza as duas pessoas comeram juntas?

Devemos calcular o valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$. Novamente, usando a noção de parte-todo, sabemos que cada pessoa comeu um pedaço da pizza. Mas, esses pedaços não são iguais entre si (Figura 6), tendo em vista que a primeira fração representa o todo (pizza) dividido em 3 partes iguais e a segunda em 2 partes iguais.

Figura 6 - Representação figural das frações $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}$ da pizza	$\frac{1}{2}$ da pizza
	

Fonte: autoria própria.

Podemos observar que em relação ao mesmo todo, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ (Figura 6). Assim essas partes não são iguais e, por isso, não podemos somá-las diretamente. Para resolver esse problema, façamos o seguinte: vamos dividir cada parte da primeira figura, que representa $\frac{1}{3}$ em 2 partes iguais, e cada parte da segunda figura, que representa $\frac{1}{2}$, em três partes iguais (Figura 7).

Figura 7 - Representação figural das frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$

$\frac{2}{6}$ da pizza	$\frac{3}{6}$ da pizza
	

Fonte: autoria própria.

Assim, podemos verificar que a fração $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e a fração $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Logo:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

Verificamos na Figura 7 que, quando dividimos cada parte da primeira figura (à esquerda) por 2, o denominador da fração que a representa dobra, o mesmo acontecendo com o numerador. De forma semelhante, quando dividimos cada parte da segunda figura (à direita) por 3, o denominador da fração que a representa fica multiplicado por 3, bem como o seu numerador. Nesse processo, é importante verificar que o novo denominador é múltiplo dos denominadores das frações parcelas, ou seja, é um múltiplo comum. Então apresentamos dois outros caminhos para resolver somas do tipo $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

1. Para encontrar o denominador das frações equivalentes, achamos um múltiplo comum de ***a*** e ***b***. Por exemplo, ***b x d.*** Vemos que ***b*** foi multiplicado por ***d***, então ***a*** também o será. De forma semelhante, ***d*** foi multiplicado por ***b***, então ***c*** também o será. Portanto teremos:
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{b\times d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$.

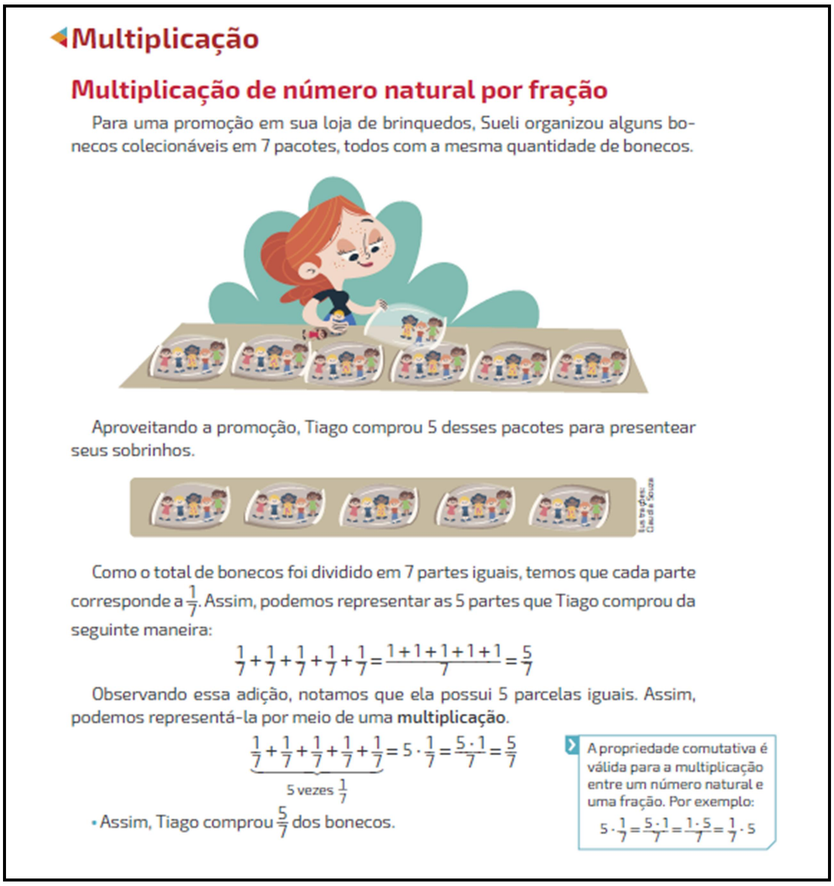
2. Outra maneira de encontrar o denominador das frações equivalentes é determinar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos denominadores e assim evitar números grandes, desnecessariamente. Para acharmos o número pelo qual ***b*** foi multiplicado, basta dividir o MMC(b,d) por ***b***. De forma semelhante dividimos o MMC(b,d) por ***d*** para encontrarmos o número pelo qual ***d*** foi multiplicado. Logo, teremos:
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{MMC(b,d)\div b\times a}{MMC(b,d)}+\frac{MMC(b,d)\div d\times c}{MMC(b,d)}=\frac{MMC(b,d)\div b\times a+MMC(b,d)\div d\times c}{MMC(b,d)}$.

O mais importante nesse processo é o aluno perceber quando precisa achar frações equivalentes para somar e subtrair frações e decidir qual a melhor forma para encontrá-las. Essa percepção é oriunda de uma base forte no aprendizado do conceito de fração.

2.1.4 A operação de multiplicação de frações

Pataro e Balestri (2018) apresentam a multiplicação de frações, tomando como base o ensinamento da operação de multiplicação dos naturais.

Figura 8 - Multiplicação de um número natural por uma fração



Multiplicação

Multiplicação de número natural por fração

Para uma promoção em sua loja de brinquedos, Sueli organizou alguns bonecos colecionáveis em 7 pacotes, todos com a mesma quantidade de bonecos.

Aproveitando a promoção, Tiago comprou 5 desses pacotes para presentear seus sobrinhos.

Como o total de bonecos foi dividido em 7 partes iguais, temos que cada parte corresponde a $\frac{1}{7}$. Assim, podemos representar as 5 partes que Tiago comprou da seguinte maneira:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1+1+1+1+1}{7}=\frac{5}{7}$$

Observando essa adição, notamos que ela possui 5 parcelas iguais. Assim, podemos representá-la por meio de uma **multiplicação**.

$$\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}_{5 \text{ vezes } \frac{1}{7}}=5\cdot\frac{1}{7}=\frac{5\cdot 1}{7}=\frac{5}{7}$$

- Assim, Tiago comprou $\frac{5}{7}$ dos bonecos.

A propriedade comutativa é válida para a multiplicação entre um número natural e uma fração. Por exemplo:

$$5\cdot\frac{1}{7}=\frac{5\cdot 1}{7}=\frac{1\cdot 5}{7}=\frac{1}{7}\cdot 5$$

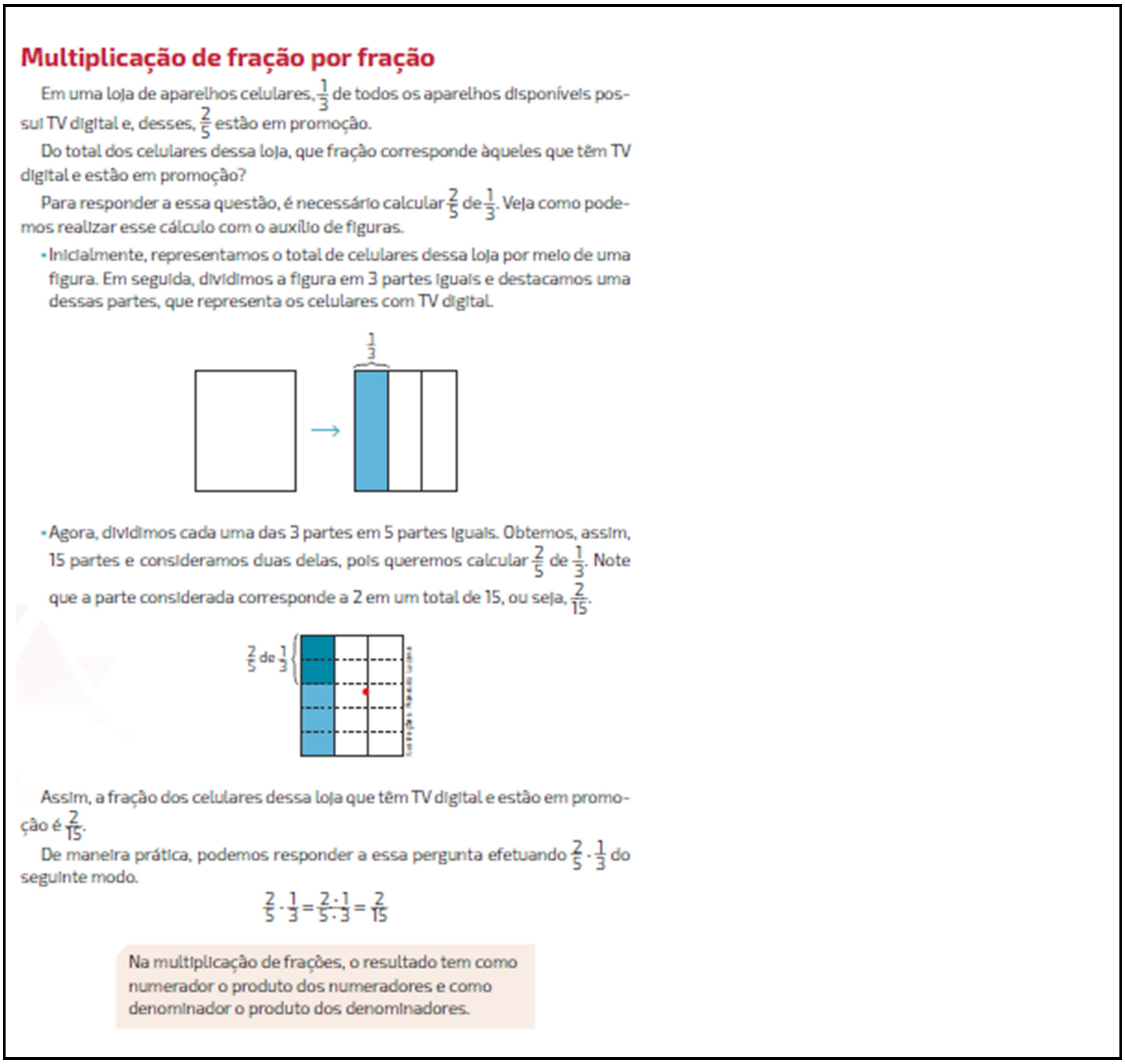
Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 125).

O exemplo apresentado pelos autores (Figura 8) consiste em encontrar o valor de $5\times\frac{1}{7}$, ou seja, calcular o produto de um número natural por uma fração. Recorre-se à mesma ideia do produto de dois números naturais. Neste caso, o 5 é o multiplicador, portanto a fração $\frac{1}{7}$ deve ser somada 5 vezes, ou seja: $5\times\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$. Para resolver o problema de calcular $\frac{1}{7}\times 5$, os autores recorreram à propriedade comutativa da adição dos números naturais, informando que essa propriedade também é válida para os números fracionários. De fato, de um ponto de vista informal, não há o que se questionar sobre essa conclusão, uma vez que os números fracionários e os números naturais pertencem ao conjunto dos números racionais.

De acordo com essas observações o produto $a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c}$, ou ainda, $\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{1\times c}$, o que nos levaria a concluir que $\frac{a}{d}\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{d\times c}$.

No entanto, para o produto de duas frações (Figura 9), Pataro e Balestri (2018), fazem a seguinte abordagem.

Figura 9 - Multiplicação de fração por fração



Multiplicação de fração por fração

Em uma loja de aparelhos celulares, $\frac{1}{3}$ de todos os aparelhos disponíveis possui TV digital e, desses, $\frac{2}{5}$ estão em promoção.

Do total dos celulares dessa loja, que fração corresponde àqueles que têm TV digital e estão em promoção?

Para responder a essa questão, é necessário calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$. Veja como podemos realizar esse cálculo com o auxílio de figuras.

- Inicialmente, representamos o total de celulares dessa loja por meio de uma figura. Em seguida, dividimos a figura em 3 partes iguais e destacamos uma dessas partes, que representa os celulares com TV digital.

- Agora, dividimos cada uma das 3 partes em 5 partes iguais. Obtemos, assim, 15 partes e consideramos duas delas, pois queremos calcular $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$. Note que a parte considerada corresponde a 2 em um total de 15, ou seja, $\frac{2}{15}$.

Assim, a fração dos celulares dessa loja que têm TV digital e estão em promoção é $\frac{2}{15}$.

De maneira prática, podemos responder a essa pergunta efetuando $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ do seguinte modo.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

Na multiplicação de frações, o resultado tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores.

Fonte: Pataro e Balestri (2018, p. 126).

Para este caso (Figura 9), Pataro e Balestri (2018) concluem que calcular $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{2}{5}\ de\ \frac{1}{3}$, o que se pode fazer usando o significado parte-todo de uma fração. Neste exemplo $\frac{1}{3}$ é o todo, então, dividimos $\frac{1}{3}$ em 5 partes iguais e tomamos 2 dessas partes. Note que ao dividirmos $\frac{1}{3}$ em 5 partes iguais a unidade ficou dividida em 15 partes iguais e foram tomadas 2 dessas partes, daí o resultado

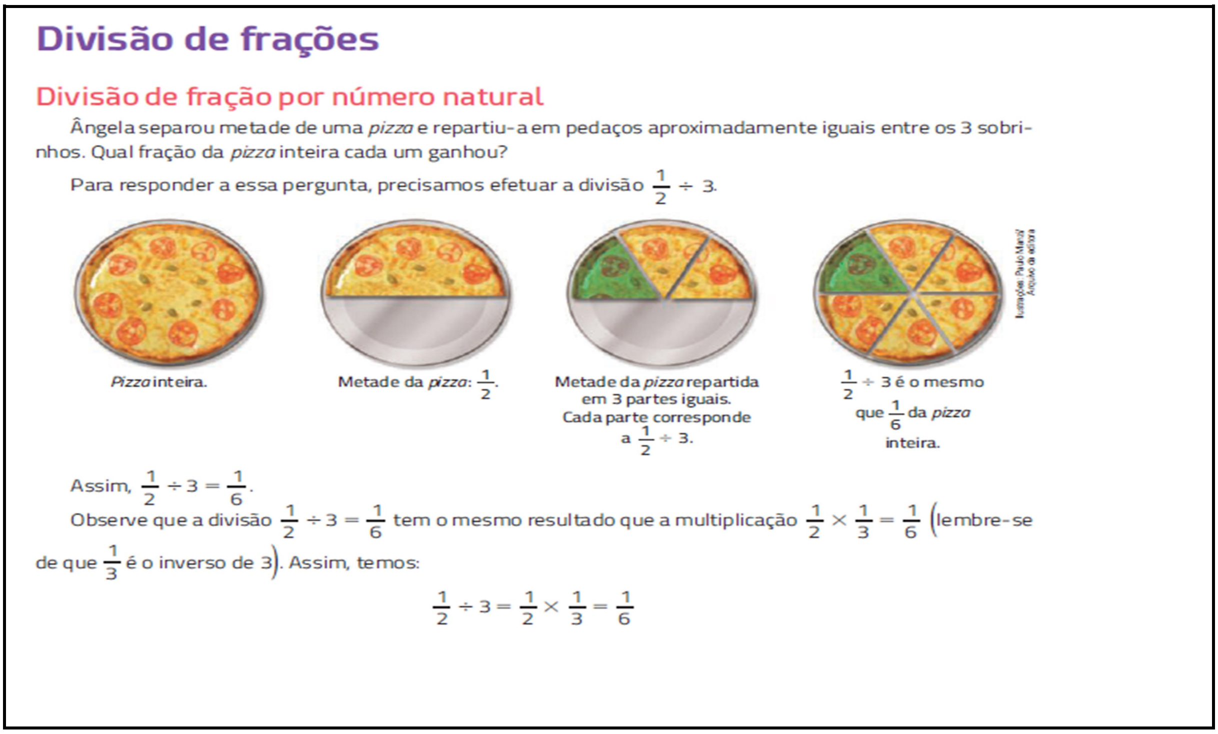
$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$. Observe que esta construção para a multiplicação de frações está ligada ao significado operador multiplicativo.

2.1.5 A operação de divisão de frações

A divisão de frações tem se apresentado como a operação na qual os alunos apresentam mais dificuldades. O algoritmo para dividir a fração $\frac{a}{b}$ pela fração $\frac{c}{d}$, usado na instrução escolar, aponta que multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda fração, ou seja:
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$. Mas o que significa exatamente esse resultado?

Dante (2018), aborda a divisão das frações em 3 etapas. Na primeira etapa (Figura 10) o autor trabalha a divisão de uma fração por um número natural e conclui que o resultado desta operação é o produto da fração pelo inverso do número natural.

Figura 10 - Divisão de uma fração por um número natural


Divisão de frações

Divisão de fração por número natural

Ângela separou metade de uma *pizza* e repartiu-a em pedaços aproximadamente iguais entre os 3 sobrinhos. Qual fração da *pizza* inteira cada um ganhou?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão $\frac{1}{2} \div 3$.

Pizza inteira.

Metade da *pizza*: $\frac{1}{2}$.

Metade da *pizza* repartida em 3 partes iguais. Cada parte corresponde a $\frac{1}{2} \div 3$.

$\frac{1}{2} \div 3$ é o mesmo que $\frac{1}{6}$ da *pizza* inteira.

Assim, $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$.

Observe que a divisão $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\left(\text{lembre-se de que } \frac{1}{3} \text{ é o inverso de } 3\right)$. Assim, temos:

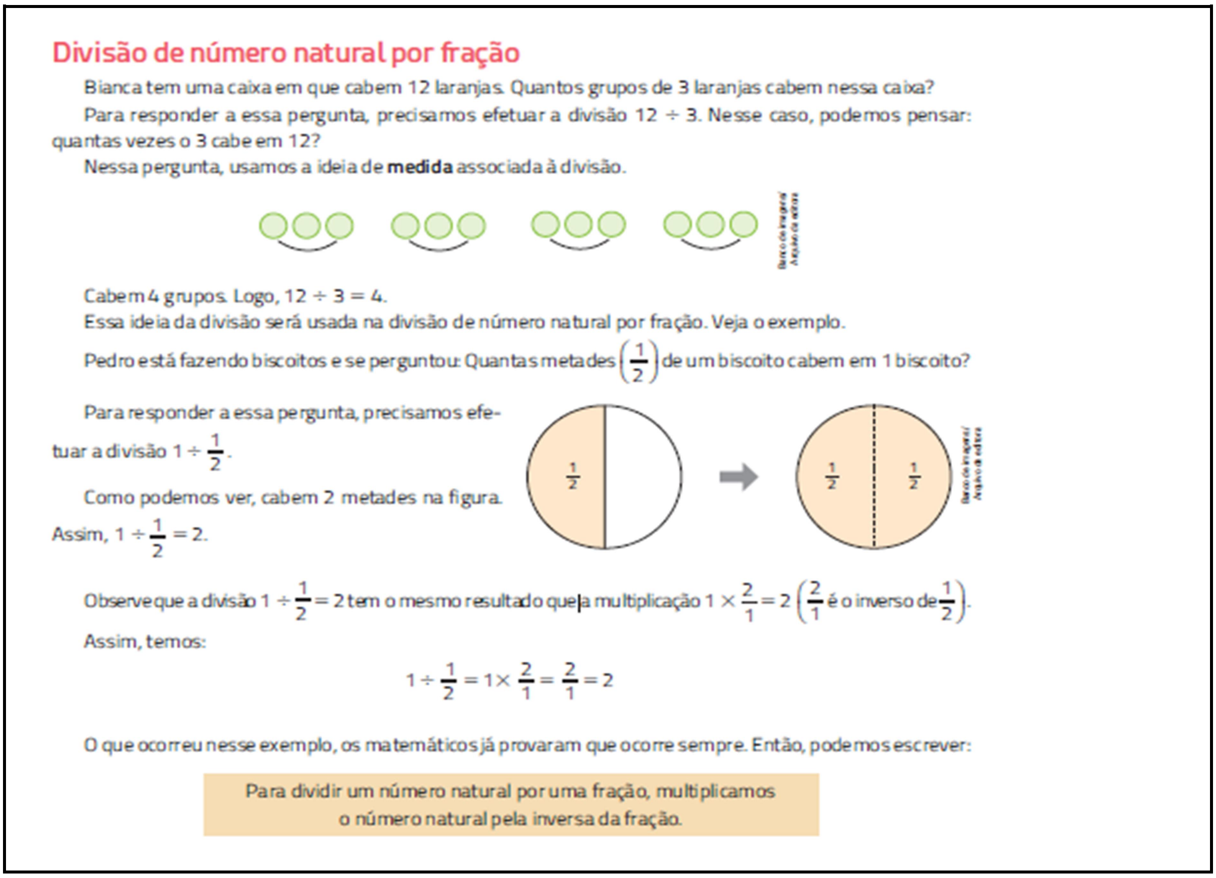
$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Fonte: Dante (2018, p. 69).

Nesta abordagem verifica-se que Dante (2018) propõe que dividir $\frac{1}{2}$ por 3 é dividir a fração $\frac{1}{2}$ em 3 partes iguais e tomar uma dessas partes. No exemplo, cada metade da pizza pode ser dividida em 3 partes iguais, assim a pizza fica dividida em 6 partes iguais, logo uma dessas partes é a fração $\frac{1}{6}$. Como já descrito, o autor conclui que esse resultado é mesmo da operação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Generalizar esse resultado para a divisão de fração por fração não seria nenhum absurdo, longe disso, tendo em vista que todo número natural pode ser escrito na forma de fração. Entretanto, iniciar com essa abordagem pode ser uma das razões para as dificuldades constatadas.

Em seguida, Dante (2018) exemplifica a divisão de um número natural por uma fração (Figura 11), usando a ideia de quantas vezes a fração cabe no número natural, o que deveria ser o ponto de partida, principalmente porque o significado da divisão com números naturais é conservado.

Figura11 - Divisão de um número natural por uma fração.



Divisão de número natural por fração

Bianca tem uma caixa em que cabem 12 laranjas. Quantos grupos de 3 laranjas cabem nessa caixa?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão 12 ÷ 3. Nesse caso, podemos pensar: quantas vezes o 3 cabe em 12?

Nessa pergunta, usamos a ideia de **medida** associada à divisão.

Cabem 4 grupos. Logo, 12 ÷ 3 = 4.

Essa ideia da divisão será usada na divisão de número natural por fração. Veja o exemplo.

Pedro está fazendo biscoitos e se perguntou: Quantas metades $\left(\frac{1}{2}\right)$ de um biscoito cabem em 1 biscoito?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão $1 \div \frac{1}{2}$.

Como podemos ver, cabem 2 metades na figura. Assim, $1 \div \frac{1}{2} = 2$.

Observe que a divisão $1 \div \frac{1}{2} = 2$ tem o mesmo resultado que a multiplicação $1 \times \frac{2}{1} = 2$ $\left(\frac{2}{1} \text{ é o inverso de } \frac{1}{2}\right)$.

Assim, temos:

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

O que ocorreu nesse exemplo, os matemáticos já provaram que ocorre sempre. Então, podemos escrever:

Para dividir um número natural por uma fração, multiplicamos o número natural pela inversa da fração.

Fonte: Dante (2018, p. 70).

Dante (2018) começa relembrando a ideia da divisão de números naturais, ressaltando que essa ideia nos leva a pensar sobre quantas vezes o divisor cabe no dividendo. Depois questiona quantas metades cabem em 1 e, por meio de uma representação figural, mostra que o resultado é igual a 2. De forma precoce generaliza que esse resultado pode ser encontrado multiplicando o número natural pelo inverso da fração.

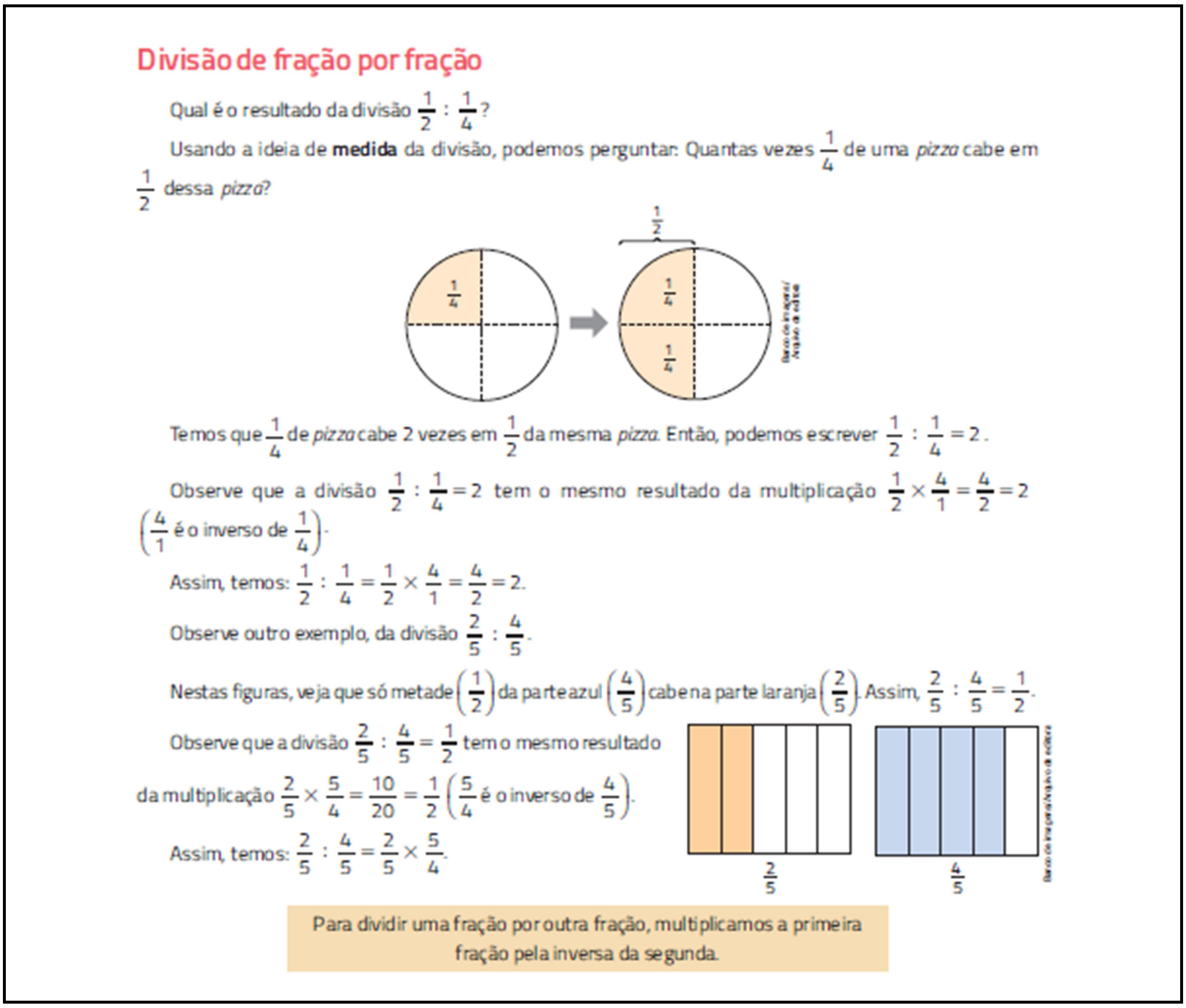
Ressaltamos que a fração $\frac{1}{a}$ cabe exatamente ***a*** vezes na unidade, com ***a*** $\in$ **N**. Do mesmo modo, a fração $\frac{2}{a}$ cabe exatamente ***a*** vezes em 2. E assim, verifica-se que a fração $\frac{b}{a}$ cabe exatamente ***a*** vezes em ***b***. Por exemplo: $\frac{2}{3}$ cabem exatamente 3 vezes em 2.

Vamos calcular $\frac{2}{3} \div \frac{8}{9}$, sabendo que $\frac{8}{9} > \frac{2}{3}$, perguntar quantas vezes $\frac{8}{9}$ cabe em $\frac{2}{3}$, inicialmente, parece estranho. Mas, se o aluno compreendeu bem o conceito de fração, essa estranheza pode ser apenas aparente, pois se pode pensar que apenas uma parte de $\frac{8}{9}$ cabe em $\frac{2}{3}$. Vamos usar o raciocínio de que $\frac{b}{a}$ cabe exatamente ***a*** vezes em ***b*.** Façamos o seguinte:

1. A fração $\frac{8}{9}$ cabe 9 vezes em 8, portanto, $8 \div \frac{8}{9} = 9$.
2. Como $1 = \frac{8}{8}$ e a fração $\frac{8}{9}$ cabe 9 vezes em 8, caberá $\frac{9}{8}\, em\, 1$ e por consequência, $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ em $\frac{2}{3}$. Ou seja, apenas $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{9}$ cabe exatamente em $\frac{2}{3}$. Pois, $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$

Para finalizar a discussão sobre a divisão de fração por fração, Dante (2018), recorre, novamente, à ideia de quantas vezes uma fração cabe na outra. O primeiro exemplo apresentado é simples, pois sugere calcular $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ (Figura 12).

