UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Igor Correia de Souza Costa

Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática

RECIFE
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Igor Correia de Souza Costa

Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal e Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Karla Ferreira de Arruda Duque

RECIFE
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837a Costa, Igor Correia de Souza
Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática / Igor Correia de Souza Costa. - 2022.
71 f. : il.

Orientadora: Karla Ferreira de Arruda Duque.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2022.

1. Teoria dos Grafos. 2. Olimpíadas de Matemática. 3. Ensino Básico. 4. Sequência Didática. I. Duque, Karla Ferreira de Arruda, orient. II. Título

CDD 510

IGOR CORREIA DE SOUZA COSTA

Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 10/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Karla Ferreira A. Duque

Profa. Dra. Karla Ferreira de Arruda Duque (Orientadora) – UFRPE

Isis Gabriella da Silva

Profa. Dra. Isis Gabriella de Arruda Quinteiro Silva – UFAPE

Ricardo N. Machado Junior

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Junior – PROFMAT/UFRPE

DECLARAÇÃO

Eu, **Igor Correia de Souza Costa**, declaro para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática, entregue como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente de que a utilização de material de terceiros, incluindo uso de paráfrase, sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como a professora orientadora **Karla Ferreira de Arruda Duque**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 14 de fevereiro de 2022

Assinatura: Igor Correia de Souza Costa

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos uma abordagem da Teoria dos Grafos no componente curricular de Matemática em uma turma dos anos finais do ensino fundamental. Inicialmente, são introduzidos definições, conceitos, teoremas e aplicações. Também são apresentados problemas de olimpíadas nacionais de matemática e raciocínio lógico que são solucionados por conceitos advindos dessa teoria, assim como possíveis relações interdisciplinares que a teoria tem a explorar. A abordagem no ensino básico consiste na aplicação de duas sequências didáticas em uma sala de aula regular do 7º ano. Os resultados são mostrados e discutidos com o embasamento na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este trabalho serve principalmente como consulta e orientação para professores de matemática do ensino básico que pretendam abordar a teoria dos grafos em sua sala de aula deixando-os cientes dos benefícios que o estudo dessa teoria pode trazer para seus alunos.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos; Olimpíadas de Matemática; Ensino Básico; Sequência Didática.

Abstract

In this document, we will present an approach of Graph Theory in the curricular component of Mathematics in a class of the final years of elementary school. theorems, are defined and defined, conceived, initially applications. National proposals of mathematics and logical conceptual problems that are solved by emerging theories, as well as these theories, are also presented. The approach in basic education consists of the application of two didactic sequences in a regular 7th grade classroom. The results are presented and discussed based on the National Curricular Common Base (BNCC). This work mainly serves as a consultation and guidance for elementary school mathematics teachers who intend to approach graph theory in their classrooms for the knowledge of the benefits that the study of this theory can bring to their students.

Keywords: Graph Theory; Mathematical Olympiads; Basic education; Didactic Sequence.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A Teoria dos Grafos é uma área relativamente recente na matemática. Nos últimos anos ela vem tendo forte presença nas ciências. Porém essa presença não vem se destacando apenas nas ciências, podemos perceber que no ambiente escolar também. Problemas olímpicos nacionais e internacionais mostram o fato dos grafos estarem cada vez mais presentes no nosso dia a dia.