Figura 12 - Divisão de fração por fração



Divisão de fração por fração

Qual é o resultado da divisão $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$?

Usando a ideia de **medida** da divisão, podemos perguntar: Quantas vezes $\frac{1}{4}$ de uma *pizza* cabe em $\frac{1}{2}$ dessa *pizza*?

Temos que $\frac{1}{4}$ de *pizza* cabe 2 vezes em $\frac{1}{2}$ da mesma *pizza*. Então, podemos escrever $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$.

Observe que a divisão $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$ tem o mesmo resultado da multiplicação $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$ $\left(\frac{4}{1} \text{ é o inverso de } \frac{1}{4}\right)$.

Assim, temos: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$.

Observe outro exemplo, da divisão $\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$.

Nestas figuras, veja que só metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da parte azul $\left(\frac{4}{5}\right)$ cabe na parte laranja $\left(\frac{2}{5}\right)$. Assim, $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

Observe que a divisão $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$ tem o mesmo resultado da multiplicação $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{5}{4} \text{ é o inverso de } \frac{4}{5}\right)$.

Assim, temos: $\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4}$.

Para dividir uma fração por outra fração, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda.

Fonte: Dante (2018, p. 71).

Por meio de um esquema figural o autor mostra que a fração $\frac{1}{4}$ cabe 2 vezes na fração $\frac{1}{2}$, e esse resposta é o mesmo que calcular $\frac{1}{2} \times \frac{4}{2}$, ou seja, repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração (Figura 12). O segundo exemplo trata de calcular $\frac{2}{5} \div \frac{4}{5}$. Usando o significado de parte todo por meio de figuras o autor mostra que apenas metade de $\frac{4}{5}$ cabe na fração $\frac{2}{5}$, e esse resultado é o mesmo que $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$.

Diante do exposto, entendemos que o aprendizado das operações com frações passa, necessariamente, pela compreensão do conceito de fração. Apesar das frações apresentarem vários significados, acreditamos que o significado parte-todo, aplica-se a qualquer caso e, assim, serve para abordar as operações de frações com alunos do Ensino Médio, o que não quer dizer que apenas este significado seja abordado na instrução escolar.

2.2 O USO DE RECURSOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

O avanço da tecnologia tornou possível vivermos num mundo globalizado, onde muitas de nossas atividades estão de alguma forma, ligadas à tecnologia digital. Todas as faixas etárias, crianças, adolescentes e adultos estão inseridos, de alguma forma, nesse mundo digital. Podemos dizer que a geração que hoje está no Ensino Básico nasceu no mundo digital, e não por coincidência, essa geração tem muita facilidade para acessar os recursos digitais disponíveis.

Parece-nos importante diferenciar o significado da palavra tecnologia do termo tecnologia digital. De acordo com o dicionário Aurélio, tecnologia é “o conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade” (AURÉLIO, 2000, p. 664).

Quando falamos em tecnologia, o que vem em nosso pensamento é sempre algo dentro de um universo eletrônico, por exemplo, uma TV, um celular, seriam exemplos de tecnologia. De acordo com a definição de Aurélio (2000), tecnologia é muito mais do que isso e está presente há muito tempo, sendo a principal responsável pelo desenvolvimento da sociedade, pelo menos no que se refere ao aspecto técnico.

Na análise de Ribeiro (2014, p.18):

> Tecnologia digital é um conjunto de tecnologia que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0,1). Uma imagem, um som, um texto, ou a convergência de todos eles, que aparecem para nós na forma final da tela de um dispositivo digital na linguagem que conhecemos (imagem fixa ou em movimento, som, texto verbal), são traduzidos em números, que são lidos por dispositivos variados, que podemos chamar, genericamente, de computadores.

Como já mencionado, o uso da tecnologia digital é uma realidade na nossa sociedade e nesse processo de mudanças constantes dos avanços tecnológicos, temos visto cada vez mais pessoas utilizá-las, em particular, nossos alunos. Sendo assim, apresentamos a seguir o que observamos em termos de orientações curriculares para o Ensino Médio e para uso de tecnologias no ensino de Matemática.

2.2.1 Matemática e o uso de tecnologias no Ensino Médio

O incentivo para o uso de tecnologias digitais no Ensino de uma forma geral e, em particular, no ensino de Matemática é encontrado nos documentos normativos como se pode observar. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2006) chama-se a atenção para:

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia a dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2006, p. 87).

Sobre a Tecnologia para a Matemática, destacam-se “os programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos” (BRASIL, 2006, p.88).

Ainda nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, destaca-se:

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática (BRASIL, 2006, p.89-90).

Neste contexto, a mais recente Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018, que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, orienta:

> Art. 8º. As propostas curriculares do ensino médio devem:
> I - Garantir o desenvolvimento das competências gerais e específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC);
> II - Garantir ações que promovam: [...] b) cultura e linguagens digitais, pensamento computacional, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes, das tecnologias da informação, da matemática, bem como a possibilidade de protagonismo dos estudantes para a autoria e produção de inovação (BRASIL, 2018, p. 11).

Por sua vez, o mais recente Currículo de Pernambuco - Ensino Médio, destaca nas concepções sobre os processos de ensino e de aprendizagem a importância das mudanças tecnológicas e seus avanços nos processos de ensino e de aprendizagem.

> Os estudantes do Ensino Médio estão imersos numa sociedade que vive a pressa e a agilidade da circulação de informações e das mudanças tecnológicas. É dentro dessa sociedade que a escola está inserida, tendo necessidade de fazer ajustes e se adaptar na busca de promover a aprendizagem para as juventudes de forma significativa (PERNAMBUCO, 2021, p. 48).

No Currículo de Pernambuco - Ensino Médio, enfatiza-se, também, que as juventudes que estão, atualmente, no Ensino Médio são consideradas nativas digitais. Ou seja, nasceram num contexto onde o uso da tecnologia é elemento básico no cotidiano. Sendo assim, “a escola também tem a responsabilidade de contribuir na formação dos estudantes de forma que eles façam uso crítico e consciente das tecnologias” (PERNAMBUCO, 2021, p. 49).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca nas Competências Gerais da Educação Básica o uso de tecnologias digitais, como podemos observar:

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

A importância dada pela BNCC (2018), sobre a Tecnologia Digital como ferramenta para o Ensino Médio é observada no Tópico destinado às Tecnologias Digitais e a Computação. Nesse tópico, a BNCC destaca as constantes transformações trazidas pela tecnologia digital e os impactos dessas transformações na vida dos alunos:

> A preocupação com os impactos dessas transformações na sociedade está expressa na BNCC e se explicita nas competências gerais para a Educação Básica. Diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores. (BRASIL, 2018, p. 473).

Essas dimensões são apontadas pela BNCC como o pensamento computacional, o mundo digital e a cultura digital. De acordo com esse texto normativo:

> Em articulação com as competências gerais, essas dimensões também foram contempladas nos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento da Educação Infantil e nas competências específicas e habilidades dos diferentes componentes curriculares do Ensino Fundamental, respeitadas as características dessas etapas. No Ensino Médio, por sua vez, dada a

> intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. [...] Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas de conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 474).

Para o Ensino Médio a BNCC destaca dentre as Competências Específicas na área de Matemática:

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018, p. 540).

Observa-se, então, a grande importância dada pelos documentos normativos ao uso das tecnologias digitais na Educação Básica. Essa importância é fruto da percepção de estarmos vivendo em um mundo digital, do qual fazem parte nossos alunos, bem como das potencialidades oferecidas por essas tecnologias para a construção de uma aprendizagem crítica, onde o aprendiz seja sujeito da ação.

Consideramos que muitos *softwares* têm se apresentado como ótimas ferramentas para o estudo de várias áreas, em particular, para a área de Matemática. O uso desses recursos digitais, têm se apresentado de forma a contribuir para manter o aluno inserido no mundo digital, mas principalmente para construir um aprendizado matemático crítico, fundamental para a solidez desse conhecimento.

Diante do exposto, tomamos como suporte para o desenvolvimento do presente trabalho acerca do estudo de operações com frações o GeoGebra e a Plataforma da Physics Educacional Technology (PhEt).

2.2.1.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito e de fácil acesso. Por apresentar várias possibilidades de ensino na área da Matemática, o GeoGebra tem sido um dos *softwares* de Matemática dinâmica mais utilizados em sala de aula dos últimos tempos. Cada vez mais professores e alunos fazem uso desse recurso digital.

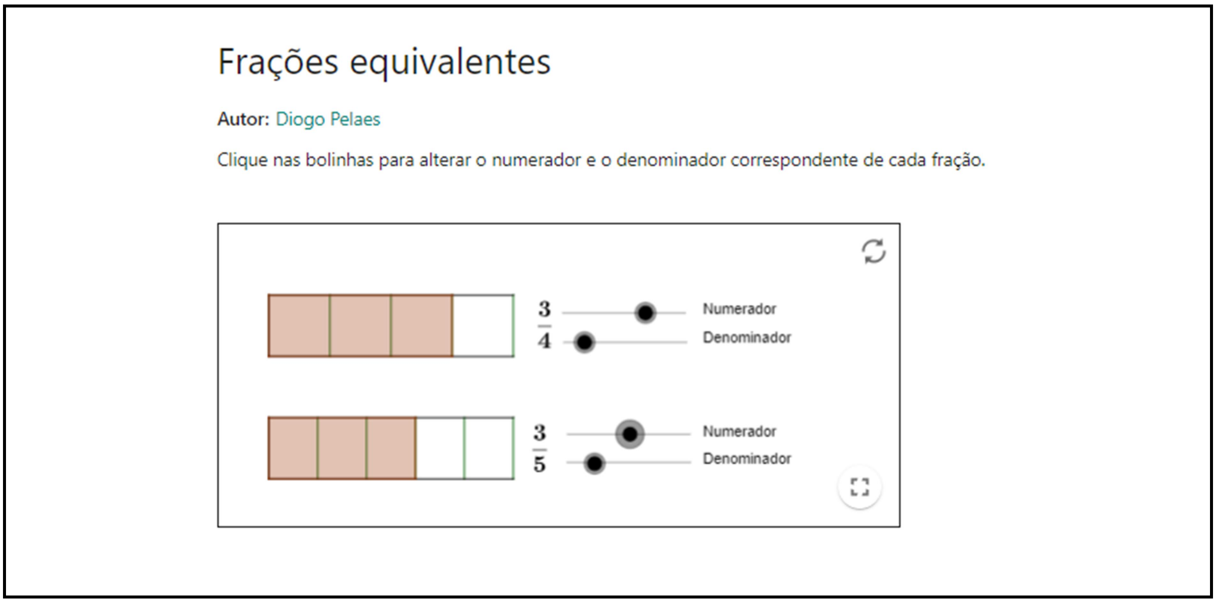
De acordo com os criadores desse programa, o GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar. O GeoGebra se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Segundo Pereira (2021):

> O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países [...] Seu nome deriva da junção de Geometria e Álgebra, deste modo, o software tem uma grande capacidade para resolver problemas envolvendo conceitos de geometria plana, analítica, espacial, conceitos de funções, dentre outros [...] O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300.000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. (PEREIRA, 2021, p. 21).

Com um conhecimento básico sobre o funcionamento do GeoGebra, que pode ser adquirido por meio de uma infinidade de vídeos disponíveis na internet, pode-se criar atividades para o estudo de temas na área de Matemática. Para a construção de outras atividades é necessário um conhecimento mais aprofundado sobre o funcionamento desse *software*. No entanto, uma vez criada a atividade, o seu uso é bastante simples.

Vamos apresentar um exemplo construído por Diogo Pelaes (s/d), sobre frações equivalentes.

Figura 13 – Exemplo de uma atividade sobre frações feita no GeoGebra



Fonte: Pelaes (s/d). (https://www.geogebra.org/m/aVbhn2W5)

A ideia dessa atividade (Figura 13) é trabalhar a compreensão de frações equivalentes. Cada figura representa a fração à sua direita. Apesar da construção dessa atividade não ser elementar, o aluno não terá nenhuma dificuldade para usá-la. Os pontinhos pretos são controles deslizantes que alteram o numerador e denominador das frações. Alterando-se as frações, as figuras também se alteram e o aluno pode observar que quando as figuras têm a mesma representação, mesmo que as frações não tenham numeradores e denominadores iguais, representam a mesma medida de área são equivalentes.

2.2.1.2 A Plataforma da Physics Educacional Technology (PhEt)

A plataforma PhET é apresentada da seguinte forma:

> A plataforma PhET é uma iniciativa da Universidade de Colorado que explora o conceito de simulações aplicáveis ao campo das ciências da natureza e matemática, permitindo trabalhar, a partir de recursos digitais, conceitos para os quais a experimentação possa contribuir para o processo de aprendizagem. É importante ressaltar que, como qualquer simulação, o PhET também apresenta limitações, e seu uso deve ser mediado pelo professor durante todo o processo de utilização (CIENSINAR, 2020, p. 1).

De acordo com os seus criadores, a plataforma PhET oferece, de forma gratuita, simulações em Matemática e Ciências de forma interativa e divertida:

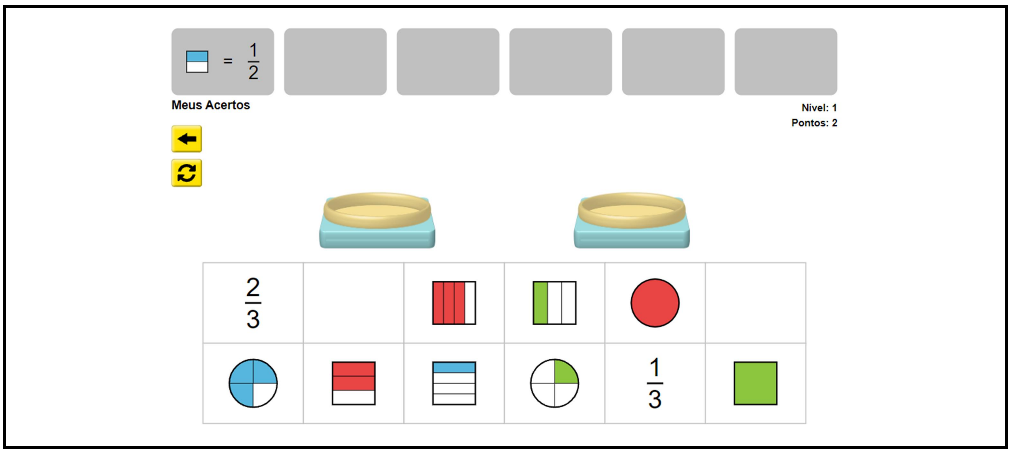
> PhET oferece simulações de matemática e ciências divertidas, interativas, grátis, baseadas em pesquisas. Nós testamos e avaliamos extensivamente cada simulação para assegurar a eficácia educacional. Estes testes incluem entrevistas de estudantes e observação do uso de simulação em salas de aula. As simulações são escritas em Java, Flash ou HTML5, e podem ser executadas on-line ou copiadas para seu computador. Todas as simulações são de código aberto (ver nosso código fonte). Vários patrocinadores apoiam o projeto PhET, permitindo que estes recursos sejam livres para todos os estudantes e professores (UNIVERSIDADE DO COLORADO, 2021).

A plataforma PhET foi desenvolvida para: 1. Incentivar a investigação científica; 2. Fornecer interatividade; 3. Tornar visível o invisível; 4. Mostrar modelos mentais visuais; 5. Incluir várias representações (por exemplo, objeto de movimento, gráficos, números, etc.); 6. Usar conexões com o mundo real; 7. Dar aos usuários a orientação implícita (por exemplo, através de controles de limite) na exploração produtiva; 8. Criar uma simulação que possa ser flexivelmente usada em muitas situações educacionais.

O recurso digital da PhET é de fácil acesso e não precisa instalar nenhum *software*, bastando acessar a plataforma através do site https://phet.colorado.edu/pt_BR/. A partir daí, o professor pode escolher a simulação que se adequa ao tema estudado e trabalhar com seus alunos.

Destacamos, a seguir, uma simulação sobre frações equivalentes, encontrada na plataforma PhEt (Figura 14).

Figura 14 – Exemplo de uma simulação da plataforma PhET para frações equivalentes



Fonte: PhET (2021). (https://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_pt_BR.html)

Nesta simulação, o aluno deve colocar em cada prato uma fração, ou uma figura, de modo que uma seja equivalente à outra. Para isso, basta arrastar com o mouse as frações e as figuras para os pratos. Esse jogo tem vários níveis.

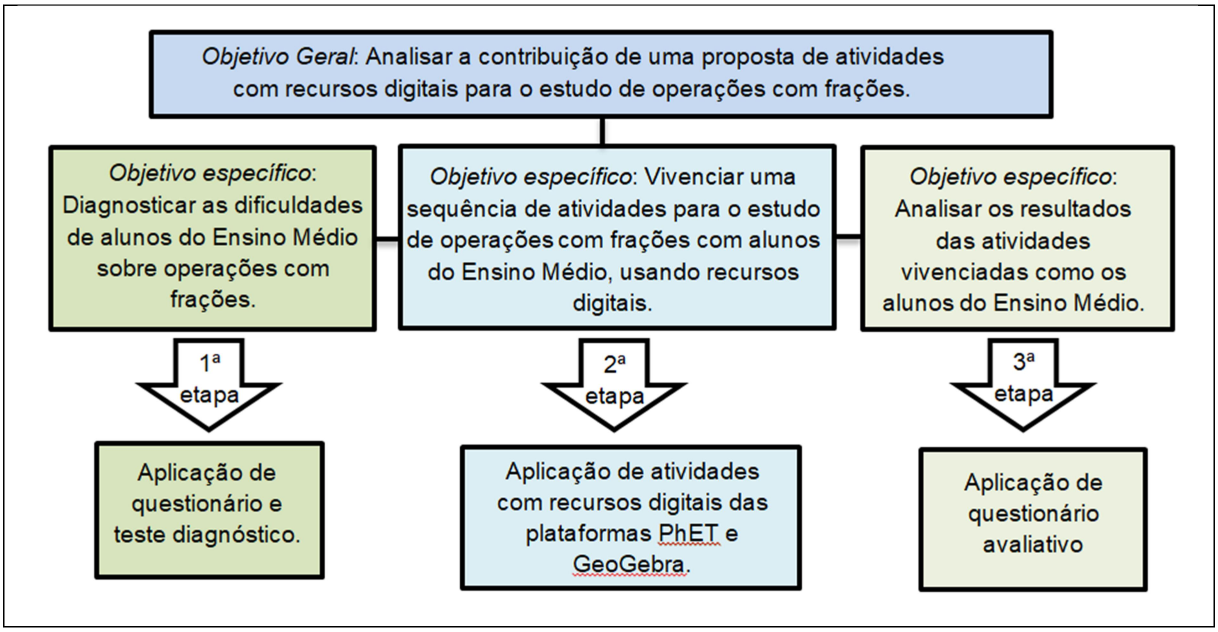
A escolha desse recurso digital se deu pelo fato da facilidade de acesso, de manuseio e, também, por encontrarmos simulações sobre o conceito de fração, frações equivalentes e números mistos, adequados ao propósito do nosso trabalho.

3 METODOLOGIA

O objetivo geral deste trabalho é analisar a contribuição de uma proposta de atividades com recursos digitais para o estudo de operações com frações. Para isso, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, pois "segundo essa perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada" (GODOY, 1995, p. 21).

Organizamos os procedimentos metodológicos (Figura 15) de acordo com os objetivos geral, e específicos da pesquisa, em três etapas, conforme podemos verificar na figura a seguir:

Figura 15 - Organização metodológica da pesquisa



Fonte: autoria própria.

Esta pesquisa foi desenvolvida com alunos de duas escolas da Rede Pública Estadual (que nomeamos por Escola A e Escola B) e uma Escola da Rede Privada (Escola C). A "Escola A" situa-se em Moreno - PE; a "Escola B" em Recife- PE e a "Escola C" em Vitória de Santo Antão - PE. Essas escolas pertencem respectivamente às Gerências Regionais de Ensino (GREs): Metropolitana Norte, Recife Sul e Mata Centro. Para tanto, contamos com a colaboração de três professores dessas escolas.

A seguir, detalhamos cada uma das etapas da pesquisa.

3.1 PRIMEIRA ETAPA

A primeira etapa foi organizada em duas fases.

Na ***primeira fase***, ocorreu a aplicação de um questionário contendo inicialmente questões básicas do perfil de cada aluno, a saber: 1. Identificação de e-mail; 2. Nome do aluno; 3. Identificação da escola; 4. Idade e 5. Ano Escolar. Após o levantamento do perfil dos alunos, foi lançada uma questão de múltipla escolha: Qual das operações com frações você acha mais difícil (adição, subtração, multiplicação ou divisão)? E, na sequência, solicitamos por meio de uma questão aberta que cada aluno falasse sobre sua maior dificuldade nas operações com frações.

O questionário foi disponibilizado aos alunos por formulário digital (*Google Forms*). Obtivemos as respostas de 40 alunos, como detalhamos no quadro a seguir:

Quadro 2 - Participantes do questionário por ano, escola e idade

Ano	Nº de alunos	Escola	Idade
1º ano do Ensino Médio	12	C	14 anos - 2 alunos 15 anos - 10 alunos
2º ano do Ensino Médio	22	B (19 alunos) C (3 alunos)	15 anos - 3 alunos 16 anos - 17 alunos 17 anos - 2 alunos
3º ano do Ensino Médio	6	A	16 anos - 1 aluno 17 anos - 5 alunos
Total	40		

Fonte: autoria própria.

No processo de análise dos dados do questionário, para as questões de múltipla escolha, tomamos como suporte os gráficos produzidos pelo *Google Forms*. E, para a questão aberta, buscamos agrupar as respostas dos alunos, com certa semelhança, quanto às dificuldades apresentadas sobre as operações com frações.

Ressaltamos que mantivemos o anonimato de cada aluno, nomeando-os de acordo com a ordem de entrega do questionário. Dessa forma, o primeiro aluno a entregar o questionário recebeu a nomeação de "A1", o segundo de "A2" e assim, sucessivamente.

Na ***segunda fase***, ocorreu a realização de um teste diagnóstico, na tentativa de entender quais as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de operações com frações. Esse teste foi organizado da seguinte forma: quatro questões com adição de frações; três questões com subtração de frações; quatro questões com multiplicação de frações e quatro questões com divisão de frações. O Quadro 3 mostra as questões do teste diagnóstico, na ordem em que foram propostas:

Quadro 3 - Questões do teste diagnóstico sobre operações com frações

1. Os itens abaixo se referem às operações com frações. Resolva cada item, apresentando os cálculos, quando você achar necessário.	
a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$	i) $2\times\frac{1}{7}=$
b) $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=$	j) $\frac{2}{5}\div\frac{1}{5}=$
c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$	k) $3\div\frac{1}{3}=$
d) $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=$	l) $\frac{2}{3}\div 5=$
e) $1+\frac{5}{6}=$	m) $\frac{1}{4}\div\frac{2}{7}=$
f) $\frac{14}{6}-2=$	n) $2\ \frac{1}{3}+1\ \frac{2}{5}=$
g) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=$	o) $2\ \frac{2}{5}\times 3\ \frac{1}{4}=$
h) $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=$	

Fonte: autoria própria.

O teste diagnóstico foi aplicado no mês de maio de 2021, contando com a participação de 48 alunos, como detalhamos no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4 - Participantes do teste por ano e escola

Ano	**Nº de alunos**	**Escola**
1º ano do Ensino Médio	12	C
2º ano do Ensino Médio	22	B (19 alunos) C (3 alunos)
3º ano do Ensino Médio	14	A
Total	48	

Fonte: autoria própria.

Inicialmente, realizamos reuniões, por meio do *Google Meet* com os alunos das escolas A e C para um primeiro contato com os alunos e explicar o trabalho e seus objetivos. Nessas escolas, por motivos de restrições sanitárias, devido à pandemia de COVID19, contamos com a colaboração dos professores, que se responsabilizaram em aplicar o teste de forma presencial. Assim, cada professor, durante uma aula, disponibilizou aos alunos o teste impresso com a orientação que o respondessem individualmente e sem consulta.

No cenário de ensino remoto, contamos com a colaboração da professora da Escola B. O contato com os alunos foi feito por meio do *Google Meet* e, nessa reunião, combinamos que íamos enviar o teste diagnóstico (Quadro 3) através do aplicativo *WhatsApp*, para aqueles que quisessem participar da pesquisa. Combinamos, também, a criação de um grupo nesse aplicativo para futuras comunicações. Além da explicação sobre o desenvolvimento da pesquisa e como seria a participação dos alunos, a principal instrução dada foi que o teste deveria ser feito sem nenhuma consulta. Finalizando esse primeiro contato, definimos os horários para a aplicação do teste, como se segue:

a) 14 de maio de 2021, das 14:00 às 15:30 h;
b) 15 de maio de 2021, das 10:00 às 11;30 h;
c) 15 de maio de 2021, das 18:00 às 19:30 h;
d) 17 de maio de 2021, das 19:00 às 20:30 h.

Os diferentes horários se deram por conta da disponibilidade dos alunos. O envio do teste para os alunos foi realizado pelo *WhatsApp* privado de cada participante e a devolução, também, foi feita pelo mesmo aplicativo. Após o término do tempo estabelecido (supramencionado nos itens a, b, c e d), os alunos tiveram 30 minutos para devolver as respostas. Dispomos aos alunos as folhas com as questões do teste, no mesmo nível e formato - as únicas mudanças de um teste para o outro foram os números diferentes envolvidos em cada questão. Os alunos não tinham conhecimento que o teste que recebiam era diferente do outro. Fizemos, no total, 4 “diferentes” testes, cujos arquivos foram nomeados de Teste 1, Teste 2, Teste 3 e Teste 4. O Teste 1 deu origem aos outros testes e está representado no Quadro 3.

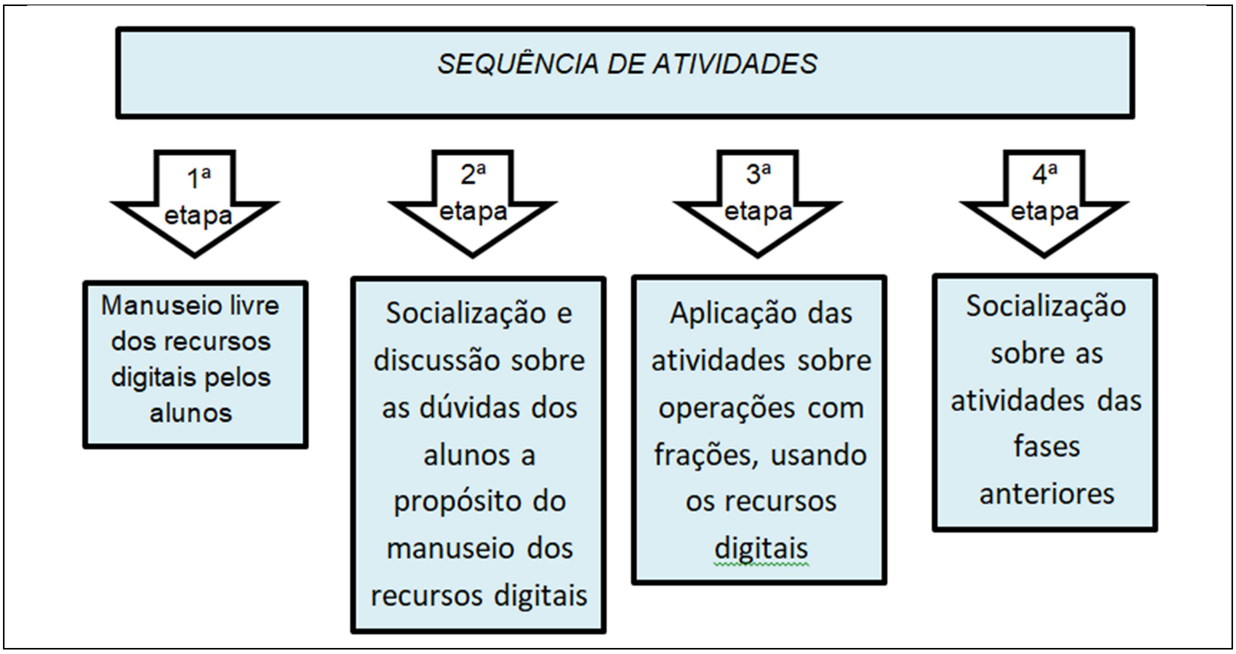
Não tivemos nenhum problema no envio e devolução dos testes. Em geral, os alunos devolveram as respostas em até uma hora após o envio.

No processo de análise dos dados da segunda fase, consideramos três categorias: questões em branco; respostas erradas e respostas corretas. Especificamente, para as respostas erradas, buscamos apurar os erros cometidos pelos alunos, a partir de inferências sobre as suas dificuldades nas operações com as frações propostas. Terminada esta etapa e, sendo avaliado os seus resultados, passamos para a segunda etapa da pesquisa.

3.2 SEGUNDA ETAPA

Na segunda etapa ocorreu a aplicação da sequência de atividades, organizada em quatro fases, conforme podemos observar na figura a seguir.

Figura 16 - Organização da Sequência de Atividades



Fonte: autoria própria.

Nesta ***primeira fase***, inicialmente, fizemos contato com os alunos das três escolas - 48 no total (Quadro 4), através de grupos que formamos no *WhatsApp*, explicando como seria realizada a segunda etapa da pesquisa. Tivemos resposta apenas dos alunos das Escolas B e C (Quadro 5). Fomos informados pelo professor da Escola A que os estudantes alegaram falta de tempo para se dedicarem às atividades escolares e à pesquisa, tendo em vista que muitos deles estudavam e trabalhavam. Dessa forma o número de alunos ficou reduzido a 34.

Quadro 5 - Participantes da segunda etapa por ano e escola - Primeira fase

ano	nº de alunos	escola
1º ano do ensino médio	12	C
2º ano do ensino médio	22	B (19 alunos) C (3 alunos)
Total	34	

Fonte: autoria própria.

Após o primeiro contato enviamos aos alunos, que já tinham participado da primeira etapa da pesquisa, apenas os *links* de acesso aos recursos digitais, da Physics Educacional Technology (PhEt) e do GeoGebra, para que eles tentassem manuseá-los livremente (durante uma semana). Entendemos que essa abordagem poderia contribuir ao senso criativo e crítico do aluno. A saber:

- Frações: Intro - https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-intro
- Frações: Números Mistos - https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-mixed-numbers
- Frações: Igualdade - https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-equality
- Multiplicação de Frações - https://www.geogebra.org/m/drFAJzXh
- Frações e Inteiros - https://www.geogebra.org/m/gn5cpjfd

Ressaltamos que adiante, nos próximos tópicos, detalharemos cada recurso digital supramencionado e as atividades que foram desenvolvidas a partir deles.

Na ***segunda fase***, fizemos dois encontros através do *Google Meet*, um com os alunos da escola B e outro com os alunos da escola C. A finalidade desses encontros foi tirar as dúvidas dos alunos sobre o uso dos já mencionados recursos digitais.

O primeiro encontro foi realizado com 14 alunos da escola C no dia 21 de junho de 2021, às 19:30 horas e durou 48 minutos e 48 segundos

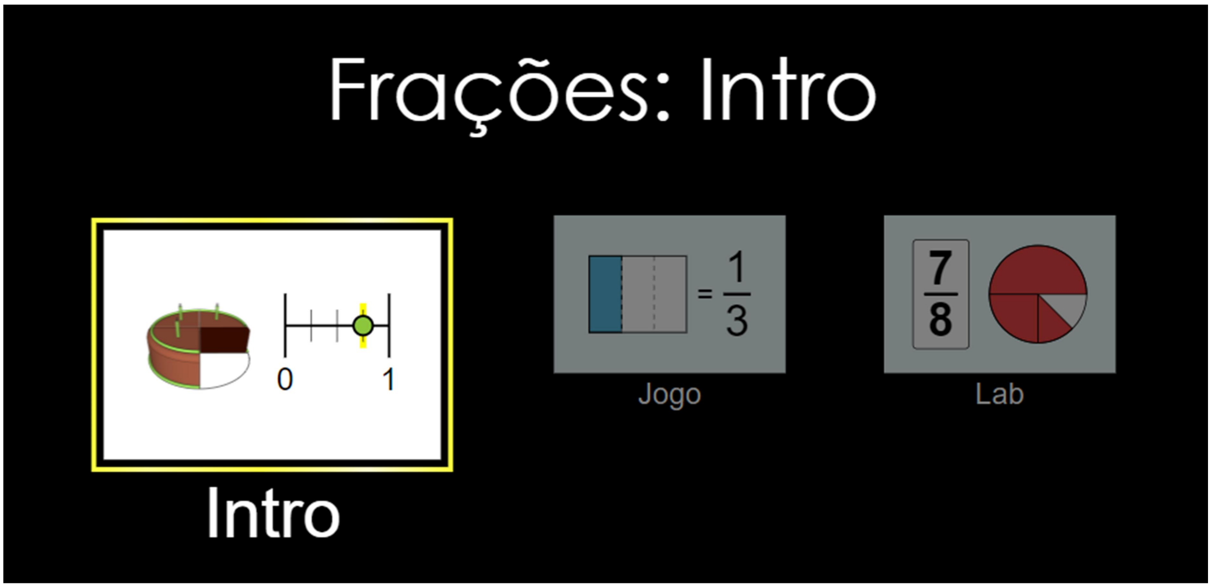
O segundo encontro foi realizado no dia 22 de junho de 2021, às 19:30 horas com os alunos da escola B, tendo a participação de 16 estudantes. A duração do encontro foi de 47 minutos e 57 segundos.

Na ***terceira fase***, enviamos aos alunos cinco atividades, nas quais eles deveriam manusear os recursos digitais. Cada atividade conteve orientações e questões sugeridas sobre o tema em estudo. Ao final, os alunos deveriam devolver, respondidas, as questões sugeridas, no prazo de 3 (três) dias. Passamos a descrever cada atividade.

3.2.1 Atividade 1

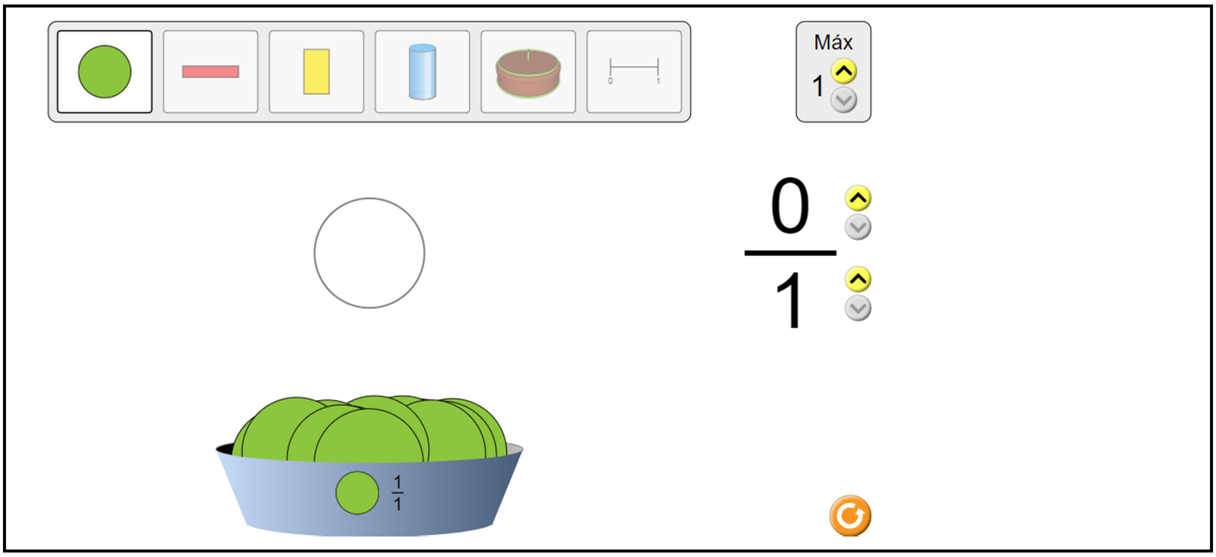
- ***<u>Descrição do recurso digital da Atividade 1</u>***

Figura 17 - Tela inicial do recurso digital usado na Atividade 1



Fonte: PhET (2021).
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-intro)

Figura 18 - Tela principal do recurso digital usado na Atividade 1



Fonte: PhET (2021).
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-intro)

A Figura 17 mostra a tela inicial do recurso digital usado na Atividade 1. Clicando no ícone INTRO, temos acesso à tela principal desse recurso (Figura 18). Do lado direito da tela principal há uma fração, que pode ser alterada, usando-se as setas que ficam à sua direita, mudando o numerador e o denominador da fração. Cada fração escolhida é representada na figura que fica no centro da tela.

Pode-se usar cinco tipos de figuras diferentes, inclusive a representação na reta numérica, de acordo com as opções que estão na parte superior esquerda da tela. O ícone que fica do lado direito da parte superior da tela controla o número de figuras que podem ser representadas no centro. Na parte central inferior, existe uma cesta com representações figurais das frações unitárias $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, etc., de acordo com o denominador sugerido para a fração. Assim, determinado um denominador para a fração, podemos representar frações na figura central, arrastando as frações unitárias da cesta.

- ***<u>Orientações aos alunos para Atividade 1</u>***

Quadro 6 - Orientações para Atividade 1

1	Clique no ícone **<u>INTRO</u>** para começar esta atividade
2	Você deve representar as seguintes frações: a) frações com numeradores e denominadores iguais; b) frações com numeradores maiores do que os denominadores; c) frações com numeradores menores do que os denominadores.
Observação: Para cada caso, faça várias representações. Use mais de uma figura e não deixe de usar a reta numérica. Observe o que acontece com a figura à medida que você muda o denominador e o numerador da fração. Observe o que acontece com a fração quando você muda a figura.	

Fonte: autoria própria.

As orientações dadas na Atividade 1 tiveram duas finalidades: 1. Estimular o aluno para compreender o significado do numerador e do denominador de uma fração, levando-os a perceber que frações com denominadores iguais representam quantidades da mesma "parte" (Exemplo: quantidades de meios, quantidades de terços, quantidades de quartos, etc.) e, assim, concluir que, para somar ou subtrair frações com denominadores iguais basta somar ou subtrair os numeradores, que representam as quantidades dessas "partes" iguais; 2. Incentivar o aluno a perceber que os números naturais podem ser escritos na forma de fração e que, na reta numérica, podemos representar qualquer fração, levando-o a concluir que as frações são números.

- ***Descrição das questões sugeridas na Atividade 1***

Quadro 7 - Questões sugeridas para Atividade 1

1	Represente a fração $\frac{1}{8}$. Em seguida, represente a fração $\frac{2}{8}$.
2	Represente a fração $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$. Qual o valor dessa soma?
3	Represente a fração $\frac{2}{8}-\frac{1}{8}$. Qual o valor dessa diferença?
4	Represente em uma figura as frações $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{9}$. Calcule o valor de $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$
5	Represente em uma figura as frações $\frac{8}{10}$ e $\frac{5}{10}$. Em seguida calcule o valor de $\frac{8}{10}-\frac{5}{10}$
6	Na atividade, você percebeu alguma coisa que mereça destaque?
7	Podemos dizer que as frações são números? Justifique sua resposta.

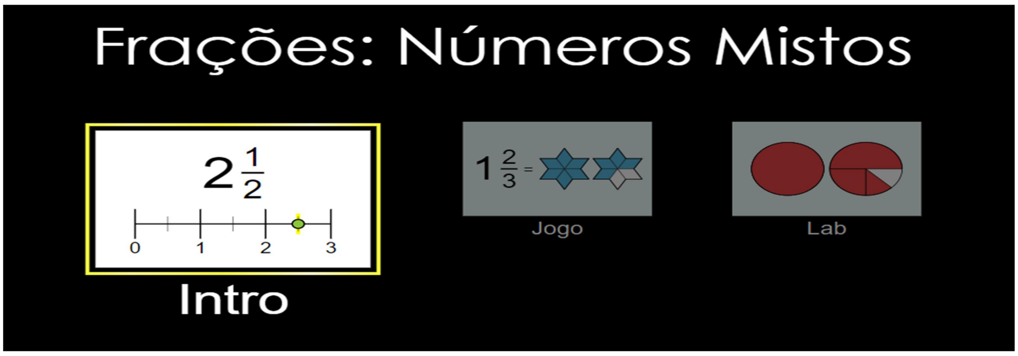
Fonte: autoria própria.

As questões sugeridas de 1 a 7 (Quadro 7), tiveram os seguintes objetivos: **1.** Avaliar o aprendizado dos alunos sobre a adição e a subtração de frações, com denominadores iguais, usando-se a representação figural (Questões 1 a 5); **2.** Estimular o pensamento crítico dos alunos (Questões 6); **3**. Avaliar o aprendizado dos alunos sobre a representação de fração na reta numérica (Questão 7).

3.2.2 Atividade 2

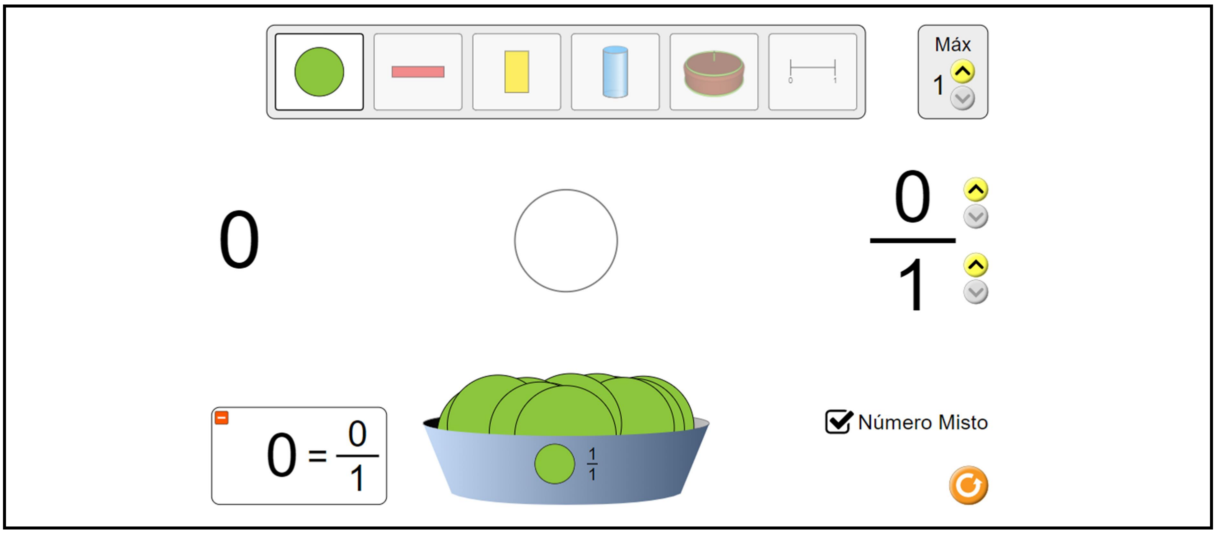
- ***Descrição do recurso digital da Atividade 2***

Figura 19 - Tela inicial do recurso digital usado na Atividade 2



Fonte: PhET (2021). (https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-mixed-numbers)

Figura 20 - Tela principal do recurso digital usado na Atividade 2



Fonte: PhET (2021).
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-mixed-numbers)

A Figura 19 mostra a tela inicial do recurso digital usado na Atividade 2. Clicando no ícone INTRO, temos acesso à tela principal desse recurso (Figura 20). Essa tela é semelhante à tela do recurso digital da Atividade 1, tendo como únicas diferenças o número misto, que fica do lado esquerdo da tela, e a igualdade entre o número misto e a fração, localizada do lado esquerdo inferior da tela. A representação do número misto e a igualdade entre o número misto e a fração são acessados pelo ícone "número misto" que fica na parte inferior direita da tela.

- ***<u>Orientações aos alunos para Atividade 2</u>***

Quadro 8 - Orientações para Atividade 2

1	Para começar esta atividade clique no ícone INTRO. Em seguida, marque o quadrinho do número misto.
2	Na tela aparecerá: a) a fração; b) a representação do número misto e c) a transformação do número misto em fração.
3	Represente várias frações com numeradores e denominadores iguais e diferentes. Observe para cada caso a representação da figura, do número misto e da transformação do número misto em fração.
4	Represente as frações $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$ e $\frac{7}{3}$. Para cada fração, observe a representação do número misto.

Fonte: autoria própria.

As orientações dadas nesta atividade tiveram como objetivo estimular o aluno para compreender que: **1.** Toda fração, cujo numerador é maior do que o denominador, pode ser representada pela soma de um número inteiro com uma fração menor do que um; **2.** Essa representação, sem o sinal da adição, é o que chamamos de número misto.

- ***Descrição das questões sugeridas na Atividade 2***

Quadro 9 - Questões sugeridas para Atividade 2

1	O número misto $1\ \frac{3}{4}$ representa que fração?
2	Qual a operação que devemos usar para transformar um número misto em fração?
3	Faz sentido representar uma fração por um número misto quando o numerador desta fração é menor que o denominador? Justifique sua resposta.

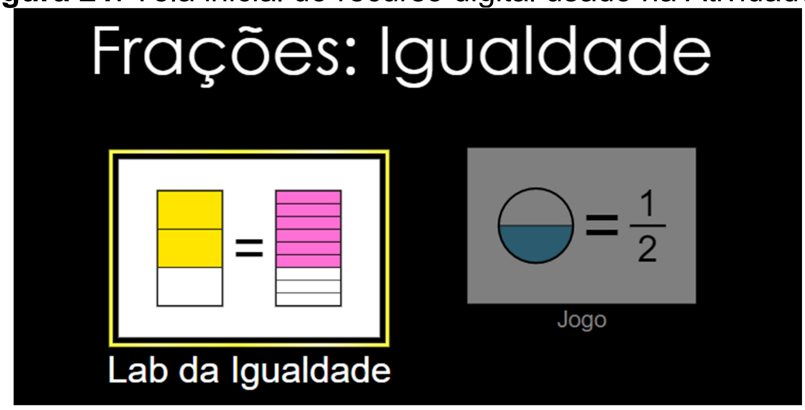
Fonte: autoria própria.

O objetivo das questões sugeridas foi avaliar a compreensão dos alunos sobre a representação das frações impróprias (frações cujo numerador é maior do que o denominador) por números mistos e suas transformações de uma representação para outra. Especificamente, a terceira questão foi elaborada com o intuito de o aluno refletir sobre o tema estudado.

3.2.3 Atividade 3

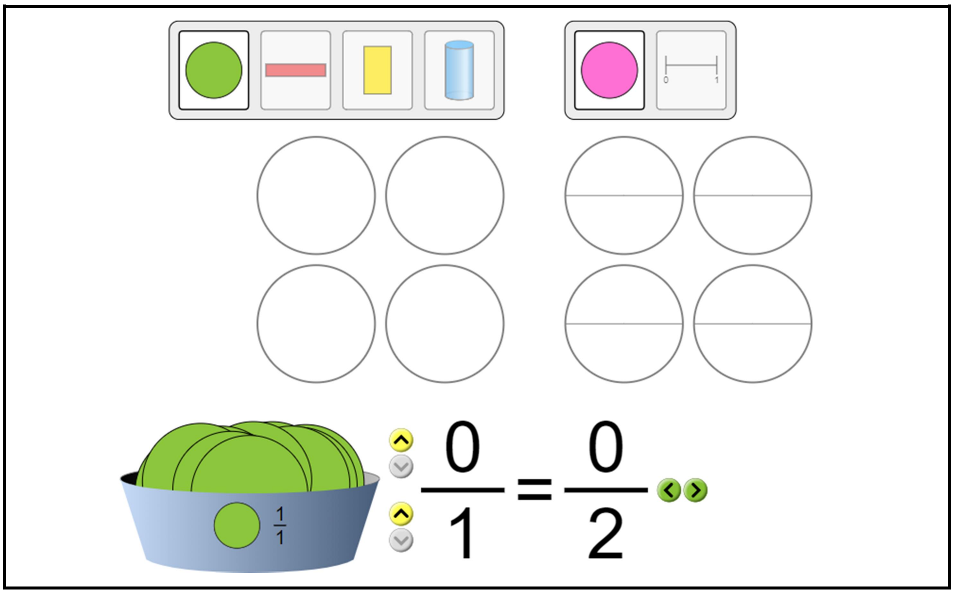
Descrição do recurso digital da Atividade 3

Figura 21: Tela inicial do recurso digital usado na Atividade 3



Fonte: PhET (2021).
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-equality)

Figura 22 - Tela principal do recurso digital usado na Atividade 3



Fonte: PhET (2021).
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/fractions-equality)

A Figura 21 mostra a tela inicial do recurso digital usado na Atividade 3. Clicando no ícone Lab da Igualdade, acessamos a tela principal desse recurso (Figura 22). Na parte inferior da tela, podemos escolher uma fração usando as setas amarelas. Para cada fração escolhida, o recurso apresenta duas frações equivalentes, que podem ser vistas, clicando nas setas verdes. No centro da tela, há dois conjuntos de figuras, o da esquerda representa a fração escolhida (primeira fração) e o da direita representa a fração equivalente à primeira. A cesta que se encontra na parte inferior, do lado esquerdo da tela, funciona da mesma forma que a do recurso digital da Atividade 1.

- ***<u>Orientações aos alunos para Atividade 3</u>***

Quadro 10 - Orientações para Atividade 3

1	Clique no ícone **<u>LAB DA IGUALDADE</u>** para começar esta atividade
2	Manipulando o numerador e o denominador da fração represente algumas frações e, para cada uma delas, verifique as duas frações que são iguais (equivalentes) à fração que você representou.
3	Observe para cada caso do item 2 a representação das frações na figura

Fonte: autoria própria.

As orientações dessa atividade (Quadro 10) tinham como objetivo estimular o aluno para compreender que: **1.** Existem infinitas frações com numeradores e denominadores diferentes, que representam a mesma parte do todo; **2.** Para achar uma fração equivalente a uma fração dada, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número natural diferente de zero; **3.** Usar as frações equivalentes para somar e subtrair frações com denominadores diferentes.

- ***<u>Descrição das questões da Atividade 3</u>***

Quadro 11 - Questões sugeridas para Atividade 3

1	Represente a fração $\frac{2}{3}$. Quais são as duas outras frações que o **lab da igualdade** dá como equivalentes a esta fração?
2	Você acha que há mais frações equivalentes a $\frac{2}{3}$? Se sim, escreva mais uma fração.
3	Quantas frações há equivalentes a $\frac{2}{3}$? Como podemos fazer para achá-las?
4	Escreva uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$ e uma fração equivalente a $\frac{1}{8}$, de modo que elas tenham o mesmo denominador. Agora calcule o valor de $\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$. Calcule também $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.
5	O fato de existirem frações equivalentes ajuda na soma e subtração de frações? Comente.

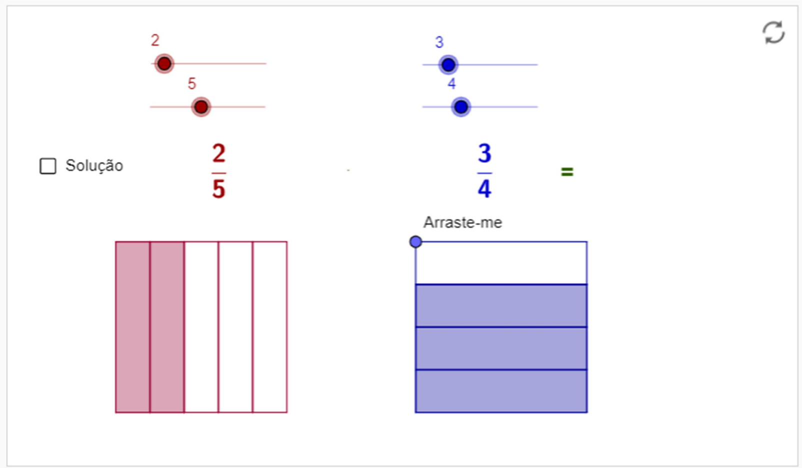
Fonte: autoria própria.

O objetivo das questões de 1 a 4 (Quadro 11) foi avaliar o aprendizado do aluno sobre as frações equivalentes e estimular o uso desse conhecimento na resolução de soma e de subtração de frações com denominadores diferentes. A Questão 5 teve a finalidade de contribuir para o pensamento crítico do aluno.

3.2.4 Atividade 4

- ***Descrição do recurso digital da Atividade 4***

Figura 23 - Tela do recurso digital usado na Atividade 4



Fonte: Araújo (2021).
(https://www.geogebra.org/m/drFAJzXh)

A Figura 23 mostra a tela do recurso digital usado na Atividade 4. No centro da tela encontramos duas frações que devem ser multiplicadas. Para alterar as frações, podemos utilizar os controles deslizantes, que ficam na parte superior da tela. Na parte inferior, temos duas figuras congruentes, a da esquerda representa a primeira fração e a da direita representa a segunda fração, cada representação usa uma cor diferente. Para achar o resultado da multiplicação das frações, deve-se sobrepor a figura da direita à figura da esquerda e observar a parte destacada com uma cor diferente das cores representadas nas figuras iniciais. O resultado pode ser conferido, clicando no ícone solução, que está representado do lado esquerdo central da tela.

- ***Orientações aos alunos para Atividade 4***

Quadro 12 - Orientações para Atividade 4

1	Usando os controles deslizantes de cada fração, escreva as frações que você quer multiplicar
2	Em seguida, observe como cada fração está representada abaixo
3	Clicando no ponto azul e arraste a figura da esquerda até que ela se sobreponha à figura da direita
4	Aperte no botão solução e compare o resultado da multiplicação com o resultado da figura sobreposta
5	Repita a sequência para várias frações
Observação: não use frações com numeradores maiores do que os denominadores (esta atividade não contempla estes resultados)	

Fonte: autoria própria.

As orientações dadas na Atividade 4 (Quadro 12) tiveram como objetivo estimular o aluno para perceber que quando as figuras se sobrepõem estamos encontrando a fração de outra fração e como o resultado da figura sobreposta pode ser conferido algebricamente, no recurso, o aluno é levado a compreender que multiplicar duas frações é o mesmo que achar uma fração de outra fração.

- ***Descrição das questões da Atividade 4***

Quadro 13 - Questões sugeridas para Atividade 4

Questões sugeridas para a atividade 4	
1	Encontre o valor de $1 \times \frac{1}{3}$. Em seguida encontre o valor de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. Ao sobrepor a figura que representa a fração $\frac{1}{3}$ sobre a figura que representa a fração $\frac{1}{2}$, o que você acha que foi feito? Explique.
2	Calcule o valor das seguintes operações: a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$ b) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} =$
3	Apesar das figuras desta atividade não contemplarem os resultados para frações impróprias (frações com numeradores maiores que os denominadores), o raciocínio usado ainda é válido. Assim, calcule o resultado das seguintes operações de multiplicação: Para cada caso, faça duas figuras, uma para cada fração e use a ideia da atividade para achar o resultado. a) $= 2 \times \frac{3}{4} =$ b) $= \frac{2}{5} \times 3 =$ c) $= \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} =$
4	O que você acha que faltou na atividade para que ela contemplasse também as frações impróprias (frações com numeradores maiores que os denominadores)?

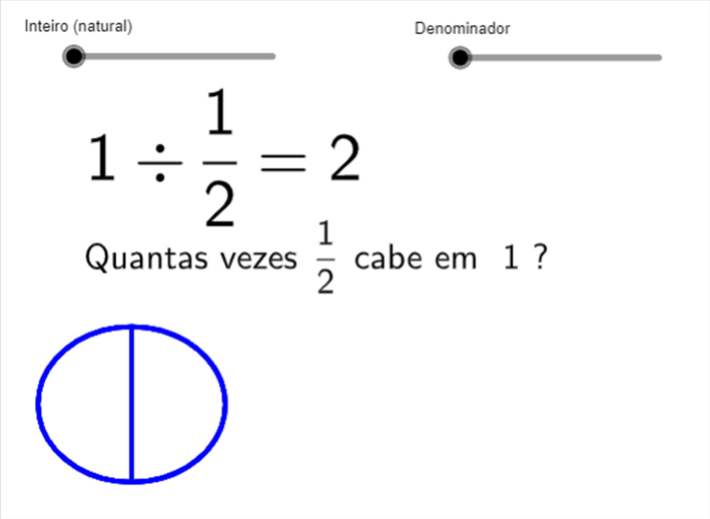
Fonte: autoria própria.

As questões sugeridas de 1 a 3 (Quadro 13) tiveram a finalidade de avaliar o aprendizado dos alunos sobre as operações de multiplicação de frações, usando o recurso digital apresentado. Para isso, solicitamos que eles realizassem algumas operações com multiplicação de frações. Podemos dizer que a última questão dessa atividade teve o objetivo de contribuir para o senso crítico do aluno sobre o tema em tela.

3.2.5 Atividade 5

- ***Descrição da primeira parte do recurso digital da Atividade 5***

Figura 24 - Tela da primeira parte do recurso digital usado na Atividade 5



Fonte: Fonte: Sousa (2021).
(https://www.geogebra.org/m/gn5cpjfd)

Este recurso (Figura 24) propõe a divisão de um número inteiro por uma fração unitária (fração de denominador igual a 1). Na parte superior da tela (Figura 24) existem dois controles deslizantes que podem alterar o número inteiro e o denominador da fração. O resultado dessa divisão aparece assim que manipulamos os controles deslizantes. A resposta também aparece na representação figural, que fica na parte inferior da tela. A ideia desse recurso é calcular a divisão, usando a noção de quantas vezes o divisor cabe no dividendo.

- ***Orientações aos alunos para a primeira parte do recurso da Atividade 5***

Quadro 14 - Orientações para a primeira parte do recurso da Atividade 5

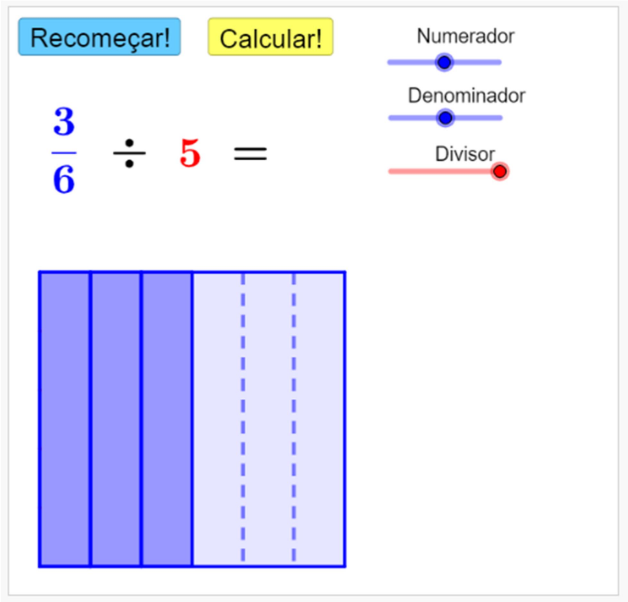
1	Na primeira parte da atividade, vamos dividir um número inteiro por uma fração de numerador igual a 1
2	Vamos usar uma das ideias de divisão, que é saber quantas vezes o divisor cabe no dividendo
3	Com os controles deslizantes, escreva o número inteiro e o denominador da fração
4	Observe o resultado da divisão e a figura que corresponde ao resultado
5	Repita a sequencia para várias frações e vários números inteiros

Fonte: autoria própria.

As orientações dadas na Atividade 5 tiveram como objetivo contribuir para que o aluno percebesse que a fração $\frac{1}{a}$ cabe ***a*** vezes no número 1, ***2a*** vezes no número 2 e assim, sucessivamente. Dessa forma, esperávamos que ele concluísse que a fração $\frac{b}{a}$ cabe ***a*** vezes no número ***b***.

- ***<u>Descrição da segunda parte do recurso digital da Atividade 5</u>***

Figura 25 - Tela da segunda parte do recurso digital usado na Atividade 5



Fonte: Sousa (2021).
(https://www.geogebra.org/m/gn5cpjfd)

Na parte superior da tela (Figura 25) existem dois ícones, um para recomeçar a operação de divisão e outro para calcular o valor da divisão. À direita, existem três controles deslizantes que alteram o numerador da fração, o denominador da fração e o divisor da operação. Na parte inferior da tela temos uma figura que representa a fração proposta na divisão. Quando clicamos no ícone calcular, a figura é dividida horizontalmente pelo divisor da operação proposta, e passa a representar o resultado final da divisão, através de retângulos pintados de cor diferente das cores iniciais (azul claro e azul escuro).

- ***<u>Orientações aos alunos para a segunda parte do recurso da Atividade 5</u>***

Quadro 15 - Orientações para o segundo recurso da Atividade 5

1	Agora vamos dividir uma fração por um número inteiro
2	Para este caso, usaremos a seguinte ideia de divisão: dividir o dividendo em partes iguais.
3	Usando os controles deslizantes, escolha a fração e o número inteiro para realizar a divisão.
4	Aperte em calcular e observe como a figura se desenha e compare com o resultado da divisão
5	Aperte em recomeçar e repita a sequência para várias frações

Fonte: autoria própria.

As orientações dadas nesta atividade tiveram a finalidade de estimular o aluno para perceber que a divisão de uma fração por um número inteiro, pode ser pensada como a divisão de um todo em partes iguais e tomada apenas uma dessas partes. Nesse processo, o denominador da fração fica multiplicado pelo número inteiro e o numerador fica multiplicado por 1.

- ***Descrição das questões da Atividade 5***:

Quadro 16 - Questões sugeridas para Atividade 5

1	Calcule o valor de $1 \div \frac{1}{3}$. Agora calcule o valor de $1 \div \frac{2}{3}$. Caso você tenha dificuldade para achar o valor da segunda divisão pense o seguinte: o que de $\frac{2}{3}$ cabe em 1?
2	Até aqui estudamos a ideia de fração como parte de um todo. Esse todo pode ser qualquer coisa, inclusive uma fração. Usando este raciocínio e observando a resolução da questão 1 desta atividade, calcule: a. $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$

Fonte: autoria própria.

As questões sugeridas (Quadro 16) tiveram a finalidade de avaliar o aprendizado dos alunos nas operações de divisão de frações, usando o recurso digital apresentado. Para isso, solicitamos que eles fizessem algumas operações com divisão de frações e, quando necessário, demos as orientações para que o objetivo fosse atingido. Demos ênfase ao primeiro recurso da Atividade 5 que mostrava a ideia de quantas vezes o divisor cabe no dividendo.

Ressaltamos que nesta etapa, os alunos da escola C receberam as atividades através do aplicativo *WhatsApp* e os da escola B através do *Google Classroom*. Ao enviar as atividades instruímos os alunos a fazer as atividades e devolver as questões no prazo de três dias. A devolução foi feita dentro do prazo estipulado, por meio do *WhatsApp* para os alunos da escola C e do *Google Classroom* para os alunos da escola B. As atividades foram enviadas aos 34 alunos constantes do Quadro 5, mas apenas 14 alunos devolveram as questões respondidas, como mostra o Quadro 17 .

Quadro 17 - Número de alunos por ano e escola que devolveram as questões

ano	nº de alunos	escola
1º ano do ensino médio	7	C
2º ano do ensino médio	7	B
Total	14	

Fonte: autoria própria.

Na ***quarta fase*** houve a socialização e discussão das atividades realizadas, com a finalidade de corrigir as questões sugeridas e tentar chegar, junto com os alunos, aos objetivos traçados. Para isso, realizamos dois encontros com os alunos das escolas B e C, por meio da plataforma do *Google Meet*. O registro desses encontros foi gravado pela mesma plataforma.

O ***primeiro encontro*** foi realizado no dia 01 de julho de 2021, às 19:30 horas, com a participação de 6 alunos da escola C e durou 1 hora, 44 minutos e 45 segundos.

O ***segundo encontro*** foi realizado no dia 05 de julho de 2021, às 19:30 horas com a participação de 5 alunos da escola B e durou 2 horas, 14 minutos e 05 segundos.

3.3 TERCEIRA ETAPA

Na terceira etapa enviamos aos alunos, por meio de formulário eletrônico *Google Forms*, um questionário contendo inicialmente questões básicas do perfil de cada aluno, a saber: 1. Identificação de e-mail; 2. Nome do aluno; 3. Nome da escola; 4. Ano que estuda.

Após o levantamento do perfil dos alunos propomos que eles falassem sobre o uso dos recursos digitais, como se segue:

5. Você utilizou a plataforma da PhET ao responder a Atividade 1? O que você achou dessa atividade?

6. Você utilizou a plataforma da PhET ao responder a Atividade 2? O que você achou dessa atividade?

7. Você utilizou a plataforma da PhET ao responder a Atividade 3? O que você achou dessa atividade?

8. Você utilizou a plataforma do GeoGebra ao responder a Atividade 4? O que você achou dessa atividade?

9. Você utilizou a plataforma do GeoGebra ao responder a Atividade 5? O que você achou dessa atividade? Esse questionário teve como objetivo principal saber o que os alunos acharam do uso dos recursos digitais para o aprendizado dos temas apresentados.

O Quadro 18, mostra o número de alunos, por ano e escola que responderam ao questionário.

Quadro 18 - Número de alunos por ano e escola que responderam ao questionário da terceira etapa

ano	nº de alunos	escola
1º ano do ensino médio	7	C
2º ano do ensino médio	7	B
Total	14	

Fonte: autoria própria.

Ao finalizarmos esta apresentação sobre os procedimentos metodológicos desenvolvidos nas três etapas da presente pesquisa, expomos no capítulo a seguir os resultados obtidos em cada uma delas.

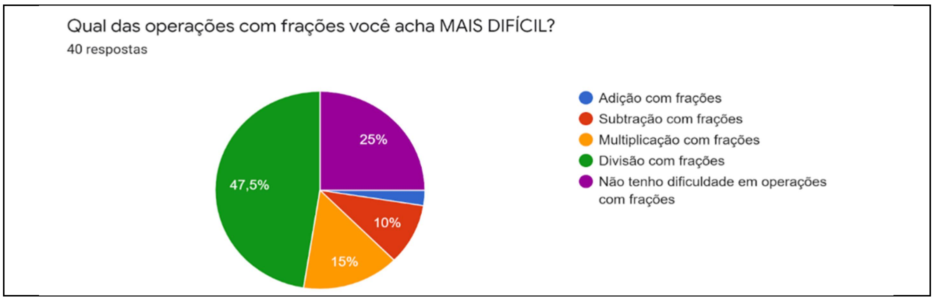
4 RESULTADOS

4.1 RESULTADOS DA PRIMEIRA ETAPA

4.1.1 Resultados do questionário

O questionário a fim de averiguar as dificuldades sobre as operações com frações contou com a participação de 40 alunos do Ensino Médio (como detalhamos no item 3.1). Ao questionarmos os alunos sobre: "Qual das operações com frações você acha MAIS DIFÍCIL?" - Podemos observar a partir da Figura 26 que a maioria dos alunos (47.5%) considerou a operação de divisão a mais difícil.

Figura 26 - Operação com frações considerada mais difícil



Fonte: dados da pesquisa.

Especificamente, os alunos ao falarem de sua maior dificuldade sobre as OPERAÇÕES COM FRAÇÕES, expressaram sobre a divisão:

> *A4 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Eu não costumo resolver muitas questões com frações, mas acredito que minha maior dificuldade seja com a divisão. Também acredito que não seja uma dificuldade muito grande, mas com algumas resoluções de questões e a parte teórica este problema será brevemente resolvido.*
>
> *A10 (2º ano do Ensino Médio - Escola C): Às vezes, esqueço como fazer o processo de divisão com frações.*
>
> *A20 (3º ano do Ensino Médio - Escola A): Tenho dificuldade em fração com subtração, divisão e multiplicação.*
>
> *A26 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Não tenho muita dificuldade com frações, porém se fosse citar alguma, eu diria a divisão de frações, porque é a que eu costumo esquecer as regras com mais frequência.*
>
> *A33 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): A divisão. Sou péssima em dividir, então isso se torna um problema.*
>
> *A35 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Acho que fração no geral me assusta, mas sempre tento desenrolar. Acho que o que mais tenho dificuldade realmente é em divisão pois sempre fico meia perdida em relação ao que fazer.*

> *A30 (1º ano do Ensino Médio - Escola C): divisão com frações e operações com números inteiros e frações. Sinto que não aprendi direito quando tava no fundamental 1.*
>
> *A38 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): a maior dificuldade é na de divisões mesmo.*
>
> *A36 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): no geral não é muita dificuldade com exceção da divisão de frações, eu só não lembro muito bem as regras, nada que uma revisão não resolva.*

Alguns alunos apontaram outras dificuldades, sobretudo, relacionadas a não lembrarem as regras utilizadas para resolver as operações com frações.

> *A3 (1º ano do Ensino Médio - Escola C): Confundo algumas sequências, no caso, algumas regras.*
>
> *A6 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Eu nunca sei se depois de fracionar os denominadores, por qual o resultado (do fracionamento) divide ou multiplica as frações originais.*
>
> *A9 (1º ano do Ensino Médio - Escola C): Eu esqueço como se resolve às vezes.*
>
> *A24 (1º ano do Ensino Médio - Escola C): Às vezes esqueço de usar m.m.c. e m.d.c. nas questões simplesmente me dá um branco na mente.*
>
> *A21 (3º ano do Ensino Médio - Escola A): Eu tenho dificuldade, porque eu confundo as regras que preciso na hora de resolver.*
>
> *A25 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): No geral eu consigo responder corretamente, o que me trava é a insegurança de estar me confundindo com alguma regra.*

Dentre outras dificuldades, os alunos mencionaram operar com frações representadas por números mistos. Vejamos os depoimentos:

> *A18 (3º ano do Ensino Médio - Escola A): Quando tem número em frente às frações.*
>
> *A8 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Eu meio que travo na hora de fazer, ou acabo não fazendo na ordem certa. Mesmo tendo na memória o que já estudei sobre isso, na minha cabeça fica como se eu não soubesse (dá um branco). A parte de multiplicar e dividir, quando ela fica junto com algumas equações também.*
>
> *A12 (1º ano do Ensino Médio - Escola C): Tenho dificuldade na maioria das questões que há fração, nunca sei por onde começar.*
>
> *A14 (2º ano do Ensino Médio - Escola B): Minha maior dificuldade é quando a fração é muito detalhada, tipo com parênteses, expoentes etc.*
>
> *A31 (2º ano do Ensino Médio - Escola C): Minha maior dificuldade, principalmente, é quando envolve números ou caracteres diferentes do convencional, como raízes quadradas, cúbicas, quando temos que fazer mais de uma operação com números inteiros para realizar uma operação, não importando qual seja, com a fração. Exemplo: caiu duas questões em minha prova, a qual eu tinha que juntar um número inteiro à fração para aí eu poder dividir ela, no momento, eu pensava que era para multiplicar por esse número inteiro, porém, logo depois fiquei sabendo que era somando a fração com um número inteiro, são essas situações a qual eu possuo dúvida em relação às operações com fração.*

Os resultados desse questionário nos ofereceram, inicialmente, um primeiro contato com os alunos a fim de melhor compreender as suas dificuldades sobre operações com frações, que se revelaram em torno de: divisão, número misto, resolução de equações, potenciação, dentre outras. Entretanto, podemos observar no tópico a seguir (4.1.2), por meio do teste diagnóstico, que os erros cometidos pelos alunos, ao operar com frações, demonstram outros problemas de aprendizagem sobre esse tema. As “regras” parecem desviar a atenção dos estudantes em detrimentos dos saberes frações/operações.

4.1.2 Resultados do teste diagnóstico

Apresentamos no Quadro 19 o número de acertos, erros e questões que não foram resolvidas, concernentes às operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais (itens “a” e “b”).

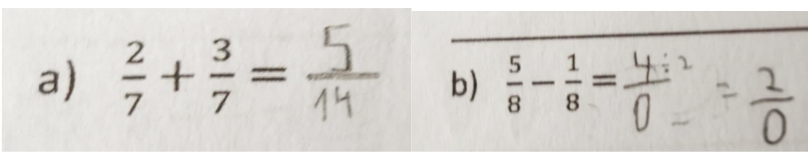
Quadro 19 - Resultados de adição e subtração de frações com denominadores iguais

Item	Acertos	Erros	Não responderam
a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$	34	14	0
b) $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=$	34	14	0

Fonte: autoria própria.

Podemos perceber que os itens “a” e “b” (Quadro 19) trataram da adição e subtração de frações com denominadores iguais e foram os que tiveram mais acertos, de modo geral, no teste diagnóstico. Dentre os erros cometidos, nesses itens, o mais comum está exposto no exemplo da Figura 27.

Figura 27 - Exemplo de resposta dos itens “a” e “b” - adição e subtração de frações com denominadores iguais.



Fonte: protocolo da pesquisa.

Podemos observar no exemplo da Figura 27, que o aluno somou ou subtraiu os numerados para achar o numerador da fração resultante e fez a mesma operação com os denominadores.

No Quadro 20, temos os resultados concernentes às operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes (itens “c” e “d”).

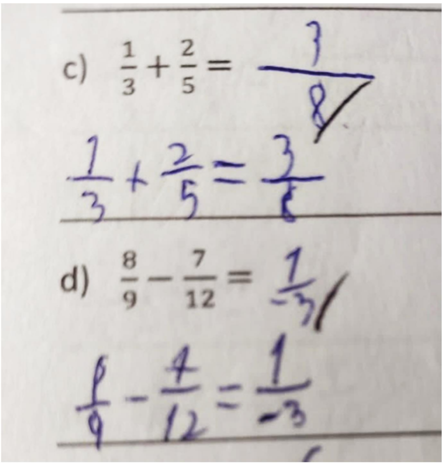
Quadro 20 - Resultados de adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Item	Acertos	Erros	Não responderam
c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=$	24	23	1
d) $\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=$	16	30	2

Fonte: autoria própria.

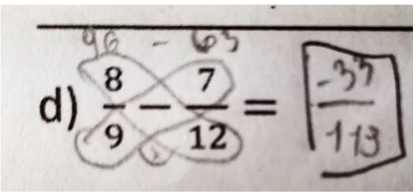
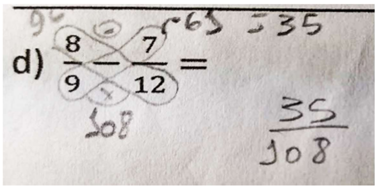
A partir do Quadro 20, verificamos que, entre esses dois itens, a maior dificuldade apresentada pelos alunos foi com o item “d”, que se refere à subtração de frações com denominadores diferentes. Em muitos casos, os alunos repetiram o erro de somar e subtrair os numeradores e denominadores (Figura 28), como aconteceu nos itens “a” e “b”.

Figura 28 - Exemplo de resposta dos itens “c” e “d” - adição e subtração de frações com denominadores diferentes



Fonte: protocolo da pesquisa.

No item “d”, observamos, também, vários erros relacionados às operações com os números inteiros, como mostram os exemplos das figuras abaixo.

Figura 29 - Primeiro exemplo de resposta do item “d” - subtração de frações com denominadores diferentes	**Figura 30** - Segundo exemplo de resposta do item “d” - subtração de frações com denominadores diferentes
	

Fonte: protocolo da pesquisa.

No exemplo da Figura 29, podemos inferir que o aluno multiplicou os numeradores pelos denominadores (8 x 12 e 7 x 9), depois subtraiu os resultados para obter o numerador da fração resultante (96 - 63 = - 33), o resultado correto seria 33. Para achar o denominador da fração resultante, ele multiplicou os denominadores (9 x 12= 113), o correto é 108. Já no exemplo da Figura 30, é provável que o aluno tenha utilizado a mesma estratégia do aluno anterior ou que ele tenha buscado o múltiplo dos denominadores (multiplicando 9 x 12 = 108). Após isso, para obter o numerador da fração resultante, ele realizou as seguintes operações: 108: 9 x 8 - 108:12 x 7= 35, o resultado correto é 33. O erro aconteceu porque na operação 108:12 x 7 o aluno encontrou o valor de 61, onde o correto é 63. Em ambos os casos diagnosticamos erros básicos de multiplicação de números inteiros. No Quadro 21, apresentamos os resultados referentes às operações de adição e de subtração de frações com números inteiros (itens “e” e “f”).

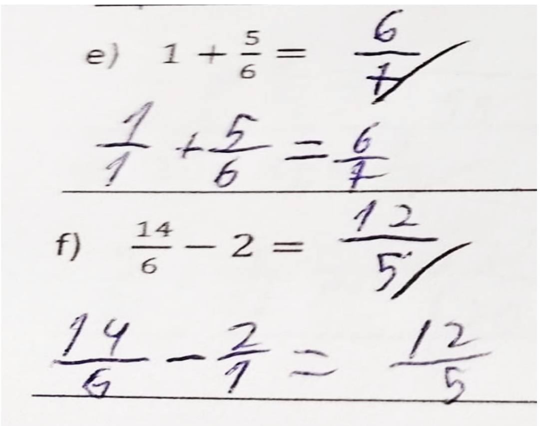
Quadro 21 - Resultados de adição e de subtração de frações e inteiros

Item	Acertos	Erros	Não responderam
e) $1+\frac{5}{6}$	20	27	1
f) $\frac{14}{6}-2$	21	24	3

Fonte: autoria própria.

Nestes itens (Quadro 21), a maioria dos alunos entendeu que o número inteiro podia ser representado por uma fração, bastando para isso, dividir o número inteiro por 1. No entanto, continuaram somando e subtraindo os numeradores e os denominadores das frações (Figura 31), sendo esse, mais uma vez, o erro mais comum.

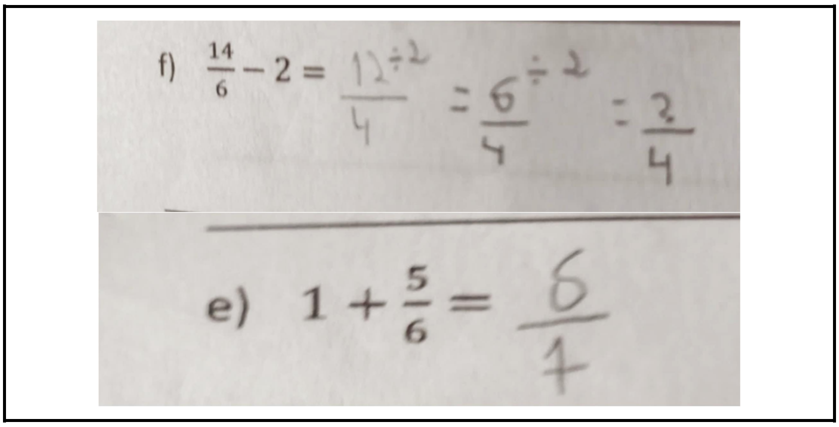
Figura 31 - Exemplo de resposta dos itens “e” e “f” - adição e subtração de frações com números inteiros



Fonte: protocolo da pesquisa.

Outro erro que apareceu bastante foi somar ou subtrair o número inteiro ao numerador e ao denominador da fração (Figura 32).

Figura 32 - Exemplo de resposta dos itens “e” e “f” - adição e subtração de frações com números inteiros



Fonte: protocolo da pesquisa.

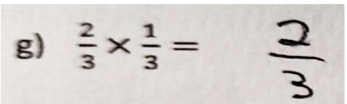
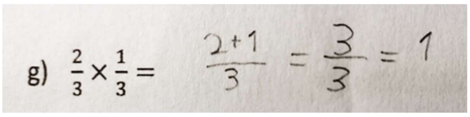
No Quadro 22, temos os resultados das operações de multiplicação de frações e multiplicação de frações por um número inteiro (itens “g” “h” e “i”).

Quadro 22 - Resultados da multiplicação de frações e da multiplicação de fração por um número inteiro

Item	Acertos	Erros	Não fizeram
g) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	24	23	1
h) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	26	22	0
i) $2 \times \frac{1}{7}$	24	21	3

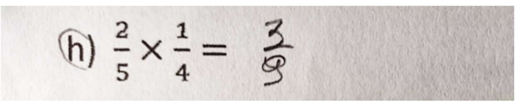
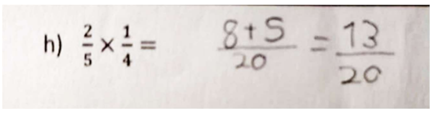
Fonte: autoria própria.

No item "g" (Quadro 22), em que ocorre uma multiplicação com denominadores iguais, constatamos que alguns alunos cometeram o erro, por repetir o denominador e multiplicar apenas os numeradores (Figura 33). Em outros casos (Figura 34), eles repetiram o denominador e somaram o numerador.

Figura 33 - Exemplo de resposta do item "g" - multiplicação de frações	**Figura 34** - Exemplo de resposta do item "g" - multiplicação de frações
	

Fonte: protocolo da pesquisa.

Sobre o item "h" (Quadro 22), constatamos que alguns alunos somaram os numeradores e denominadores (Figura 35). Podemos inferir que outros alunos aplicaram a técnica do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) (Figura 36), usada na adição de frações com denominadores diferentes.

Figura 35 - Exemplo de resposta do item "h" - multiplicação de frações	**Figura 36** - Exemplo de resposta do item "h" - multiplicação de frações
	

Fonte: protocolo da pesquisa.

Quanto ao Item “i” (Quadro 22), podemos perceber erros dos alunos, do tipo apresentado no exemplo da Figura 37, ou seja, o denominador foi repetido e para achar o numerador eles somaram o número inteiro ao numerador da fração. Já no exemplo da Figura 38, diagnosticamos que para encontrar o denominador eles repetiram o denominador da fração. O numerador foi encontrado multiplicando o número inteiro pelo denominador da fração e o resultado somado ao numerador.

Figura 37 - Exemplo de resposta do item “i” - multiplicação de fração por um número inteiro

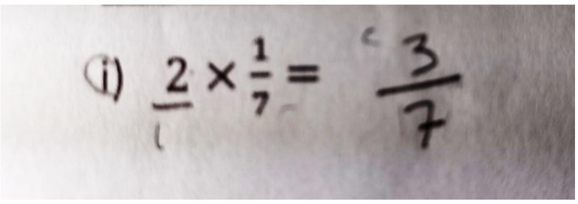
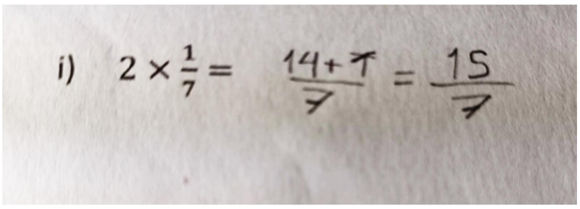


Figura 38 - Exemplo de resposta do item “i” - multiplicação de fração por um número inteiro



Fonte: protocolo da pesquisa.

No Quadro 23 temos os resultados concernentes às operações de divisões de frações, divisão de fração por um número inteiro e divisão de um número inteiro por fração (itens “j” “k” “l” e “m”).

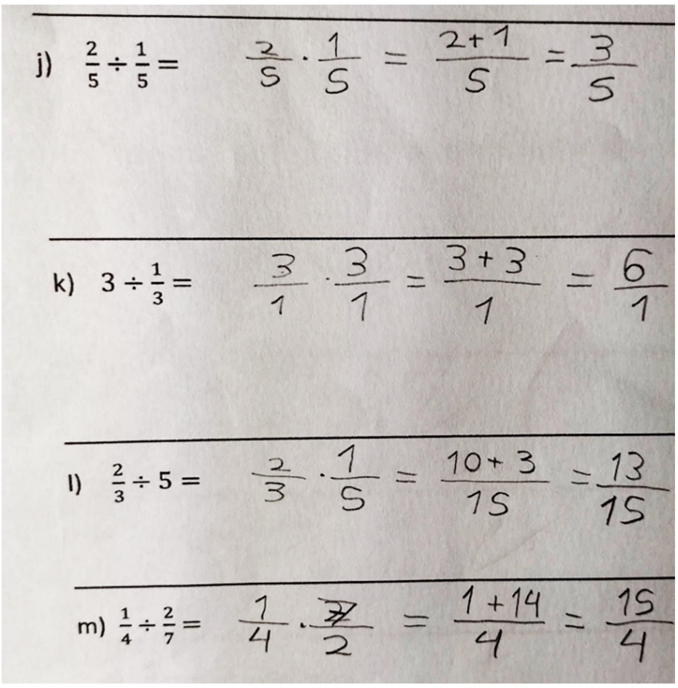
Quadro 23 - Resultados da divisão de frações, divisão de fração por um número inteiro e divisão de um número inteiro por uma fração

Item	Acertos	Erros	Não responderam
j) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{5}$	23	23	2
k) $3 \div \frac{1}{3}$	20	26	2
l) $\frac{2}{3} \div 5$	18	28	2
m) $\frac{1}{4} \div \frac{2}{7}$	20	23	5

Fonte: autoria própria.

Nos itens “j”, “k”, “l” e “m” (Quadro 23), dois erros aconteceram com mais frequência: 1. Não inverter a segunda fração; 2. Tratar a divisão de frações como se fosse soma de frações. Além disso, podemos perceber que o fato de os denominadores serem iguais interfere nas estratégias de resolução dos alunos. Os erros diagnosticados aparecem no exemplo da Figura 39.

Figura 39 - Exemplo de resposta do item “j”, “k”, “l”, “m” - divisão de fração por fração, divisão de fração por um número inteiro e divisão de um número inteiro por fração



Fonte: protocolo da pesquisa.

No Quadro 24, temos os resultados concernentes às operações de adição e multiplicação de frações envolvendo números mistos (itens “n” e “o”).

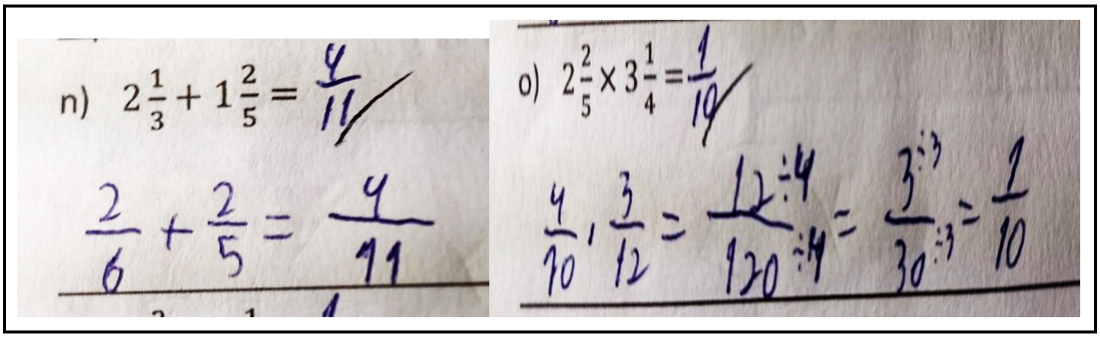
Quadro 24 - Resultados da soma e multiplicação de frações envolvendo números mistos

Item	Acertos	Erros	Não responderam
n) $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{5}$	10	32	6
o) $2\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{4}$	7	7	34

Fonte: autoria própria.

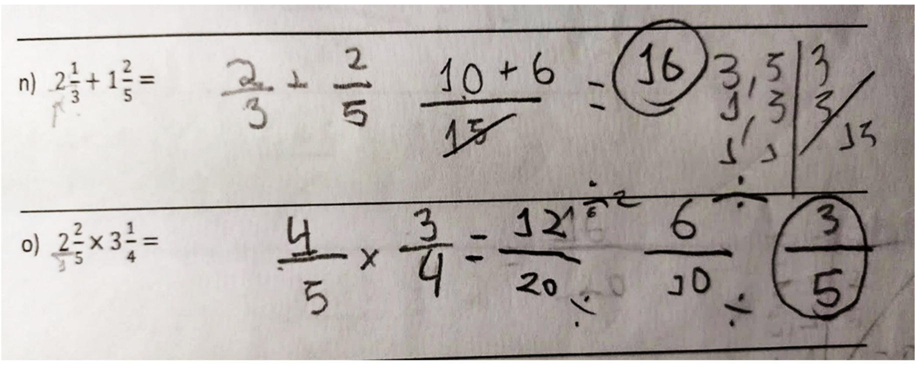
Constatamos que a maior dificuldade dos alunos, além das já apresentadas na adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, foi a transformação da representação do número misto em fração. Para fazer essa transformação os alunos multiplicavam a parte inteira pelo numerador e denominador da fração e outras vezes só pelo numerador da fração, repetindo o denominador (Figura 40 e 41), respectivamente.

Figura 40 - Exemplos de respostas dos itens "n" e "o" - soma e multiplicação de frações envolvendo números mistos



Fonte: protocolo da pesquisa.

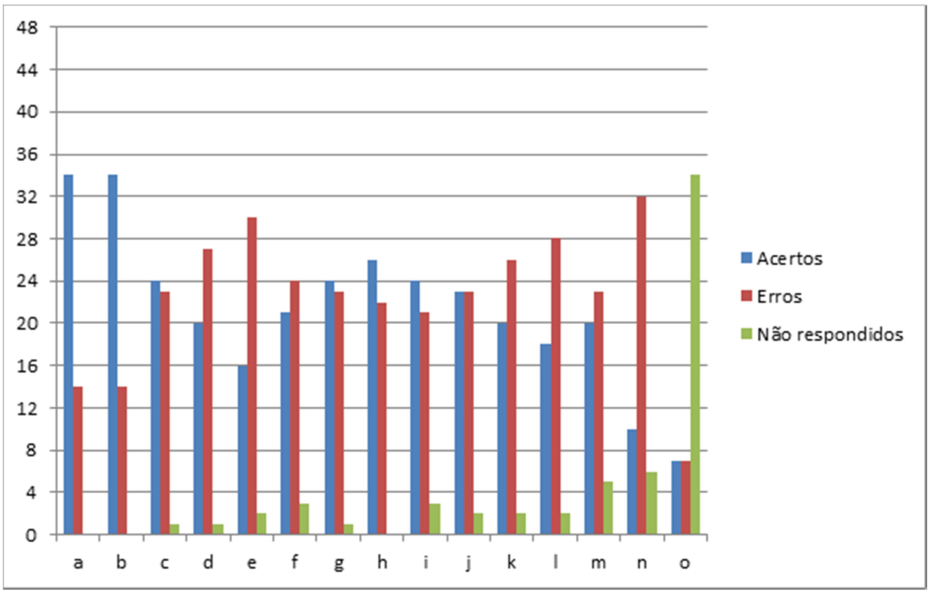
Figura 41 - Exemplos de respostas dos itens "n" e "o" - soma e multiplicação de frações envolvendo números mistos



Fonte: protocolo da pesquisa.

A título de síntese do teste diagnóstico, as dificuldades dos alunos em operar com frações se revelaram da seguinte forma: as questões que tiveram maior índice de acertos foram aquelas de adição e subtração de frações com denominadores iguais ("a" e "b"); aquelas que tiveram maior índice de erros (mais da metade dos alunos) foram os itens "n", "e", "l" e "d"; respectivamente, concernentes à: soma de frações envolvendo números mistos, subtração de frações com denominadores diferentes, divisão de fração por um número inteiro e soma de um número inteiro com uma fração, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 42 - Panorama dos resultados do teste diagnóstico



Fonte: autoria própria.

Na Figura 42, podemos perceber que a maioria dos alunos não responderam os itens “n” e “o”, referentes às operações de adição e multiplicação de frações, envolvendo números mistos.

De forma geral, verificamos que os alunos do Ensino Médio demonstraram já ter estudado as operações com frações e as regras de algoritmo para realizar cada operação. No entanto, eles não sabem qual a regra que se adequa a cada tipo de operação. Assim, entendemos necessário propor uma sequência de atividades de forma a rever o conceito de fração e, a partir dessa revisão conceitual, trabalhar as operações com frações, sem necessariamente usar regras.

4.2 RESULTADOS DA SEGUNDA ETAPA

4.2.1 Resultado da primeira e segunda fase

Relembrando, na ***primeira fase*** enviamos a 34 alunos (das escolas B e C) apenas os links de acesso aos recursos digitais relacionados às operações com frações. Esta fase aconteceu de forma assíncrona. Na ***segunda fase***, em que prevemos o retorno dessa atividade (após uma semana), foi constatado que tanto os alunos da escola B quanto os alunos da escola C, em sua maioria, não tinham manuseado os recursos digitais (como sugerimos na primeira fase). Então, abrimos cada recurso e debatemos com os alunos o funcionamento de cada um deles, até que não houvesse nenhuma dúvida. Os recursos foram apresentados na seguinte ordem: Frações - Intro, Frações - Números Mistos, Frações - Igualdade, Multiplicação de Frações e Frações e Inteiros. Esta apresentação serviu de base para a terceira fase, que expomos a seguir.

4.2.2 Resultado da terceira fase

Passamos a apresentar um resumo das respostas apresentadas pelos alunos para cada atividade da sequência.

Relembrando, na Atividade 1 constam as seguintes questões:

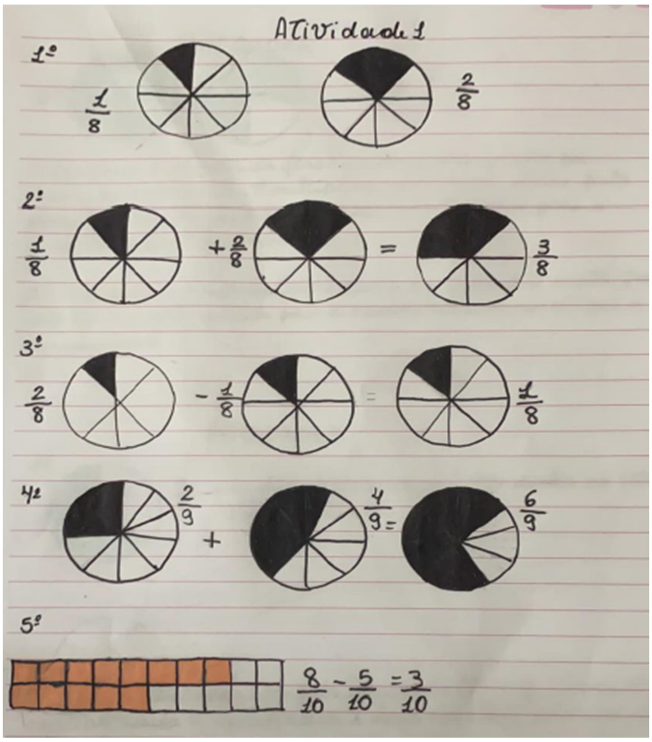
1. Represente a fração $\frac{1}{8}$. Em seguida, represente a fração $\frac{2}{8}$.
2. Represente a fração $\frac{1}{8} + \frac{2}{8}$. Qual o valor dessa soma?
3. Represente a fração $\frac{2}{8} - \frac{1}{8}$. Qual o valor dessa diferença?
4. Represente em uma figura as frações $\frac{2}{9}\ e\ \frac{4}{9}$. Agora calcule o valor de $\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$
5. Represente em uma figura as frações $\frac{8}{10}\ e\ \frac{5}{10}$. Em seguida calcule o valor de $\frac{8}{10} - \frac{5}{10}$
6. Nesta atividade, você percebeu alguma coisa que mereça destaque? O que?
7. Podemos dizer que as frações são números? Justifique sua resposta.

As questões 1, 2, 3, 4 e 5 foram respondidas corretamente por todos os alunos, usando-se a representação por figuras.

No recurso digital da PhET “Frações: Intro” não é possível representar frações com denominadores maiores do que 8, assim, para as questões 4 e 5 os alunos não podiam recorrer ao recurso digital para a representação das frações. Verificamos nessas questões que foi muito comum a representação das frações em uma única figura, talvez isso tenha acontecido por conta da formulação dessas questões (4. Represente em uma figura… 5. Represente em uma figura…).

Os alunos não apresentaram dificuldades para representar frações em figuras, nem somar ou subtrair frações com denominadores iguais sem recorrer a regras. A Figura 43 destaca a resposta de um dos alunos para essas questões.

Figura 43: Resposta das Questões 1, 2, 3, 4 e 5 da Atividade 1

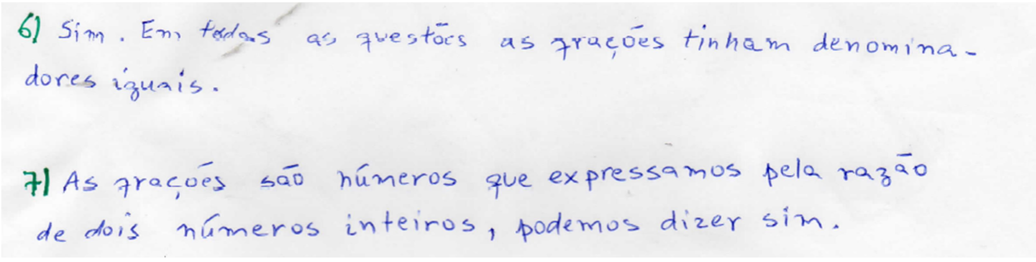


Fonte: protocolo da pesquisa.

Na Figura 43, observamos que a fração $\frac{2}{8}$ na Questão 3 foi representada de forma errada, mas podemos inferir que o erro aconteceu por falta de atenção, pois a mesma fração foi representada corretamente nas questões 1 e 2.

Para a Questão 6, a resposta dada por quase todos os alunos foi que na atividade só havia frações de denominadores iguais. Na Questão 7, a maioria dos alunos concordou que as frações são números e justificaram dizendo que as frações são a razão entre dois números. A Figura 44 apresenta as respostas para as Questões 6 e 7, dadas por um dos alunos.

Figura 44: resposta às Questões 6 e 7 da Atividade 1


6) Sim. Em todas as questões as frações tinham denomina-dores iguais.

7) As frações são números que expressamos pela razão de dois números inteiros, podemos dizer sim.

Fonte: protocolo da pesquisa.

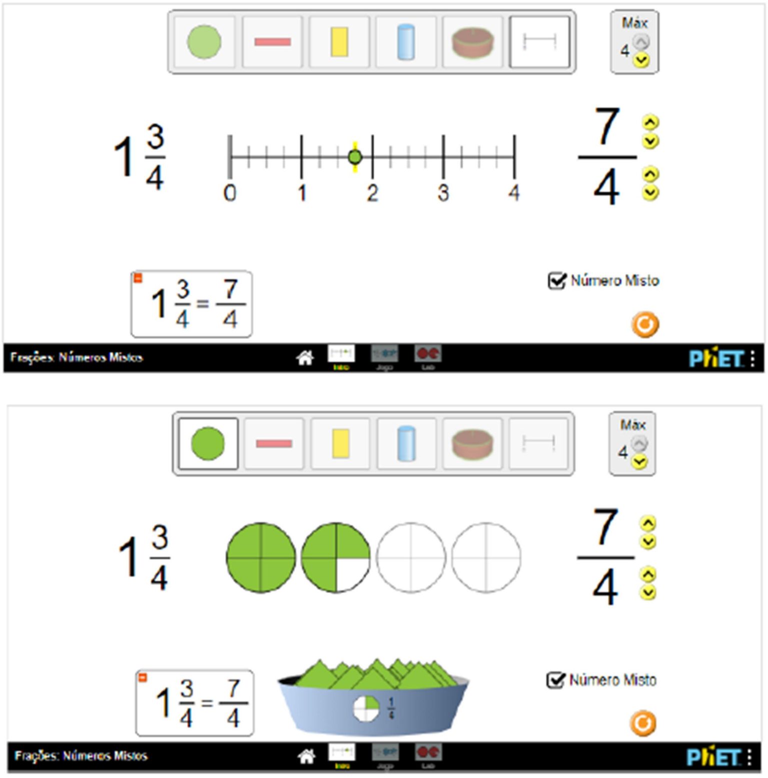
Para a Atividade 2 constaram as questões:

1. O número misto $1\frac{3}{4}$ representa que fração?
2. Qual a operação que devemos usar para transformar um número misto em fração?
3. Faz sentido representar uma fração por um número misto quando o numerador desta fração é menor do que o denominador? Justifique sua resposta.

Os alunos não tiveram dificuldades para responder corretamente à Questão 1. No entanto, poucos alunos usaram a representação figural. A Figura 45 destaca a resposta de um dos alunos que apresentou a resposta no recurso digital, usando uma figura e a reta numérica.

Figura 45: Resposta de um aluno para a Questão 1 da Atividade 2.

Questão 1:

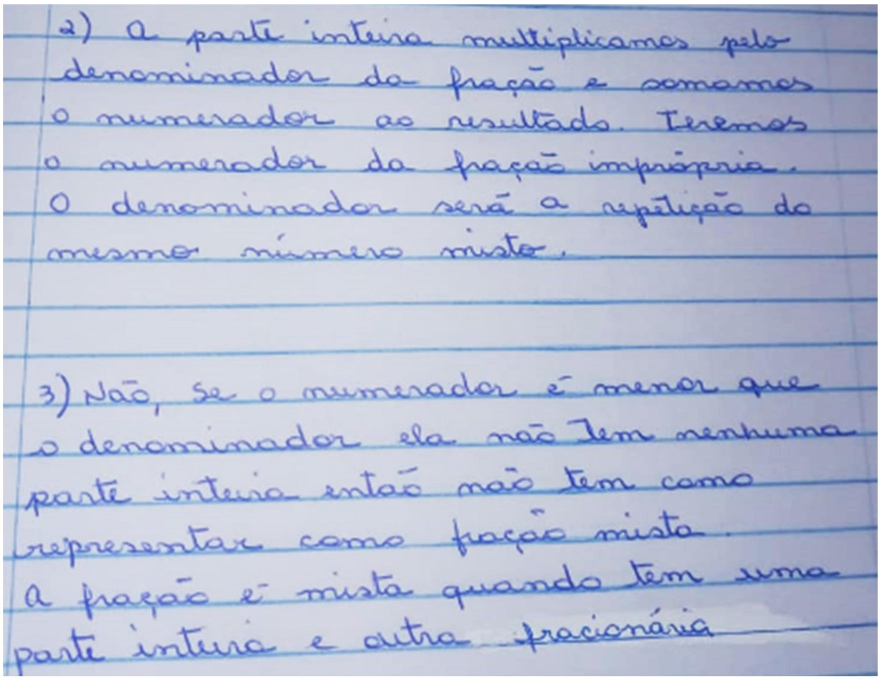


Questão 2:

Fonte: protocolo da pesquisa.

As Questões 2 e 3, também, foram em sua maioria respondidas corretamente. Na Questão 2 alguns alunos escreveram que, para encontrar o numerador da fração imprópria, multiplicaram o número inteiro pelo denominador e somaram o resultado ao numerador e para obter o denominador repetiram o denominador da fração do número misto, o que para nós, revela a ênfase dada aos alunos a esse tipo de regra. Para a Questão 3 a maior parte dos alunos respondeu que não fazia sentido representar uma fração por um número misto quando o numerador desta fração é menor do que o denominador. Na Figura 46 destacamos uma das respostas dada pelos alunos para as Questões 2 e 3.

Figura 46: Resposta de um aluno para as Questões 2 e 3


2) A parte inteira multiplicamos pelo
denominador da fração e somamos
o numerador ao resultado. Teremos
o numerador da fração imprópria.
O denominador será a repetição do
mesmo número misto.

3) Não, se o numerador é menor que
o denominador ela não tem nenhuma
parte inteira então não tem como
representar como fração mista.
A fração é mista quando tem uma
parte inteira e outra fracionária

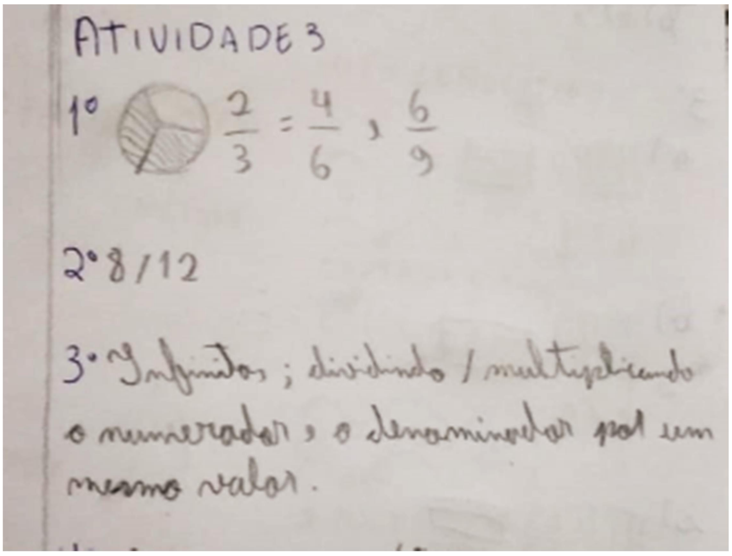
Fonte: protocolo da pesquisa.

Na Atividade 3 constava as seguintes questões:

1. Representa a fração $\frac{2}{3}$. Quais são as duas outras frações que o **lab da igualdade** dá como equivalentes a esta fração?
2. Você acha que há mais frações equivalentes a $\frac{2}{3}$? Se sim, escreva mais uma fração.
3. Quantas frações há equivalentes a $\frac{2}{3}$? Como podemos fazer para achá-las?
4. Escreva uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$ e uma fração equivalente a $\frac{1}{8}$, de modo que elas tenham o mesmo denominador. Agora calcule o valor de $\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$. Calcule também $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.
5. O fato de existirem frações equivalentes ajuda na soma e subtração de frações? Comente.

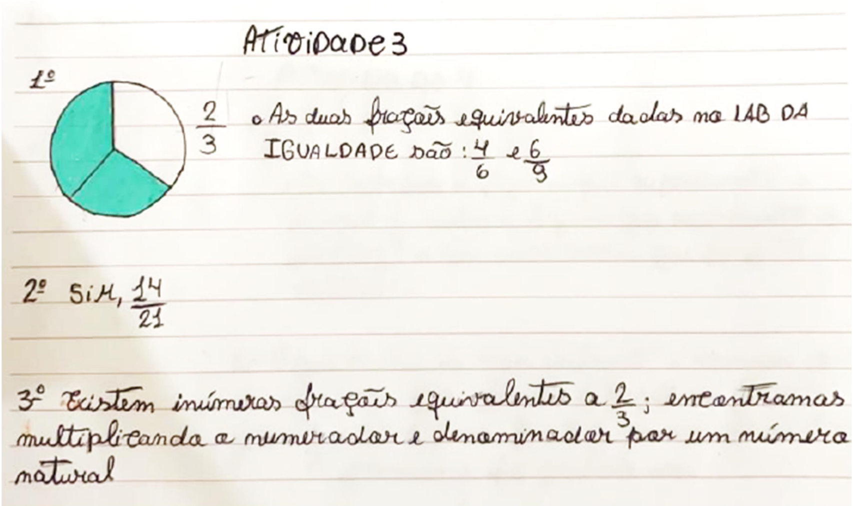
Todos os alunos responderam corretamente às Questões 1 e 2 desta atividade. Para a primeira questão eles representaram por meio de uma figura a fração $\frac{2}{3}$ e apresentaram as frações $\frac{4}{6}\ e\ \frac{6}{9}$ como as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, dadas pelo recurso digital da plataforma PhET “Frações: Igualdade”. Para a segunda questão todos concordaram que havia pelo menos mais uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$ e apresentaram respostas diversas, como $\frac{8}{12}$ e $\frac{14}{21}$. Em relação à Questão 3 houve respostas variadas, tais como: infinitas, inúmeras, várias. A maioria deles respondeu corretamente como podemos fazer para achar uma fração equivalente a uma fração dada. As Figuras 47 e 48 mostram exemplos de respostas dadas para as Questões 1, 2 e 3 desta atividade.

Figura 47 - Primeiro exemplo de resposta de um aluno sobre as Questões 1, 2 e 3 da Atividade 3



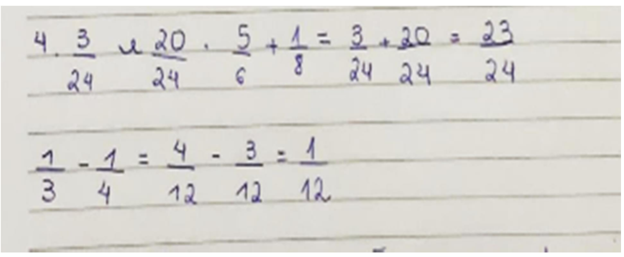
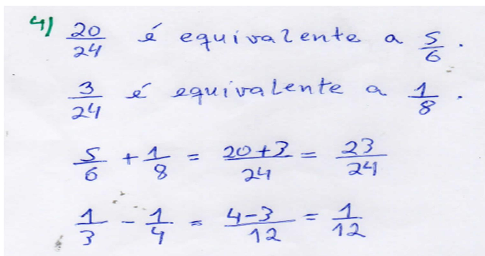
Fonte: protocolo da pesquisa.

Figura 48 - Segundo exemplo de resposta de um aluno sobre as Questões 1, 2 e 3 da Atividade 3



Fonte: protocolo da pesquisa.

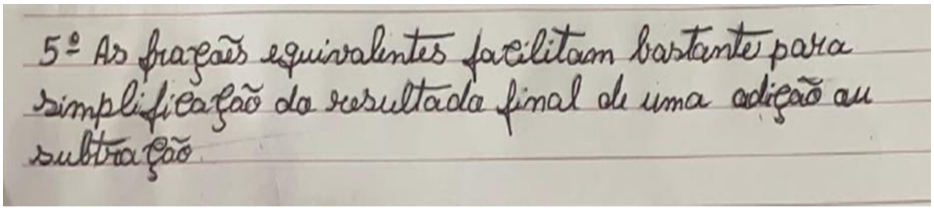
Na Questão 4, a maioria dos alunos conseguiu achar as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{8}$, geralmente foram encontradas as frações $\frac{20}{24}$ e $\frac{3}{24}$, respectivamente. A adição e a subtração das frações propostas foram encontradas por todos os alunos sem dificuldades. Alguns alunos resolveram as questões usando as frações equivalentes, outros optaram pela técnica do Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Destacamos nas Figuras 49 e 50, dois exemplos de respostas de alunos.

Figura 49 - Primeiro exemplo de resposta da Questão 4 da Atividade 3, usando frações equivalentes	**Figura 50** - Segundo exemplo de resposta da Questão 4 da Atividade 3, usando a técnica do MMC.
	

Fonte: protocolo da pesquisa.

Para a Questão 5, a maioria das respostas foi sim. Na Figura 51 temos um exemplo de um dos alunos que argumentou sobre a relação entre as frações equivalentes e soma e subtração de fração com denominadores diferentes.

Figura 51 - Resposta de um aluno para a Questão 5 da atividade 3



Fonte: autoria própria.

Sobre a Atividade 4 constavam as seguintes perguntas:

1. Encontre o valor de $1 \times \frac{1}{3}$. Em seguida encontre o valor de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. Ao sobrepor a figura que representa a fração $\frac{1}{3}$ sobre a figura que representa a fração $\frac{1}{2}$, o que você acha que foi feito? Explique.
2. Calcule o valor das seguintes operações:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$

b) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} =$

3. Apesar das figuras desta atividade não contemplarem os resultados para frações impróprias (frações com numeradores maiores que os denominadores), o raciocínio usado ainda é válido. Assim, calcule o resultado das seguintes operações de multiplicação:

Para cada caso, faça duas figuras, uma para cada fração e use a ideia da atividade para achar o resultado.

a) $2 \times \frac{3}{4} =$

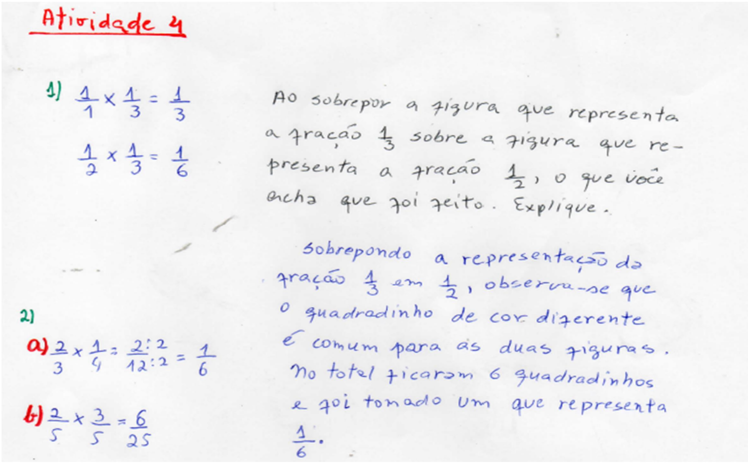
b) $\frac{2}{5} \times 3 =$

c) $\frac{1}{5} \times \frac{3}{2} =$

4. O que você acha que faltou na atividade para que ela contemplasse também as frações impróprias (frações com numeradores maiores que os denominadores)?

Todos os alunos responderam corretamente à Questão 1, mas a maioria não explicou o que entendeu quando as figuras eram sobrepostas no recurso do GeoGebra “Multiplicação de Frações”. Contudo, destacamos na Figura 52, a resposta de um aluno que chegou a responder sobre a sobreposição das figuras.

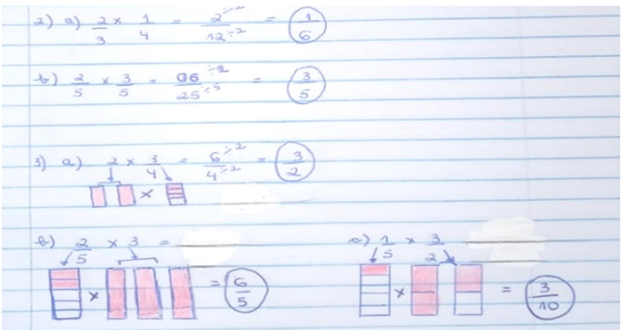
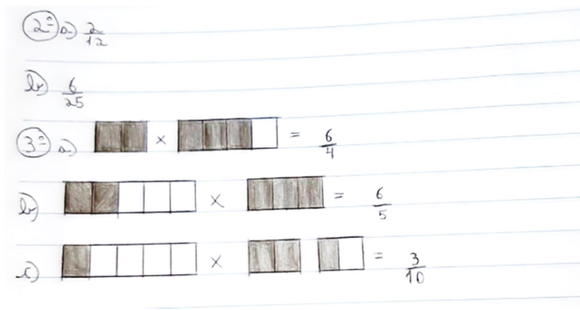
Figura 52 - Exemplo de resposta das Questões 1 e 2



Fonte: protocolo da pesquisa.

Na Figura 52, podemos constatar que o aluno entendeu que o denominador da fração resultante da multiplicação era o número de quadrados existentes depois da sobreposição das figuras e o numerador o número de quadrados pintados de cor diferente. No entanto, ele não explicita porque aparecem 6 quadrados, depois da sobreposição e porque só pegamos um.

Com relação às Questões 2 e 3, relativas às operações de multiplicação de frações, todos os alunos responderam corretamente. Alguns deles representaram as frações de forma figural, mas não tivemos indícios de sobreposição das figuras pelo manuseio do recurso “GeoGebra “Multiplicação de Frações”. Destacamos duas respostas de alunos (Figuras 53 e 54).

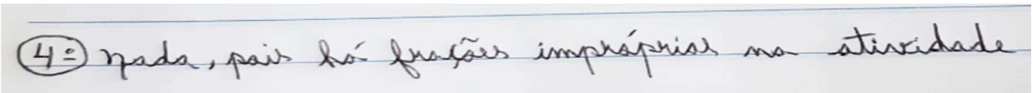
Figura 53 - Resultado das Questões 2 e 3 da Atividade 4 - Exemplo 1	**Figura 54** - Resultado das Questões 2 e 3 da Atividade 4 - Exemplo 2
	

Fonte: protocolo da pesquisa.

Na Questão 2b (Figura 53), apesar de acertar a multiplicação, o aluno errou a simplificação da fração $\frac{6}{25}$. Observamos que o inteiro 2, da Questão 3a está representado de forma correta na Figura 53 e incorreta na Figura 54.

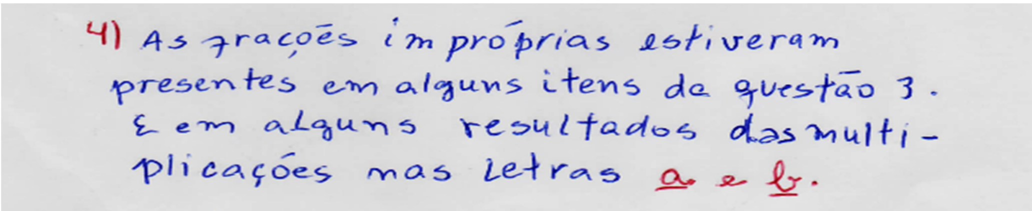
Na Questão 4, os alunos não conseguiram perceber a limitação do recurso digital do GeoGebra “Multiplicação de Frações” em relação às frações impróprias. Essa limitação existia porque as figuras não representavam frações impróprias, por exemplo: para a fração $\frac{3}{2}$ só aparecia uma figura, onde o correto era aparecer duas figuras. Destacamos algumas respostas dadas (Figuras 55 e 56).

Figura 55 - Primeiro exemplo de resposta para a Questão 4 da Atividade 4


4º) nada, pois há frações impróprias na atividade

Fonte: protocolo da pesquisa.

Figura 56 - Segundo exemplo de resposta para a Questão 4 da Atividade 4


4) As frações impróprias estiveram presentes em alguns itens da questão 3. E em alguns resultados das multi-plicações nas letras a e b.

Fonte: protocolo da pesquisa.

Na Atividade 5 constam as seguintes questões:

1. Calcule o valor de $1 \div \frac{1}{3}$. Agora calcule o valor de $1 \div \frac{2}{3}$. Caso você tenha dificuldade para achar o valor da segunda divisão pense o seguinte: o que de $\frac{2}{3}$ cabe em 1?
2. Até aqui estudamos a ideia de fração como parte de um todo. Esse todo pode ser qualquer coisa, inclusive uma fração. Usando este raciocínio e observando a resolução da Questão 1 desta atividade, calcule:

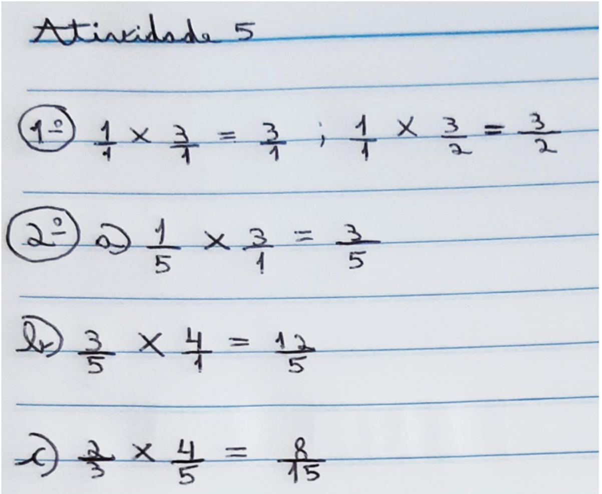
a) $\frac{1}{5} \div \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{4}$

Na Atividade 5 foram sugeridas duas questões sobre divisão de frações. Todos os alunos chegaram ao resultado correto, mas nenhum deles usou os recursos digitais “Geogebra- Frações e Inteiros" para encontrar os resultados. A Figura 57 mostra o resultado obtido por um dos alunos.

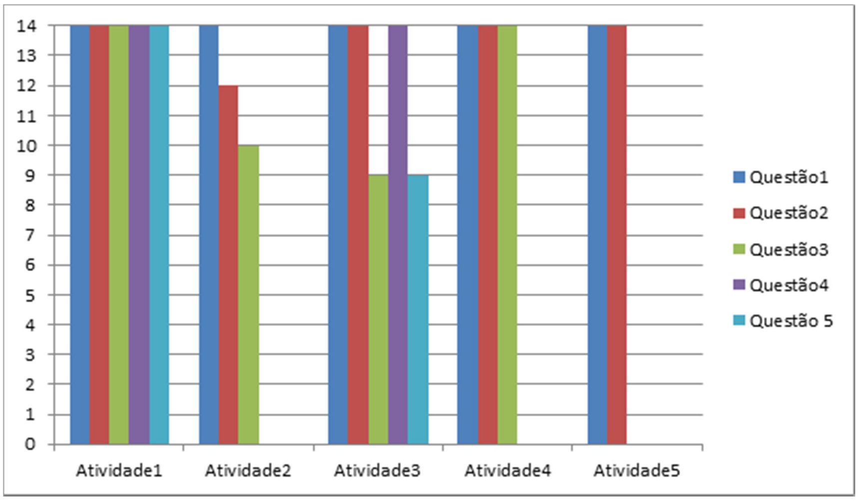
Figura 57 - Resposta de um dos alunos para a Questão 5



Fonte: protocolo da pesquisa.

Verifica-se na Figura 57, que o aluno optou por repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração. Isso aconteceu em todas as respostas. Na Figura 58, expomos um panorama dos resultados das questões da sequência de atividades proposta.

Figura 58 - Panorama do número de acertos das questões da sequência de atividades



Fonte: autoria própria.

No gráfico da Figura 58, o eixo vertical mostra o número de acertos para cada questão das atividades. As questões relativas à representação e à adição e subtração de frações com denominadores iguais da Atividade 1 (Questões 1 a 5) obtiveram 100% de acerto. Sobre a Atividade 2 - a Questão 1, relativa à representação de frações impróprias por número misto, todos os alunos conseguiram respondê-la corretamente. Entretanto, dois alunos não souberam explicitar corretamente a operação que devemos usar para transformar um número misto em fração e quatro alunos afirmaram ser possível representar uma fração por um número misto quando o numerador desta fração é menor do que o denominador.

Na Atividade 3 todos os alunos conseguiram representar a equivalência de frações (Questões 1 e 2) e realizar operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes usando a noção de frações equivalentes (Questão 4).

Ressaltamos que cinco alunos dentre os quatorze não responderam corretamente as questões 3 e 5, afirmando que havia algumas frações equivalentes para a Questão 3 e que a equivalência de frações não ajudava na soma e subtração de frações.

Ao longo da presente pesquisa, constatamos que os alunos, a princípio, buscaram responder as operações de adição e subtração com frações usando a técnica do MMC, e a técnica de frações equivalentes foi de certa forma inovadora para eles. Isto reflete de certa forma a potencialidade do recurso digital utilizado e a boa receptividade dos alunos para as atividades propostas na sequência didática.

Quanto às Atividades 4 e 5, relativas à multiplicação e divisão de frações, nas quais todos os alunos responderam corretamente às questões, tivemos a impressão de que o uso dos recursos digitais ajudaram os alunos a perceber que para multiplicar frações, bastava multiplicar os numeradores entre si e os denominadores entre si. No caso da divisão, bastava repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração. No entanto, não percebemos nenhuma resposta sem o uso da regra. Por exemplo: para dividir 1 por $\frac{2}{3}$, podemos perceber que $\frac{2}{3}$ cabe 3 vezes em 2, portanto cabe $\frac{3}{2}$ vez em 1, já que 1 é metade de 2.

Diante dos resultados desta etapa, pelos quais percebemos que nem todos os alunos chegaram a manipular os recursos digitais propostos, direcionamos a quarta fase para outra socialização desses recursos. Como apresentamos a seguir.

4.2.3 Resultados da quarta fase

- **Socialização com os alunos da Escola C**

<u>Atividade 1</u>:

Inicialmente perguntamos o que os alunos acharam do recurso digital 1 (Fração Intro - PhEt) proposto para Atividade 1 e se fizeram uso desse recurso para responder às questões. Duas alunas disseram que gostaram e acharam dinâmico, e a maioria respondeu que usou o recurso e não teve dificuldades para responder às questões sugeridas.

Começamos a Atividade 1 perguntando por que alguns alunos ao se deparar com a adição de frações com denominadores iguais eles somam os numeradores e denominadores. Uma aluna disse que não sabia, pois quando os denominadores são iguais devem ser repetidos. Questionamos por que ela achava isso? Outra aluna respondeu: ***são pedaços do mesmo todo***.

Perguntamos se alguém tinha usado alguma figura diferente do círculo para representar as frações, uma aluna respondeu: ***Fiz com quadradinhos, que ficava mais fácil de desenhar no caderno***.

A partir daí, propomos as questões, usando outras figuras, sempre com as respostas que os alunos forneciam.

Figura 59 - Resposta de uma aluna para a operação $\frac{2}{8} - \frac{1}{8}$

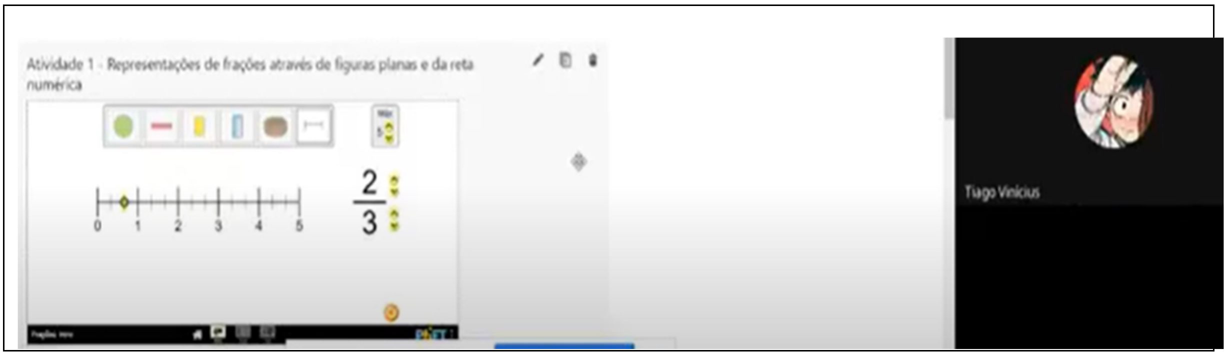
Fonte: protocolo da pesquisa.

Questionamos novamente por que com denominadores iguais repetimos o denominador. A mesma aluna que respondeu a essa pergunta antes, disse: ***Eu vou dar o exemplo com o oitavo. Dois oitavos são duas partes iguais que somado com um oitavo dá 3 partes iguais de um oitavo.***

Representamos uma fração e usamos a reta numérica disponível no recurso da PhEt, então questionamos o que eles entendiam da representação da fração na reta. Uma aluna respondeu que: ***a reta representa a divisão do numerador pelo denominador, por isso ela achava que as frações são números***. Outro aluno disse: ***as frações são números decimais***.

Usando o recurso “Frações Intro - PheT” fizemos várias atividades para mostrar que os números inteiros podem ser representados por frações e trabalhamos com a representação das frações na reta numérica, como mostra a Figura 60.

Figura 60 - Trabalhando frações na reta numérica



Fonte: protocolo da pesquisa.

Os alunos não tiveram nenhum problema para resolver as Questões de 1 a 3 (propostas na terceira fase - Atividade 1) que tratam da representação de frações e da adição e subtração de frações com denominadores iguais. A única observação feita sobre a Questão 4 foi que na atividade só foram usados denominadores iguais. Eles também disseram que as frações são números, mas não souberam argumentar.

<u>Atividade 2</u>:

Começamos perguntando aos alunos como eles fizeram para achar a fração correspondente a $1\frac{3}{4}$ (Questão 1 da Atividade 2).

Resposta de uma aluna: ***Coloquei duas figuras divididas em quatro partes. Uma pintei toda e a outra pintei 3 partes***. Ver Figura 61.

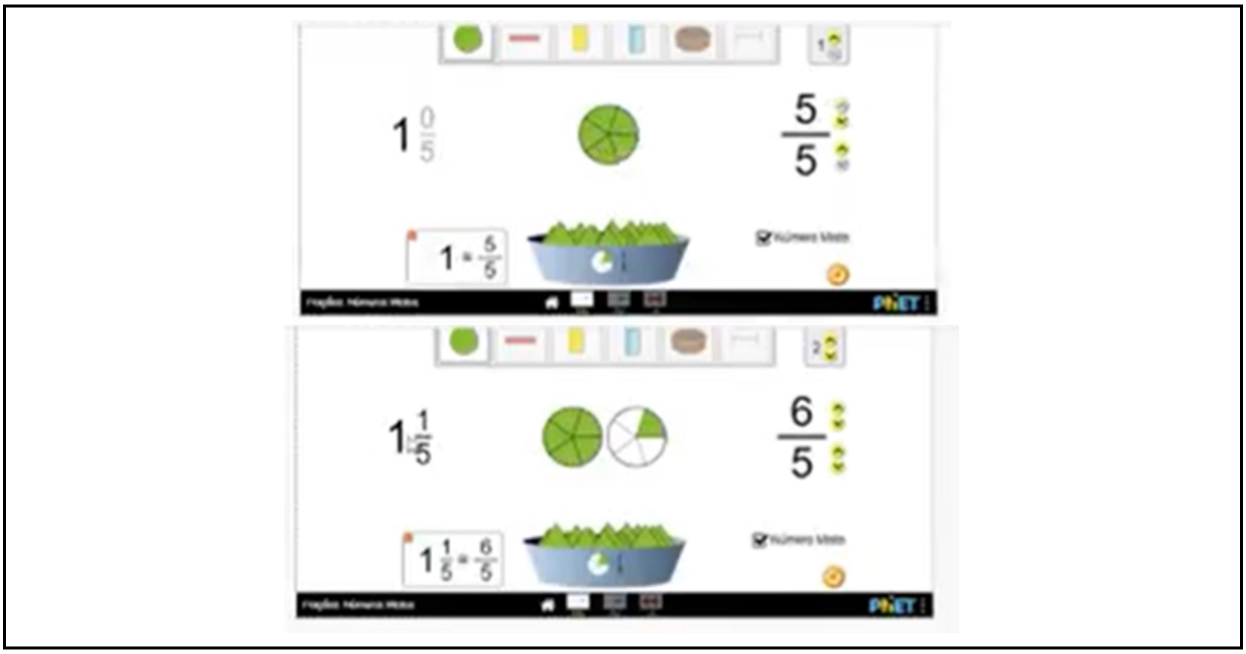
Figura 61 - Atividade feita no recurso pela aluna

Fonte: protocolo da pesquisa.

A partir desse momento, começamos a questionar o que os alunos entendiam por número misto. Apenas uma aluna respondeu. ***O número misto é a soma do número inteiro com a fração.***

Então trabalhamos vários exemplos, utilizando o recurso “Frações Números Mistos - PhET” e a partir daí eles começaram a dar as respostas corretas. Eles começaram a fazer com facilidade a transformação da fração em número misto e do número misto em fração. Trabalhamos também o fato de que o inteiro da fração pode ser qualquer fração com o numerador igual ao denominador. E daí ficou fácil somar o inteiro com a fração. Os alunos chegaram à conclusão que não fazia sentido representar frações próprias por números mistos, porque essas frações são menores que um inteiro. Vejamos a argumentação de um dos alunos: ***Sempre que se resolve um número misto vai ficar o numerador, pelo menos um pouquinho maior do que o denominador.*** Na Figura 62 mostramos uma das sequências que usamos para trabalhar o significado de número misto.

Figura 62 - Trabalhando o conceito de número misto

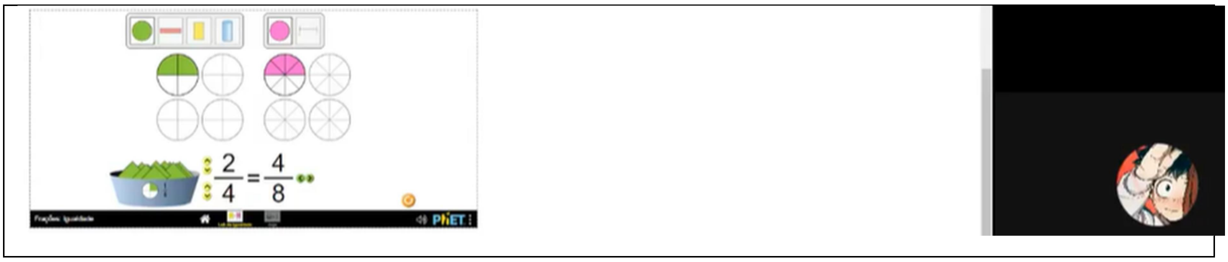


Fonte: protocolo da pesquisa.

Atividade 3:

Começamos pedindo aos alunos que eles dissessem como representar a fração $\frac{2}{3}$ no recurso digital "Frações Igualdade - PhET". Com a orientação dos alunos fizemos a representação no recurso digital que apresentou a igualdade $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. Perguntamos o porquê dessa igualdade. Um aluno respondeu: ***$\frac{2}{3}$ é a simplificação de $\frac{4}{6}$***. Outra aluna respondeu que: ***dividindo 2 por 3 dá o mesmo resultado que dividindo 4 por 6***. Representamos a fração $\frac{2}{4}$ (Figura 63) e verificamos como essa representação ficava nas figuras do recurso digital.

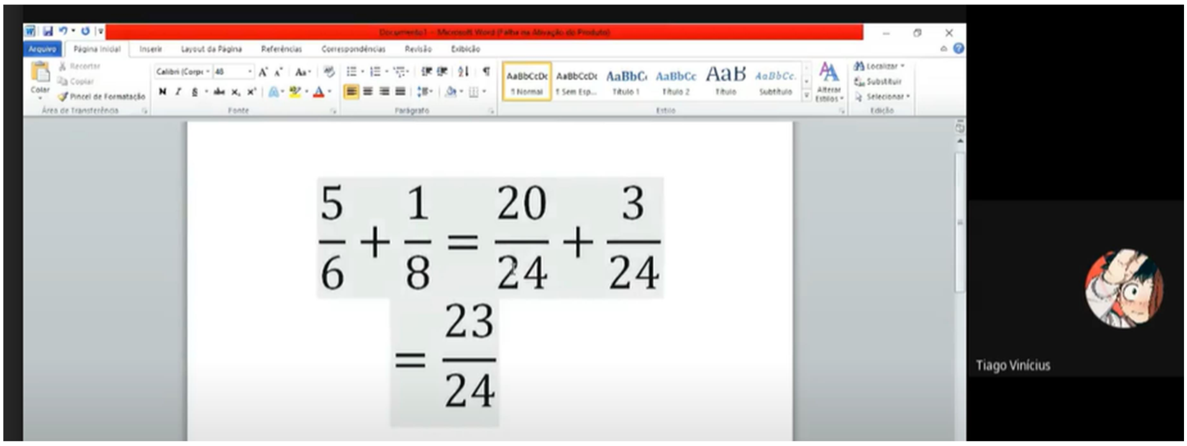
Figura 63 - Representação no recurso digital da fração $\frac{2}{4}$



Fonte: protocolo da pesquisa.

Os alunos chegaram à conclusão de que a parte representada na figura era a mesma. Perguntamos que outra fração seria igual a $\frac{2}{4}$. Tivemos de imediato a resposta $\frac{1}{2}$. A partir daí os alunos apresentaram outras frações equivalentes a $\frac{2}{4}$ e chegamos à conclusão que podíamos representar muitas outras. Um aluno respondeu que: ***havia infinitas***. Nas questões de soma e subtração de frações com denominadores diferentes a maioria dos alunos disse que usou o MMC (como constatamos na terceira fase). Apenas uma aluna recorreu às frações equivalentes. A partir daí trabalhamos como somar frações com denominadores diferentes (Figura 64), usando as frações equivalentes.

Figura 64 - Trabalhando adição de fração com denominadores diferentes a partir de frações equivalentes



Fonte: protocolo da pesquisa.

Os alunos falaram que os professores sempre trabalham com o MMC e mostraram alguma dificuldade para achar frações equivalentes com o mesmo denominador. Após as intervenções que fizemos, não houve problemas para resolver outras questões que propomos de soma e subtração de frações com denominadores diferentes. Chegamos à conclusão que o denominador da fração equivalente pode ser qualquer múltiplo do denominador da fração dada.

Atividade 4:

Apesar dos alunos afirmarem que usaram o recurso digital (GeoGebra - Multiplicação de frações), nós percebemos que eles não estavam entendendo o que acontecia quando se sobrepunha uma figura à outra. Começamos discutindo que achar uma fração de uma fração é o mesmo que multiplicar essas frações. Fizemos alguns exemplos de multiplicação de frações (Figura 65).

Figura 65 - Exemplo de multiplicação de frações usando o recurso

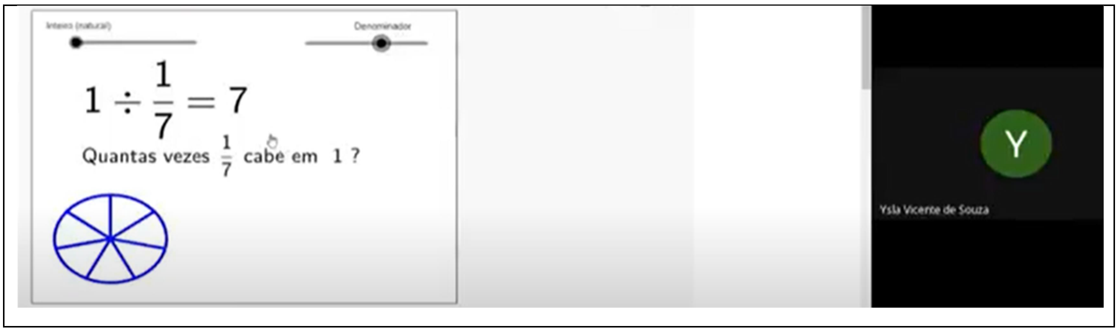
Fonte: protocolo da pesquisa.

Para cada exemplo dado, sempre questionamos o que acontecia quando uma figura se sobrepunha à outra. A primeira resposta que tivemos é que os denominadores ficavam multiplicados. Perguntamos por que os denominadores ficavam multiplicados. Eles não responderam. Percebemos que eles não tinham dificuldade para multiplicar frações, mas não conseguiam explicar o motivo pelo qual multiplicavam os numeradores e os denominadores. Então, fizemos vários exemplos, usando o recurso digital, para dar significado ao procedimento de multiplicação de frações.

<u>Atividade 5</u>

Mediante o recurso digital (GeoGebra - Frações e Inteiros) da Atividade 5, os alunos não tiveram dificuldades para entender que a fração $\frac{1}{n}$ cabe ***n*** vezes no inteiro 1. Propomos a operação $1 \div \frac{1}{7}$ e eles responderam que o resultado era 7. Perguntamos como eles acharam esse resultado. Uma aluna respondeu o seguinte: ***Eu imaginei que*** 1 é $\frac{7}{7}$ ***então para chegar em 7 precisava de 7 partes***. E continuou: ***Eu fiz meio que uma soma*** $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\cdots$ ***sete vezes até chegar em 7/7***. Na Figura 66, expomos como resolvemos a operação no recurso digital para mostrar a representação figural desta operação.

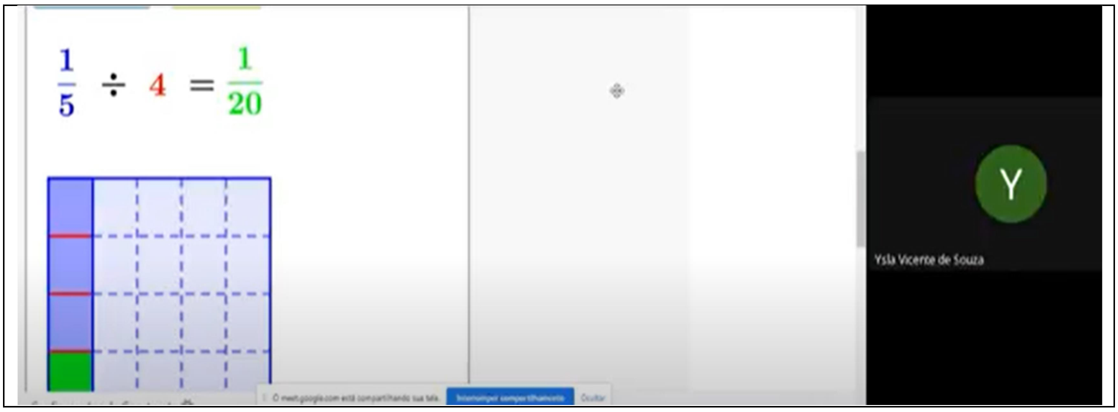
Figura 66 - Resolução de $1 \div \frac{1}{7}$ no recurso digital



Fonte: protocolo da pesquisa.

Os alunos também não tiveram dificuldades para compreender que quando dividimos uma fração por um número inteiro, o denominador da fração fica multiplicado pelo número inteiro e o numerador se conserva. Sempre que propomos divisões de frações por um número inteiro eles acertavam as respostas. Fizemos vários exemplos, Na Figura 67, temos um deles.

Figura 67 - Exemplo de divisão de uma fração por um número inteiro



Fonte: protocolo da pesquisa.

Quando propomos divisões de fração por fração, eles acertavam a resposta, porém não conseguiram usar o recurso (GeoGebra) para fazer essas divisões. Eles conseguiram alcançar o que o recurso apresentava, mas não foram além disso. No primeiro recurso, por exemplo, eles não compreenderam que a fração $\frac{a}{b}$ cabe ***b*** vezes no inteiro ***a***, daí a dificuldade de dividir fração por fração, usando o recurso digital.

Socialização com os alunos da Escola B

<u>Atividade 1</u>

Inicialmente indagamos sobre o uso do recurso digital (Frações Intro - PhET) para resolver as questões da atividade. Os alunos disseram que usaram o recurso. Fizemos algumas intervenções para saber se eles perceberam qual era o significado do numerador e do denominador de uma fração. Grosso modo, eles não tiveram problemas com esses significados, afirmando, quando perguntados, que o denominador representa o número de partes iguais em que alguma coisa era dividida e o numerador o número de partes que se tomava. Eles também não tiveram problemas para somar e subtrair frações com denominadores iguais, percebendo que, nesses casos, o denominador deveria ser repetido e os numeradores somados ou subtraídos. Questionamos o porquê dessa conclusão. Um dos alunos respondeu que: ***como as partes eram iguais a gente poderia somar e subtrair coisas iguais e o resultado seria essa mesma coisa****.* A Figura 68 mostra a construção da operação $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$, proposta por uma aluna.

Figura 69 - Exemplo da representação de $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$ proposta por uma aluna

Fonte: protocolo da pesquisa.

Sobre a pergunta que fizemos no questionário que se referia a algo que eles perceberam na atividade, que merecesse destaque, uma das alunas disse que: ***quando representava as frações $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$ e $\frac{3}{3}$ a bolinha ficava completa, mesmo***

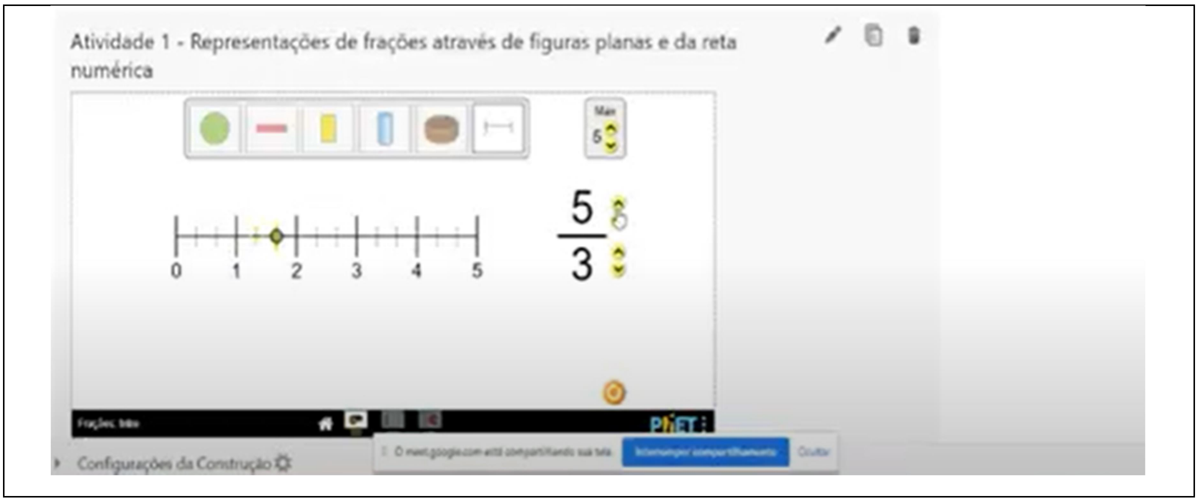
***que as divisões fossem diferentes, eles representavam a mesma coisa*”** (Figura 69).

Figura 69 - Representação da fração $\frac{3}{3}$ porposta por uma aluna

Protocolo: protocolo da pesquisa.

Sobre as frações serem números, uma aluna respondeu: ***sim, porque quando dividimos o numerador pelo denominador vamos encontrar um número, mesmo que seja decimal ou decimal infinito***. Na Figura 70, usamos a reta numérica disponível no recurso digital para ajudar na compreensão de que as frações são números.

Figura 70 - Representação da fração $\frac{5}{3}$ na reta numérica



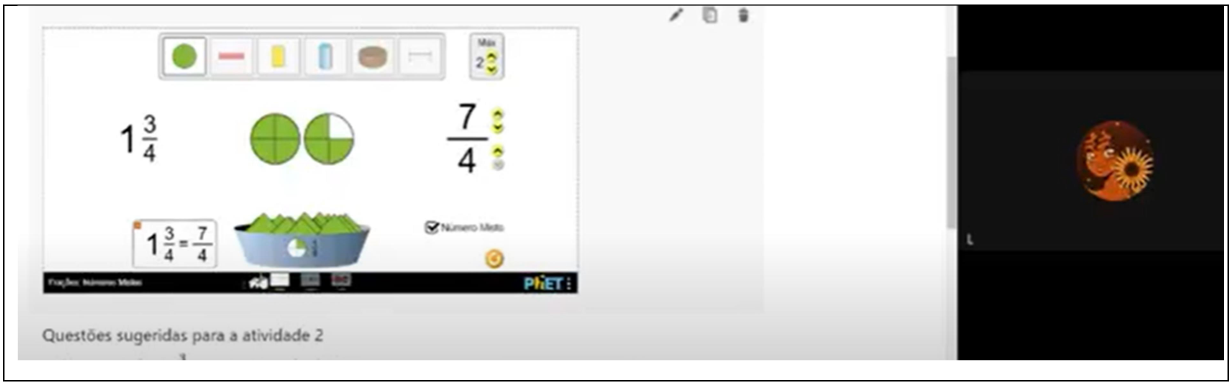
Fonte: protocolo da pesquisa.

Após essa intervenção os alunos disseram que as frações são números diferentes de 1, 2, 3... Mas aí, uma das alunas questionou que esses números também são frações e exemplificou: $\mathbf{1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$.

Atividade 2

Iniciamos essa atividade, perguntando aos alunos se eles conseguiram responder às questões usando o recurso digital (PhET - Frações Números Mistos). Uma das alunas respondeu (Figura 71) que para achar a fração correspondente a $1\frac{3}{4}$ ela fez da seguinte maneira: ***Eu usei duas bolas, coloquei o denominador quatro na fração e preenchi uma das bolas, a outra eu só coloquei três partes, que era o que faltava.***

Figura 71: Representação do número misto $1\frac{3}{4}$, proposta por uma aluna



Fonte: protocolo da pesquisa.

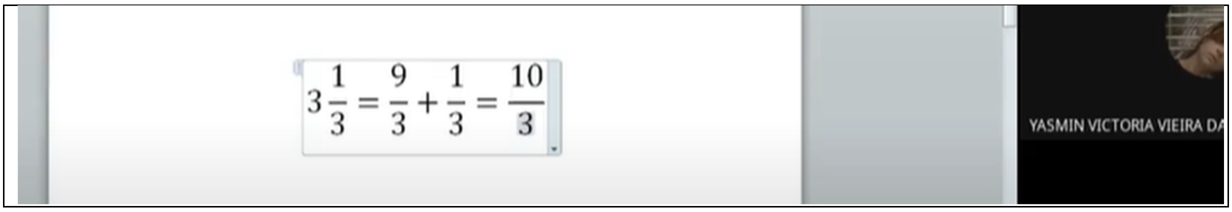
Quando perguntamos qual a operação que devíamos usar para transformar um número misto em fração, os alunos disseram que era a multiplicação e depois a adição. A partir daí trabalhamos a compreensão do número misto com eles, usando o recurso digital. Após as intervenções, os alunos disseram que a parte inteira do número misto é representada pela figura completa e a parte da fração representava o que faltava. A Figura 72 mostra um exemplo de transformação de número misto em fração, usando o recurso digital (PhET).

Figura 72 - Exemplo de transformação de número misto em fração

Fonte: protocolo da pesquisa.

Os alunos não conseguiram concluir que para transformar um número misto numa fração bastava somar a parte inteira do número misto com a parte fracionária. Então resolvemos a seguinte questão: $3\frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ (Figura 73).

Figura 73 - Exemplo de transformação de um número misto em fração



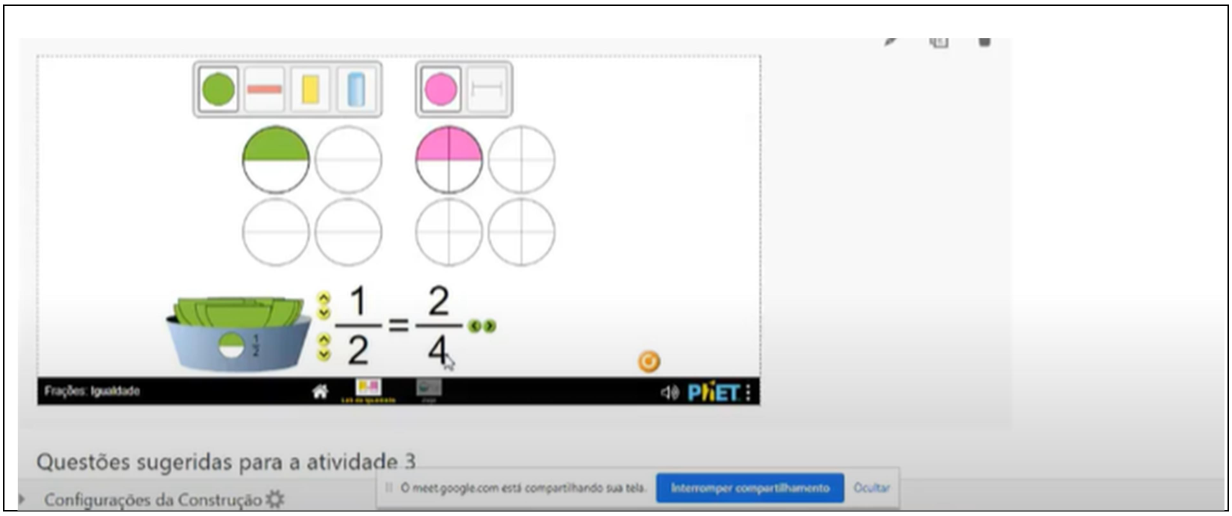
Fonte: protocolo da pesquisa.

Um aluno perguntou se era sempre possível achar denominadores iguais. Deixamos a resposta para a atividade seguinte. Quando perguntamos se fazia sentido representar uma fração própria por um número misto, uma aluna respondeu que não, porque essa fração não tem a parte inteira.

<u>Atividade 3</u>

Começamos essa atividade questionando como faríamos para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes. Uma aluna respondeu: "***Tirando o MMC.*** Então, trabalhamos no recurso digital as frações equivalentes. Os alunos não tiveram dificuldades para perceber que podemos ter mais de uma fração representando a mesma parte do todo, visto que o recurso dispunha de dois casos para cada fração representada. A Figura 74 mostra a representação no recurso digital para a equivalência $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Figura 74 - Exemplo de fração equivalente no recurso digital



Fonte: protocolo da pesquisa.

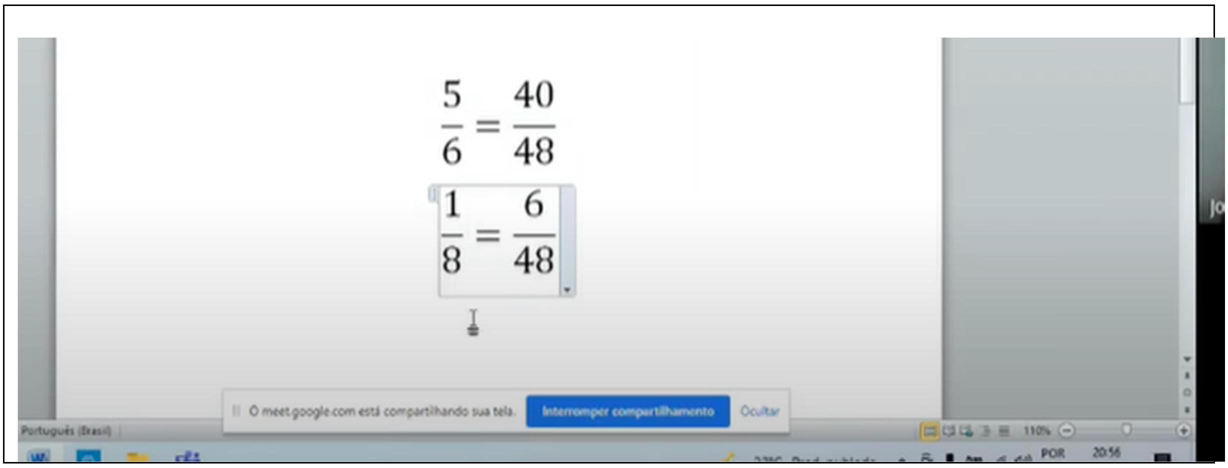
Os alunos entenderam que a parte representada na figura era a mesma nos dois casos, metade do todo. Fizemos a seguinte pergunta: Dada uma fração, quantas frações equivalentes a ela existem. Uma aluna respondeu: ***Infinitas***. Todos concordaram. Voltamos à questão de como somar e subtrair frações com denominadores diferentes e pedimos que eles resolvessem a Questão 4 da atividade. Os alunos tiveram dificuldades para encontrar as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{8}$ com um mesmo denominador. Depois de trabalhar esse exemplo eles chegaram a $\frac{20}{24}$ e $\frac{3}{8}$, respectivamente. Ver figura 75.

Figura 75 - Exemplo de resolução da Questão 4

Fonte: protocolo da pesquisa.

Uma aluna perguntou se poderia relacionar de alguma forma o 6 e o 8 com algum número que fosse comum. De imediato outra aluna disse que ***tinha o número 24***. Questionei sobre o que o 24 tinha em comum com 6 e 8. Uma aluna respondeu que ***era o MMC***. Eles não conseguiram dizer que 24 é múltiplo de 6 e 8. Depois de trabalharmos alguns exemplos para mostrar que qualquer múltiplo de 6 e 8 podia ser o denominador das frações equivalentes a $\frac{5}{6}\ e\ \frac{1}{8}$ (Figura 76), eles opinaram que havia um padrão, que era multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número.

Figura 76 - Exemplo de frações equivalentes a $\frac{5}{6}\ e\ \frac{1}{8}$



Fonte: protocolo da pesquisa.

A partir daí fizemos mais alguns exemplos sem dificuldades. Os alunos chegaram à conclusão que para somar e subtrair frações de denominadores diferentes, bastava achar frações equivalentes com o mesmo denominador e usar o aprendizado da Atividade 1. Perguntado sobre quanto dava $\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$ eles foram rápidos em dizer que era $\frac{23}{24}$. Para resolver $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ eles também chegaram ao resultado sem problemas, $\frac{1}{12}$. Um aluno questionou sobre simplificação de frações, o que nos deu a oportunidade de trabalhar frações equivalentes dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número, abrindo outra possibilidade para achar frações equivalentes.

Atividade 4

Os alunos não mostraram muita dificuldade para multiplicar frações, mas não sabiam explicar por que multiplicavam os numerados e os denominadores. Eles disseram que não trabalharam o recurso digital (GeoGebra - Multiplicação de Frações), porque não entenderam como ele funcionava. Então começamos a utilizar o recurso da seguinte forma: propomos a multiplicação de $\frac{2}{4}$ por $\frac{1}{2}$, e mostramos que quando a figura que representava $\frac{1}{2}$ era sobreposta à figura que representa $\frac{2}{4}$, ocorria a divisão dessa figura em duas partes. Mas a figura que representava $\frac{2}{4}$ já estava dividida em 4 partes, o que fez o todo ficar dividido em 8 partes. Ou seja, os denominadores eram multiplicados. Para encontrar o numerador deveríamos pegar uma parte da divisão (Figura 77), como cada parte estava dividida por dois, estávamos pegando 2 partes do total, o que também mostrava a multiplicação dos numeradores.

Figura 77 - Exemplo da multiplicação de $\frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$ no recurso digital

Fonte: protocolo da pesquisa.

Trabalhamos vários exemplos, inclusive com frações com denominadores iguais e chegamos à mesma conclusão. Questionamos qual o cuidado que devíamos ter quando somamos e subtraímos frações que não precisamos ter quando multiplicamos frações. Vejamos a resposta de uma aluna: ***Na multiplicação não importa se os denominadores são iguais ou diferentes***. Apesar de termos avançado no propósito da atividade, entendemos que se os alunos tivessem trabalhado com o recurso digital antes, os ganhos seriam muito maiores. Perguntamos o que eles acharam do recurso. Eles disseram que ficou mais fácil com o recurso porque ajudava a visualizar melhor as frações.

Atividade 5

Como aconteceu na atividade 4, os alunos disseram que não conseguiram usar o recurso da atividade 5 (GeoGebra - Frações e Inteiros), à exceção de uma aluna que relatou que tentou mexer, mas não entendeu. Começamos a trabalhar o primeiro recurso da atividade, que tinha a finalidade de mostrar que qualquer fração da forma $\frac{1}{a}$, caberia ***a*** vezes na unidade. Eles não tiveram dificuldade para perceber esse fato, pois sempre respondiam corretamente quando perguntados quantos $\frac{1}{3}$ caberiam em 3, quantos $\frac{1}{2}$ caberiam em 2 e assim sucessivamente. A Figura 78, mostra um dos exemplos trabalhados.

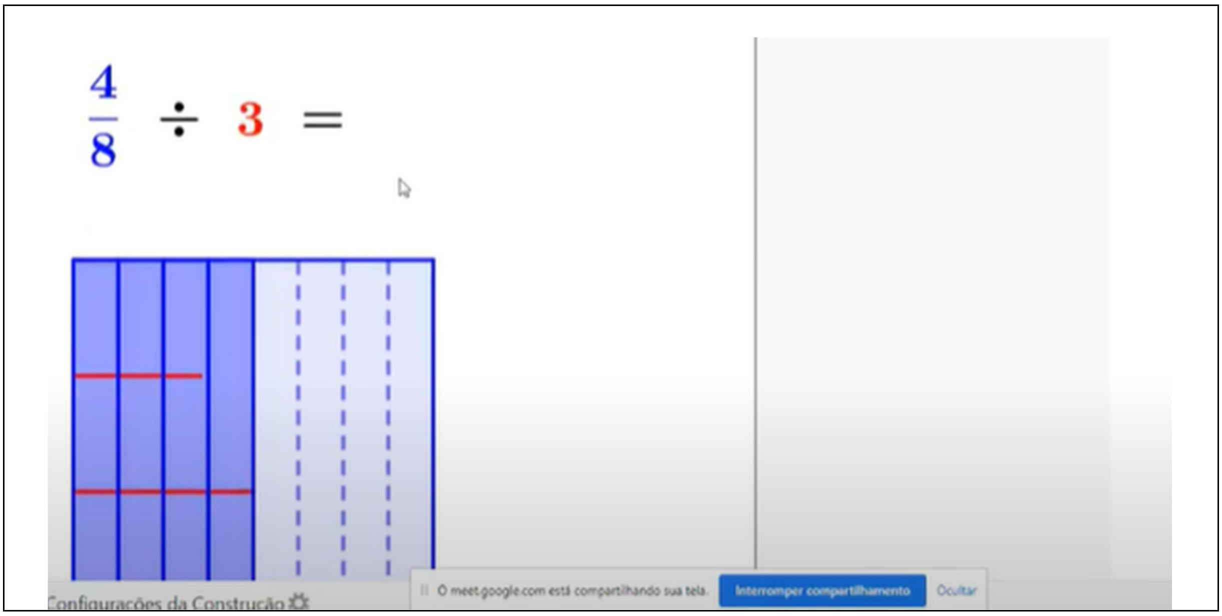
Figura 78 - Exemplo da divisão: $1 \div \frac{1}{6}$

Fonte: protocolo da pesquisa.

Sugerimos que os alunos resolvessem a operação $1 \div \frac{1}{3}$. Não houve dificuldade. Quando pedimos para que eles achassem o valor de $1 \div \frac{2}{3}$, eles não conseguiram achar a resposta usando o recurso. Explicamos que $\frac{2}{3}$ cabia 3 vezes em 2, portanto cabia $\frac{3}{2}$ vez em 1. Para outros exemplos desse tipo, eles conseguiram chegar às respostas corretas.

O segundo recurso dessa atividade teve como finalidade levar os alunos a dividir frações por números inteiros. O recurso mostrava que quando dividimos uma fração por um número inteiro o denominador da fração fica multiplicado por esse número. Os alunos tiveram menos dificuldade com esse recurso. Ao solicitarmos que eles resolvessem outros exemplos por esse método, não houve problemas. A Figura 79 mostra um dos exemplos mostrados no recurso.

Figura 79 - Exemplo da operação $\frac{4}{8} \div 3$



Fonte: protocolo da pesquisa.

Questionamos como eles faziam as divisões, quando tinha um número inteiro. Um dos alunos respondeu que: ***eu coloco o 1 debaixo do número inteiro e inverto a segunda fração, depois multiplico as duas frações***. De modo geral, eles não conseguiram usar os recursos para fazer divisão de frações por frações.

Ao final, perguntamos qual dos recursos eles acharam mais interessante. Os alunos foram unânimes em apontar o recurso usado na multiplicação. Um fato muito comentado por eles foi que quando eles aprendem os conceitos, os professores só dizem como fazer e não explicam por que estão fazendo daquela forma. Outro comentário dos alunos, que merece destaque, foi que com o recurso e a ajuda do professor, fica mais fácil aprender.

4.3 RESULTADOS DA TERCEIRA ETAPA

4.3.1 Resposta do questionário avaliativo

Para a pergunta “Você utilizou o recurso plataforma da PhET ao responder a ATIVIDADE 1? O que você achou dessa atividade?”, obtivemos as seguintes respostas:

> *A7: Sim. Foi chato de fazer, mas gostei.*
>
> *A3: Não; achei tranquila.*
>
> *A12: Na primeira atividade não foi preciso. Achei a atividade compreensível.*
>
> *A29: Interativa e interessante.*
>
> *A9: Sim. Achei legal, consegui fazer.*
>
> *A24: Usei, achei muito boa a atividade.*
>
> *A17: Bastante intuitiva e fácil de usar.*
>
> *A6: Sim. Achei um pouco fácil, já que podíamos representar na figura a fração.*
>
> *A8: Eu gostei muito da tarefa, foi a que eu consegui fazer com mais facilidade, apenas as questões 4 e 5 me deixaram um pouco confusa, por causa do denominador, o máximo suportado na interface era até 8.*
>
> *A26: Sim. Gostei, foi fácil de utilizar.*
>
> *A5: Achei interessante, me ajudou a entender mais sobre a formação de uma fração e visualizar ela.*
>
> *A41: Sim. A princípio achei complicado o uso, mas depois de entender e ver como usar ficou muito mais fácil e deu pra entender muito melhor o assunto.*
>
> *A36: Achei que me ajudou melhor a entender sobre como funcionam as funções e como eu posso representá-las com uma figura*
>
> *A10: eu achei dinâmica, prática e divertida.*

Verificamos que apenas dois alunos não usaram o recurso digital na ATIVIDADE 1, pois, segundo eles, a atividade foi tranquila e compreensível. A maioria deles gostou de usar o recurso, e achou simples, alguns acharam interativo e dinâmico. Três alunos comentaram sobre o recurso ter ajudado na compreensão do tema estudado (Alunos: A5, A41 e A36).

Para a pergunta “Você utilizou o recurso da plataforma PhET ao responder a ATIVIDADE 2? O que você achou dessa atividade?”, os alunos responderam:

> *A7: Sim. Gostei, mostrou de forma simples como fazer os cálculos.*
>
> *A3: Nessa eu utilizei. Achei dinâmica e mais fácil, achou muito a entender as questões.*
>
> *A12: As atividades em geral são interativas.*
>
> *A29: Achei legal, muito útil pra eu conseguir entender os números mistos.*
>
> *A9: Sim. Foi fácil de fazer.*
>
> *A24: Consegui aprender sobre um número misto que não tinha conhecimento antes.*
>
> *A17: Sim. Também consegui fazer.*
>
> *A6: Esse aqui também me ajudou na compreensão do assunto.*
>
> *A8: Sim. Um pouco mais complicado a forma de representação, mas depois que o professor explicou ficou melhor.*
>
> *A26: A mais intuitiva, ao mexer nas setas e figura eu consegui entender a lógica. A questão visual facilitou demais.*
>
> *A5: Sim, deu ainda mais para entender como funcionam as frações.*
>
> *A41: Usei não, mas a atividade eu gostei.*
>
> *A36: achei a mesma linha de raciocínio da primeira, uma boa metodologia.*
>
> *A10: Não; achei tranquila.*

Dois alunos não usaram o recurso digital, tendo um deles alegado que a Atividade 2 era tranquila. Os outros alunos usaram o recurso e disseram que ajudava a resolver os cálculos (A7), entender o tema (A3, A29, A24, A6, A26 e A5).

Para a pergunta “Você utilizou o recurso da plataforma PhET ao responder a Atividade 3? O que você achou dessa atividade?”, obtivemos as seguintes respostas:

> *A7: Sim. Gostei, também foi divertido de mexer.*
>
> *A3: Utilizei. Também ajudou a entender as questões e foi dinâmica. A questão em si também dava pra resolver sem.*
>
> *A12: Achei boa.*
>
> *A29: Ótima atividade.*
>
> *A9: Sim. Foi fácil de fazer.*
>
> *A24: Tudo normal consegui aprender.*
>
> *A17: Sim. Essa eu também consegui fazer.*
>
> *A6: Sim, esse aqui foi melhor pois eu tinha dificuldade na hora de reduzir uma fração para outra de numerador e denominador menor, mas que fossem equivalentes.*
>
> *A8: Não. Essa não cheguei a fazer, mas entendi após o explicando do professor.*
>
> *A26: Acredito que, em questões visuais, foi a mais intuitiva, em todas as perguntas você pode descobrir a resposta analisando a imagem, isso aconteceu mais facilmente que nas outras atividades.*

A5: Não fiz a atividade, mas após explicação na aula remota achei também consegui entender bem como funciona as resoluções das frações.

A41: Usei, achei tranquila.

A36: A terceira também, as três estimulam ueq continuemos usando para uma aprendizagem mais divertida.

A10: Não; achei tranquila.

Na Atividade 3, três alunos disseram não ter usado o recurso digital, mas dois deles afirmaram que depois do encontro que fizemos para correção das questões eles conseguiram entender (A8 e A5). Os outros alunos conseguiram usar o recurso digital. Destacamos a resposta dos alunos A6 e A26:

A6: Sim, esse aqui foi melhor pois eu tinha dificuldade na hora de reduzir uma fração para outra de numerador e denominador menor, mas que fossem equivalentes.

A26: Acredito que, em questões visuais, foi a mais intuitiva, em todas as perguntas você pode descobrir a resposta analisando a imagem, isso aconteceu mais facilmente que nas outras atividades.

Para a pergunta “Você utilizou o recurso da plataforma PhET ao responder a ATIVIDADE 4? O que você achou dessa atividade?”, os alunos expressaram:

A7: Sim. Essa eu achei um pouco mais complicado.

A3: A partir da 4° atividade eu travei.

A12: Interativa e divertida

A29: Foi bom pra entender a multiplicação entre as frações

A9: Sim. Foi chato de fazer, mas até que foi legal

A24: Um jeito mais divertido e dinâmico de ver as frações.

A17: Sim. Essa eu também consegui fazer.

A6: Utilizei, mas esse assunto eu já entendendo, exceto quando uma das frações tem número inteiro

A8: Sim. Multiplicação de frações eu considero o mais fácil, e através desse site foi possível aprender outra forma de explicar o porquê de se calcular assim

A26: Demorei para entender, porém quando eu finalmente entendi achei a atividade maravilhosa, ficar deslocando os quadrados que representam as frações foi bem criativo e interessante. Embora no começo achei as questões difíceis, depois da explicação ficou fácil. Acredito que para dar certo, a interação com um professor orientador seja essencial.

A5: Também foi muito fácil de entender.

A41: Não usei o aplicativo, mas achei a atividade interessante e boa de fazer

A36: Eu n cheguei a utilizar essa

> *A10: Sim; achei interessante, mas não entendi bem a proposta da terceira questão*

Sobre a Atividade 4, três alunos não usaram o recurso digital (GeoGebra), um deles disse que apesar de não ter usado, achou a atividade interessante e boa de fazer (A41). Todos os outros alunos disseram usar o recurso e acharam interativa e divertida (A12), divertido e dinâmico (A24). Destacamos as respostas dos alunos A8 e A26:

> *A8: Sim. Multiplicação de frações eu considero o mais fácil, e através desse site foi possível aprender outra forma de explicar o porquê de se calcular assim*
>
> *A26: Demorei para entender, porém quando eu finalmente entendi achei a atividade maravilhosa, ficar deslocando os quadrados que representam as frações foi bem criativo e interessante. Embora no começo achei as questões difíceis, depois da explicação ficou fácil. Acredito que para dar certo, a interação com um professor orientador seja essencial.*

Para a pergunta “Você utilizou o recurso GeoGebra ao responder a ATIVIDADE 5? O que você achou dessa atividade?”, as respostas foram as seguintes:

> *A7: Sim. Essa também achei um pouco mais difícil que as outras.*
>
> *A3: Não fiz também.*
>
> *A12: Um pouco complicada de entender mais dps q entende fica legal.*
>
> *A29: Foi bom pra entender como funciona a divisão de duas frações.*
>
> *A9: Sim. Foi bem fácil de fazer.*
>
> *A24: Básico, me ajudou pela facilidade de fazer.*
>
> *A17: Não. Não consegui fazer porque eu lembro como faz, mas não consegui entender o porquê.*
>
> *A6: Esse eu também usei e denomino o assunto, exceto quando uma das frações tem número inteiro.*
>
> *A8: Não cheguei a fazer, mas consegui entender um pouco com a explicação do professor. Divisão com fração é um pouco chato mesmo.*
>
> *A26: Definitivamente a mais confusa de todas, mexer nessas interfaces foi complicado e nada intuitivo, mesmo após a explicação na aula acabei ficando com um pé atrás nessa atividade.*
>
> *A5: Não fiz a atividade, mas vi através da aula remota e consegui entender como resolver a questão.*
>
> *A41: Não usei nessa atividade, achei tranquila, mas demorei para fazer.*
>
> *A36: nem essa.*
>
> *A10: Não; achei tranquila*

Esse foi o recurso digital menos usado pelos alunos, um total de 7. Também foi alegado que o recurso era complicado de mexer (A7, A12 e A26). Alguns alunos disseram que o recurso ajudou a entender (A29 e A24). Merece destaque a resposta do aluno A26:

> *A26: Definitivamente a mais confusa de todas, mexer nessas interfaces foi complicado e nada intuitivo, mesmo após a explicação na aula acabei ficando com um pé atrás nessa atividade.*

De acordo com as respostas dadas pelos alunos, podemos verificar que a maioria dos alunos usaram o recurso digital nas atividades 1, 2, 3 e 4 e metade deles usou na atividade 5. No entanto as respostas sobre o uso dos recursos 4 e 5 têm certa incoerência com as respostas de alunos na socialização das atividades, onde a maioria disse não ter usado esses recursos. Muitos deles usaram palavras como: interativo e dinâmico para definir o recurso. Nota-se também que eles acharam que, com o uso do recurso, ficou mais fácil responder às questões e aprender sobre o tema estudado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral deste trabalho é analisar a contribuição de uma proposta de atividades com recursos digitais para o estudo de operações com frações. Para chegarmos a esse objetivo, traçamos três objetivos específicos, quais sejam: 1. Diagnosticar as dificuldades de alunos do Ensino Médio sobre operações com frações; 2. Vivenciar uma sequência de atividades para o estudo de operações com frações com alunos do Ensino, usando recursos digitais e 3. Analisar os resultados das atividades vivenciadas com os alunos do Ensino Médio.

Esta pesquisa foi desenvolvida em três etapas, cada uma correspondente a um objetivo específico (Figura 15).

Os sujeitos do nosso trabalho foram os alunos de duas escolas da Rede Pública Estadual (que nomeamos por Escola A e Escola B) e uma Escola da Rede Privada (Escola C). A “Escola A” situa-se em Moreno - PE; a “Escola B” em Recife-PE e a “Escola C” em Vitória de Santo Antão - PE. Essas escolas pertencem respectivamente às Gerências Regionais de Ensino (GREs): Metropolitana Norte, Recife Sul e Mata Centro. Para tanto, contamos com a colaboração de três professores dessas escolas.

Iniciamos a pesquisa com 48 alunos do Ensino Médio de duas escolas da Rede Pública e uma escola da Rede Privada do Estado de Pernambuco. A pesquisa foi finalizada com 14 alunos, sendo 7 de uma escola da Rede Privada e 7 de uma escola da Rede Pública.

A diminuição do número de alunos durante a pesquisa pode ser explicada por dois fatores:

1. Os alunos de uma das escolas públicas deixaram de participar, alegando que não tinham tempo de se dedicarem à pesquisa e às aulas da escola ao mesmo tempo, inclusive porque a maioria deles estudava à noite e também trabalhava, o que foi confirmado pelo professor de matemática desses alunos.

2. Com exceção do teste diagnóstico, todas as outras atividades foram realizadas no formato remoto, dificultando muito a interação do pesquisador com os alunos, levando parte deles a não se interessar pela continuação na pesquisa. A interação no formato remoto foi, sem dúvida, a maior dificuldade para realização deste trabalho.

Por entendermos que o aprendizado das operações com frações está diretamente ligado à compreensão do conceito de fração, propomos uma sequência de atividades com recursos digitais para o estudo de operações com frações no Ensino Médio a fim de desenvolver a compreensão dos alunos das referidas operações.

Nossa metodologia foi composta de três etapas: a primeira etapa tratou da aplicação de um questionário para conhecimento do perfil do aluno e para saber qual das operações com frações ele tinha mais dificuldade, foi aplicado também um teste diagnóstico sobre as operações com frações, inclusive envolvendo números mistos. Na segunda etapa realizou-se a aplicação de cinco atividades com o uso de recursos digitais das plataformas PhET e GeoGebra com o intuito de trabalhar os números mistos e as operações com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), essas atividades foram compostas por um recurso digital, orientação para o uso do recurso e questões sobre o tema estudado na atividade. Na terceira etapa aplicamos um questionário avaliativo para que os alunos falassem sobre o uso dos recursos digitais.

O questionário diagnóstico trouxe à tona o que já percebemos em nossa prática, como professor de Matemática. Os alunos chegam ao Ensino Médio sem compreender o conceito de fração e por consequência com muita dificuldade em realizar suas operações. Na avaliação das respostas dadas pelos alunos para as questões propostas no questionário, identificamos que eles não se valeram de qualquer outra forma para resolução das questões, senão o uso das regras ensinadas no Ensino Fundamental para operar com frações. Assim, podemos inferir que os alunos já estudaram essas regras, mas o seu uso não faz sentido para eles, tendo em vista o grande número de erros no teste. Dessa forma, acreditamos que o aprendizado sobre como operar frações não foi realizado de forma eficaz, no Ensino Fundamental. Na maioria dos casos o que se conseguiu foi decorar regras.

As respostas dadas pelos alunos após a aplicação das atividades mostraram que eles não fizeram uso de regras para resolver as questões sobre adição e subtração de frações, preferindo o uso de esquemas figurais. Para a multiplicação e divisão de frações, apesar de alguns alunos apresentarem um esquema figural, a resolução das questões se deu através das regras.

No gráfico da Figura 58 verifica-se que o número de acertos para as questões relativas às operações com frações foi máximo, o que nos sugere que houve um ganho no aprendizado dessas operações, mesmo que para o caso da multiplicação e divisão os recursos digitais não foram usados pela maioria dos alunos.

O fato já narrado sobre as dificuldades de interação com os alunos, tendo em vista que todos os encontros se realizaram no formato remoto, foi sem dúvida o ponto negativo deste trabalho, pois não tivemos o controle necessário sobre as ações desenvolvidas pelos alunos, durante parte da pesquisa, ou seja, quando os alunos estavam trabalhando de forma assíncrona. Entendemos que esse controle é indispensável para a construção do conhecimento, uma vez que a presença do professor é fundamental para mediar os conflitos no processo de aprendizagem.

Após os alunos devolverem as atividades, realizamos dois encontros através do Google Meet, cada encontro com alunos de uma escola, com o fim de socializar a experiência vivida por eles na sequência didática proposta. Nesse momento, tivemos a oportunidade de entender um pouco como os alunos pensavam o conceito de fração e construir, juntos, uma ideia mais sólida sobre esse tema, usando esse aprendizado para compreender a resolução de operações com frações sem precisar pensar em regras prontas.

O momento da socialização foi, sem dúvida, o momento mais proveitoso da pesquisa.

A experiência vivida na socialização das atividades, através das colocações dos alunos e as respostas apresentadas por eles no questionário avaliativo nos levaram a uma perspectiva positiva sobre o uso de recursos digitais para trabalhar temas na área de Matemática, desde que o recurso seja bem escolhido e o processo seja mediado pelo professor.

De acordo com as respostas que tivemos em nossa pesquisa, acreditamos que nosso objetivo foi alcançado no que se refere ao aprendizado das operações de adição e subtração de frações, pois os alunos trabalharam esse tema sem a necessidade de recorrer a regras do algoritmo matemático. Quanto à multiplicação e a divisão de frações entendemos que os recursos digitais contribuíram no aprendizado desse tema, visto que o número de acertos nas atividades da sequência didática comparado com o número de acertos no teste diagnóstico foi bem maior. No entanto, na multiplicação e divisão de frações notamos ainda a falta de compreensão dessas operações sem o uso de regras. Essa conclusão é fruto de todas as respostas dadas pelos alunos durante a pesquisa e principalmente no momento da socialização das atividades. Consideramos que há necessidade de um estudo mais aprofundado sobre esse fato, para que tenhamos mais informações sobre a valorização da compreensão de multiplicação e divisão de frações utilizando recursos computacionais.

Recomendamos o uso de recursos digitais para o aprendizado de operações com frações. Haja vista, que isto ainda é pouco oferecido na escola, mesmo para o estudo de outros temas matemáticos, sabendo-se do mundo digital no qual nossos alunos estão inseridos. Acreditamos que essa experiência propõe ao aluno efeitos de compreensão que o método tradicional centrado “em decorar regras e fórmulas” não possibilita. Entendemos que os recursos digitais proporcionam aprendizagens, por exemplo, no que concerne aos diferentes tipos de registros de representação semiótica (numérica, figural...), que seriam mais difíceis sem o uso desses recursos.

Nosso estudo nos levou a acreditar que se fizermos uso do recurso digital propondo situações que visem a construção do conhecimento e a compreensão dos alunos este é um meio que pode favorecer o ensino e a aprendizagem de frações e de outros temas matemáticos.

.

REFERÊNCIAS

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Pedagogia:** Educação e linguagem matemática IV – Frações e números fracionários**.** Brasília. Faculdade de Educação – Universidade de Brasília, 2009.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher. São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum curricular**. Brasília: Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro, 2017.

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio -** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. **Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Disponível em: https://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CARAÇA, Bento de Jesus, **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1ª Edição. Lisboa, 1951.

CARLOS, Luís. **Multiplicação de Frações, inteiros**. GeoGebra – 2021. Disponível em https://www.geogebra.org/m/drFAJzXh. Acesso: 20 abr. 2021.

CELESTINO, Kamila Gonçalves. **As frações em Algumas Civilizações Antigas**. Encontro Paranaense de Educação Matemática (21 a 23 set. 2017). Cascavel: Universidade Estadual do Centro-Oeste, 2017.

CINTRA, Camila Coppi. **Proposta para o Ensino de Frações para o 7º ano:** do diagnóstico a aprendizagem mediada por modelo de barras. 2017. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos (2017).

CONRADO, Eduardo da Silva. **O ensino de frações na educação de jovens e adultos: um estudo utilizando situações desencadeadoras voltadas para a realidade dos alunos da escola municipal Santa Teresa**. 2020. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Instituto Federal do Piauí, Teresina (2020).

DANTE, Luiz Roberto. **Coleção Teláris**. Matemática**.** 6º ano. 3ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Coleção Teláris**. Matemática**.** 7º ano. 3ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

FIGUEIREDO, Jairo Vogado de. **O ensino de frações mediado por jogos de aprendizagem:** uma proposta para o ensino**.** 2018. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Instituto Federal do Piauí, Teresina (2018).

GODOY, Arialda Shmidt. Pesquisa Qualitativa: tipos Fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v, 35, n.3, p. 20-29, Mai/Jun. 1995.

HOLANDA, Aurélio Buarque de. **Minidicionário da Língua Portuguesa.** 4ª Edição. Editora Nova Fronteira. Rio de Janeiro, 2000. https://www.ufjf.br/ciensinar/2020/06/05/phet-ensinando-atraves-de-simulacoes/. Acesso em: 14 abr. 2021

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. 1ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2017.

LOSCHA FILHO, Roberto. **Fração:** História, teoria e aplicações**.** 2017. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus (2017).

GEOGEBRA. **Sobre o GeoGebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em 23 out. 2021.

MENDONÇA, Glauce Ribeiro de Souza. **A elaboração e construção de material pedagógico como metodologia do processo ensino aprendizagem de frações e produtos notáveis**. 2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de Goiás, Goiânia (2019).

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos, **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.7, n.2, p.103-135, novembro 2014, ISSN 1982-5153.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto Carvalho. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2015.

NASCIMENTO, Ross Alves do. **Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos:** explorando a reta numérica dinâmica. Dissertação de Mestrado (Centro de Educação, mestrado em educação), Universidade Federal de Pernambuco, Recife (2002).

NEIS, Vanderlei Silva. **A utilização de materiais concretos no ensino de frações**. 2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém (2019).

PACHECO, Antônio Eduardo da Silveira. **Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio**. 2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá (2019).

PATARO, Patrícia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática Essencial.** 6º ano. São Paulo: Editora Scipione, 2018.

PELAES, Diogo. **Frações equivalentes**. GeoGebra – 2021. Disponível em https://www.geogebra.org/m/aVbhn2W5. Acesso: 14 abr. 2021.

PEREIRA, Marcelo dos Santos. **O uso do Software GeoGebra para o ensino de construções geométricas a alunos do primeiro ano do Ensino Médio.** 2021. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Pará, Belém (2021).

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco.** Ensino Médio. Recife. Secretaria de Educação, 2021.

PERNAMBUCO. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco, 2012.

PORTO, Francirley Moura. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis**.2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Oeste do Pará, Belém (2019).

PORTELA, Eliane Teles. **Aprendendo por meio da análise de erros: uma investigação sobre as operações com frações no estudo da função afim.** 2018. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Faculdade Unidades de Feira de Santana, Feira de Santana (2018).

RIBEIRO, Estephaneli Corty. **Uma proposta didática com a utilização de jogos, materiais manipulativos e contextualização visando o ensino-aprendizagem.** 2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (2019).

REIS, Alex Marques dos. **A Matemática Egípcia:** solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática), Instituto Federal de São Paulo, Instituto Federal de São Paulo, 2018.

RODRIGUES, Luzia Coelho. **TANGRAM: um recurso proposto para o ensino dos conceitos de área e fração no 7º ano de ensino fundamental.** 2016. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina (2016).

RODRIGUES, Rejane Reis. **O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do Ensino Médio.** 2016. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Vale do São Francisco, Petrolina (2016).

SANTOS, Aparecido dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, José Carlos Medeiros dos. **Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura**. 2019. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SOUSA, Antônio Carlos Bastos. **Frações, inteiros**. GeoGebra – 2021. Disponível em PELAES, Diogo. **Frações equivalentes**. GeoGebra. Disponível em https://www.geogebra.org/m/aVbhn2W5. Acesso: 20 abr. 2021.

UNIVERSIDADE DO COLORADO. Physics Educacional Technology. Matemática. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt/simulations/filter?subjects=math&type=html&sort=alpha&view=grid. Acesso em 20 jan. 2021.

VIANNA, Márcia Porto de Carvalho**. Tratamento das frações no 6º e 7º anos do ensino fundamental para o letramento da probabilidade e estatística. 2017.** Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, (2017).

APÊNDICE A – Quadro 25 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2020).

AUTOR	TÍTULO	PALAVRAS-CHAVE	METODOLOGIA	IS
Michele Benincá	Investigando a aprendizagem de frações nas séries iniciais do Ensino Fundamental II	Frações. Avaliação Diagnóstica. Aprendizagem.	Aplicação e análise de teste diagnóstico.	UFES
Roberto Batista de Oliveira	Expansão das Frações Contínuas dos Números de Ouro e Euler	Frações contínuas. Número de Ouro. Número de Euler. Transformação de Gauss.	Fundamentação teórica.	UERJ
Eduardo da Silva Conrado	O ensino de frações na educação de jovens e adultos: um estudo utilizando situações desencadeadoras voltadas para a realidade dos alunos da escola municipal Santa Teresa – Teresina/Piauí.	EJA. Frações. Situações desencadeadoras.	Aplicação e análise de teste diagnóstico. Aplicação de Sequência Didática.	IFPI
Raimundo Aguinaldo Freire Paulino	Frações contínuas: fundamentação teórica e possíveis abordagens na Educação Básica	Frações contínuas, Convergentes, Números racionais, Irracionais quadráticos, Equações diofantinas lineares com duas incógnitas e equação de Pell.	Sugestão de atividades para o professor.	USP
Reginaldo Vandré Menezes da Mota	Frações decimais periódicas e suas representações	dízimas periódicas; bases numéricas, divisibilidade; números racionais.	Sugestão de atividades para o professor. (resolução de problemas).	UNIRIO
Renato Conceição Junior	Versões digitais para jogos matemáticos: invariantes em paridade, congruência modular, frações e PG.	Jogos digitais de matemática. Invariantes. Paridade. Congruência módulo m. Progressão Geométrica.	Aplicação de jogos digitais com professores.	UFSCAR
Gabriel Barbosa de Argolo	Frações contínuas e aplicações	Números reais; números racionais; algoritmo de Euclides; equação diofantina; congruência linear; números irracionais; racionalização; aproximações; equação de Pell.	Fundamentação teórica	UFBA

Fonte: autoria própria.

APÊNDICE B – Quadro 26 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2019).

AUTOR	TÍTULO	PALAVRA-CHAVE	METODOLOGIA	IS
Solange Ferreira dos Santos	O uso do tangram como proposta no ensino de frações	Sequência Didática. Tangram. Frações. Material Manipulativo. Ensino-aprendizagem.	Proposta de Sequência didática.	UFG
Isabela Estephaneli Corty Ribeiro	Uma proposta didática com a utilização de jogos, materiais manipulativos e contextualização visando o ensino-aprendizagem	Ensino-aprendizagem; Fração; Materiais manipulativos; Jogos.	Aplicação e análise de teste diagnóstico. Aplicação de Sequência Didática.	UENF
Márcio Alexandre dos Santos Silva	Frações contínuas: uma aplicação em criptografia RSA	Frações Contínuas, reduzidas, Ataque de Wiener, Criptografia RSA.	Fundamentação teórica	UFSE
Fabrícia da Conceição Lisboa	Uma Caracterização das Frações Contínuas Periódicas	Algoritmo de Euclides. Frações Contínuas Periódicas. Números Irracionais	Fundamentação teórica.	UFRB
Antonio Eduardo da Silveira Pacheco	Uma abordagem das frações contínuas no ensino médio	Expressões decimais, frações contínuas, representação decimal dos números reais	Aplicação de Sequência Didática.	UFMT
Francirley Moura Porto	Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis	Engenharia Didática. Sequências Didáticas. Teoria das Situações Didáticas. Operações com frações. Produtos notáveis.	Aplicação e análise de teste diagnóstico.	UFOPA
José Carlos Medeiros dos Santos	Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura.	Método de Singapura, Conceituação de frações, Operações com frações, Resolução de problemas envolvendo frações, Modelo de barra, Representação pictórica de frações.	Aplicação de teste diagnóstico. Apresentação do conteúdo em sala de aula. Avaliação pós aula.	UFAL
Anderson Zacher Dutra	Frações contínuas: uma leitura atualizada	Conjuntos Numéricos. Algoritmo de Euclides. Frações Contínuas. Reduzidas.	Fundamentação teórica. Sugestão de atividades para o professor. (resolução de problemas). Aplicações: cálculo de logaritmos e cálculo de raiz quadrada de 2, 3 e 5	UFPR

Felipe Albuquerque Machado	Frações contínuas: uma contextualização para o ensino médio	Conjuntos Numéricos. Algoritmo de Euclides. Frações Contínuas. Calendário.	Fundamentação teórica. Apresentação de situações-problema	UFPR
Glauce Ribeiro de Souza Mendonça	A elaboração e construção de material pedagógico como metodologia do processo ensino aprendizagem de frações e produtos notáveis	Aprendizagem. Fração. Material Pedagógico. Metodologia.	Coleta de dados para a aplicação da pesquisa. Construção do material didático com os alunos. Resolução de exercícios com o uso do material. Análise do questionário e das atividades aplicadas	UFG
Antônio Eclésio Martins Gomes	o estudo de frações em seus diferentes contextos: um diagnóstico com alunos do 6º ano da Rede Municipal de Ensino de Alto Santo - CE	Ensino/aprendizagem. Frações. Matemática.	Aplicação de um questionário diagnóstico. Análise dos dados obtidos	UFERSA
Vanderlei Silva Neis	A utilização de materiais concretos no ensino de frações	Fração, material manipulável, dificuldade, aprendizagem	Avaliação diagnóstica. Uso de materiais concretos para o ensino de frações com alunos. Avaliação após o uso dos materiais para análise dos resultados	UFOPA
Rui Guilherme de Deus Carvalho Ribeiro	Estudo da fração contínua e suas aplicações	Frações Contínuas, Teoria dos Números, Aplicações.	Fundamentação Teórica. Aplicação em problemas cotidianos.	UFAM
Camila Cristina Carvalho Palazzo	Contribuições da história da matemática no ensino da relação entre a fração e a notação decimal	Contribuições da história da matemática no ensino da relação entre a fração e a notação decimal	Análise do tema frações no material didático do SESI.	USP

Fonte: autoria própria.

APÊNDICE C – Quadro 27 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2018).

AUTOR	TÍTULO	PALAVRA-CHAVE	METODOLOGIA	IS
Eliane Teles Portela	Aprendendo por meio da análise de erros: uma investigação sobre as operações com frações no estudo da função afim	Análise de erros. Metodologia de Ensino. Operações com frações.	Foram aplicados três questionários com os alunos. 1. verificar o nível de aprendizado dos alunos nas operações com números racionais. 2. Verificar se após a explicação seriam revertidos os resultados encontrados no Questionário 1. 3. verificar se os estudantes conseguiram assimilar os conceitos trabalhados e ainda resolver a questão.	FUFS
Thalita Thó Rodrigues Alves	A aprendizagem das frações e seus obstáculos.	Estratégias de Ensino. Fração. Número Fracionário. Obstáculos didáticos.	Fundamentação teórica	UFPB
Camila Sousa Vasconcelos	Decomposição de funções racionais em frações parciais	Integral. Decomposição em Frações Parciais. Funções Racionais.	Fundamentação teórica	UFC
Jairo Vogado de Figueiredo	O ENSINO DE FRAÇÕES MEDIADO POR JOGOS DE APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO	Jogos de aprendizagem. Frações. Metodologia. Atividade. Aprendizagem.	Aplicação de um questionário diagnóstico. Uso de jogos com uma turma e aula expositiva com a outra turma. Análise dos dados comparando o rendimento de cada turma	IFPI
Flávio Coelho dos Santos	A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno	Frações contínuas. Sequências numéricas. Calendário	Fundamentação teórica	UFMA
Geyson Suzano	Múltiplos aprendizados no ensino de frações e números decimais na educação básica	Aritmética, Frações, Números Decimais, História da Matemática, Educação Básica, SAEB.	Pesquisa realizada com professores do 2º a 5º ano do Ensino Fundamental sobre o aprendizado de frações. Proposta de intervenção. Análise dos resultados	UFES

Nathercia Custodio Rodrigues	Algumas questões sobre frações	Números Racionais, Sequências de Farey, Olimpíadas de Matemática	Fundamentação teórica. Resolução de problemas	IMPA
Jéssica Bruna Miranda Guedes	O Teorema de Pincherle para Frações Contíınuas	Frações contínuas, convergência de frações contínuas, Teorema de Pincherle, Convergentes.	Fundamentação teórica	UFSJ
Leonardo Barboza de Souza	Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas	Teoria dos Números, Frações Contínuas, Aproximações Diofantinas, Ensino de Matemática, Formação de Professores de Matemática.	Fundamentação teórica	IMPA

Fonte: autoria própria.

APÊNDICE D – Quadro 29 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2017).

AUTOR	TÍTULO	PALAVRA-CHAVE	METODOLOGIA	IS
Camila Coppi Cintra	Proposta para o Ensino de Frações para o 7º ano: do diagnóstico a aprendizagem mediada por modelo de barras	Dificuldades na aprendizagem de frações, modelo de barras, metodologia de resolução de problemas.	Pré-teste diagnóstico. Sequência didática usando o Método de Barras de Singapura. Avaliação final	UFSCAR
Aline Grassi Couto	Frações Contínuas e Números Reais	Frações contínuas, convergentes, determinantes, equações diofantinas, logaritmos.	Desenvolvimento teórico. Aplicação de frações contínuas.	UFGD
Albimar Silva Neri	Frações contínuas, Equação de Pell e aplicações.	Frações contínuas, Equação de Pell, aplicações.	Desenvolvimento teórico. Aplicação de frações contínuas.	UECE
Carlos Maurício de Sousa	Aritmética, frações contínuas e aplicações à música	Divisão euclidiana. Frações contínuas. Afinação musical. Comma	Desenvolvimento teórico. Aplicações	UNIR
Marcia Porto de Carvalho Vianna	Tratamento das frações no 6º e 7º anos do ensino fundamental para o letramento da probabilidade e estatística	Frações, Ensino Fundamental, Probabilidade, Estatística	Probabilidade e Estatística relacionadas às frações Estudo de casos com alunos do Ensino Fundamental. Avaliação final	UFRJ
José Rogério Barreto	Análise de erros cometidos por alunos do 6º ano na resolução de problemas envolvendo frações	Operações com frações; Análise de erros; Resolução de Problemas.	Desenvolvimento teórico. Aplicação de um questionário com os alunos. análise dos erros	FUFS
Francisco Acrízio Carlos Silva	Representação dos números reais por frações contínuas	Frações Contínuas. Frações Contínuas Simples. Representação dos Números Reais.	Desenvolvimento teórico. Aplicações	UFCA
Onésimo Rodrigues Pereira	Uma Sequência didática para o ensino de adição de frações	Sequência Didática. Adição de Frações. Engenharia Didática. Significados de fração. Natureza das quantidades.	Proposta de uma sequência didática	UFT
Samantha Faasen	Análise de uma proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes	Ensino de frações equivalentes, uso do dominó no ensino de frações equivalentes e zona de desenvolvimento proximal.	Estudo de caso	UFSJ
Thiago Ribeiro de Araujo Bruno	Frações contínuas e aproximações de reais por racionais	Teoria dos números, frações contínuas, equações de Pell, ensino fundamental	Desenvolvimento teórico. Resoluções de problemas	IMPA

Euvaldo de Souza Carvalho	Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração	Sequência didática, fração, processo de ensino e aprendizagem, estudante, professor	Proposta de uma sequência didática	UFT
Roberto Loscha Filho	Fração: História, teoria e aplicações	Fração; Números Racionais; Ensino aprendizagem; Oficina pedagógica.	Questionário diagnóstico. Aplicação de uma oficina com alunos para o estudo de frações.	UESC

Fonte: autoria própria.

APÊNDICE E – Quadro 30 - Levantamento de dissertações no PROFMAT com o tema frações (2016).

AUTOR	TÍTULO	PALAVRA-CHAVE	METODOLOGIA	IS
Anderson Adelmo da Silva	Desvendando a crise da incomensurabilidade. Uma proposta para a educação básica utilizando frações contínuas	Frações Contínuas, Números Irracionais, Convergentes.	Desenvolvimento teórico. Proposta de aplicação para o ensino básico	UFABC
Sebastião Alves da Silva	Introdução às frações contínuas	Frações contínuas. Representação de números reais. Aproximações	Desenvolvimento teórico. Aplicações	UFMA
Emanoel Rodrigo Tenorio de Oliveira	Frações contínuas: uma abordagem teórica com aplicações para o ensino médio	Frações Contínuas; Aproximação; Irracionais Quadráticos; Equações Diofantinas; Equações de Pell; Logaritmos.	Desenvolvimento teórico. Aplicações	UFRPE
Marta Rejane Reis Rodrigues	O uso de material concreto para estimular a aprendizagem do conteúdo de frações numa turma da primeira série do Ensino Médio	Aprendizagem Matemática, fração, material concreto	Questionário diagnóstico. Construção de material, usando cartolina. Aplicação da sequência didática com os alunos. Análise dos resultados	UNIVASF
Bruno Alves Matos	Equações Diofantinas Lineares e Equação de Pell: uma abordagem via frações contínuas	Equações Diofantinas Lineares e Equação de Pell: uma abordagem via frações contínuas	Desenvolvimento teórico. Aplicações	UFSJ
Eduardo de Melo Beltrão	Acelerando a convergência das séries de Taylor de funções elementares: um método baseado em funções contínuas	Séries de Taylor, Frações Contínuas, Aproximações, Convergência	Desenvolvimento Teórico	UFRPE
Rafael Tavares Silva Bezerra	Frações Contínuas - um estudo sobre “boas” aproximações	Frações Contínuas; Números Racionais; Números Irracionais; Resolução de Problemas.	Desenvolvimento teórico. Resolução de problemas.	UFPB
Alexander Pinto Pereira	Frações contínuas, representações de números reais e aproximação de números reais por números racionais	Frações contínuas - Algoritmo de Euclides - Aproximação de números irracionais - Equação de Pell - Transformação de Gauss	Desenvolvimento teórico. Proposta para o ensino básico	IMPA

Luzia Coelho Rodrigues	TANGRAM: um recurso proposto para o ensino dos conceitos de área e fração no 7º ano de ensino fundamental	Tangram, recurso, ensino-aprendizagem, área, frações.	Aplicação de uma sequência didática com alunos. Análise dos resultados	UNIVASF

Fonte: autoria própria.