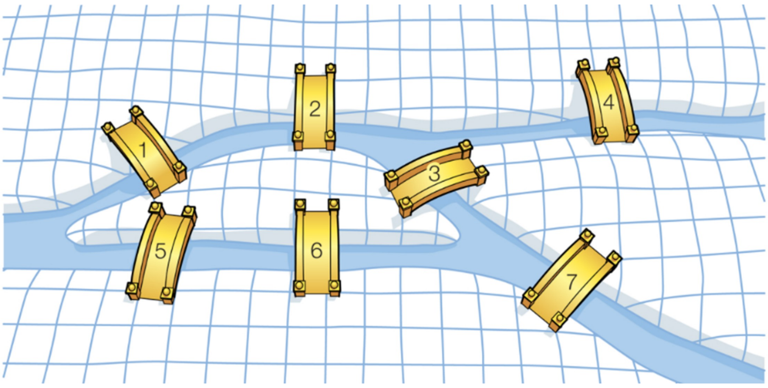
> "O desenvolvimento de uma teoria matemática das relações entre elementos de conjuntos discretos é uma conquista bastante recente, se comparado aos sucessos da "matemática do contínuo", em particular após a contribuição decisiva de Newton e Leibnitz, com a invenção do cálculo infinitesimal. Esta contribuição forneceu, logo de início, um enorme impulso à física [...]. A geometria analítica havia sido inventada por Descartes e o uso do cálculo no seu contexto veio permitir a fácil resolução de problemas considerados difíceis ou insolúveis [...]. Nada disso, no entanto, nos aproxima da topologia [...]. O estudo dos nós e das superfícies oferece, certamente, questões as mais difíceis e mesmo sua abordagem elementar pode exigir um elevado nível de abstração. A topologia das redes, em comparação, é mais simples, ao menos na compreensão de suas estruturas: e um matemático e geômetra como Euler, em pleno século XVIII, formulou e resolveu o primeiro dos seus problemas, caso isolado e sem maior importância em meio à sua fantástica produção científica. Talvez essa pouca importância tenha desestimulado outros a seguir-lhe os passos, apesar da clareza da abordagem por ele utilizada; ficou assim isolado, em meio aquele século, o primeiro problema do que hoje chamamos a teoria dos grafos." (BOAVENTURA, 2012, p. 1)

O desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XX. Evidentemente, tal desenvolvimento não se teria dado sem a invenção do computador, sem o qual a imensa maioria das aplicações de grafos seria totalmente impossível (BOAVENTURA, 2012, p.2). O primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos foi o problema das sete pontes de Konigsberg, que foi resolvido por Leonhard Euler em 1736:

Problema: Na cidade de Königsberg, sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura a seguir. Será possível fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Iremos discutir mais sobre esse problema em outros capítulos e responder se é possível ou não realizar esse passeio. Este trabalho serve como fonte de estudo e consulta para professores, e também como uma proposta de abordagem deste tema para professores de Matemática do Ensino Básico, auxiliando em seu planejamento e mostrando a riqueza

Figura 1 – Pontes de Königsberg



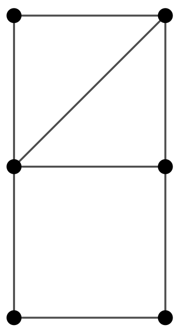
Fonte: https://www.britannica.com/topic/graph-theory

que o tema traz para dentro da sala de aula em termos de aprendizagem. O trabalho também conta com uma seleção de questões de olímpiadas nacionais de matemática, de raciocínio lógico e de informática que podem servir de fonte para a utilização em sala de aula ou em listas de exercícios para alunos do Ensino Básico. Destacaremos também uma breve discussão do tema embasada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

A primeira motivação da escrita deste trabalho e do desenvolvimento desta pesquisa veio da observação da facilidade com que o tema pode ser facilmente abordado com ludicidade para os alunos dos anos finais do ensino fundamental. Veja como exemplo o problema:

Problema: *Desenhe a figura abaixo sem retirar o lápis do papel e sem passar por uma "linha"duas vezes.*

Figura 2 – Grafo Desenho

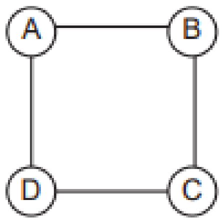


Fonte: Autor

Na linguagem da Teoria dos Grafos, o que basicamente o aluno, em seu desafio, estava pedindo para o seu colega e seu professor fazerem era uma *trilha* em um grafo representado pelo desenho acima. Outra motivação surgiu na percepção, como já mecionado anteriormente, de questões que estão presentes em problemas de olimpíadas de Matemática que trazem grafos. Esse fato não vem só ocorrendo em olimpíadas, mas em grandes vestibulares nacionais também. Observe abaixo um problema proposto pela segunda aplicação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2016:

Problema: *Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?*

Figura 3 – Grafo ENEM



Fonte: ENEM 2016

A questão acima é um problema de *coloração de vértices* de um grafo.

O que podemos nos questionar é sobre: Como abordar a Teoria dos Grafos nos anos finais do Ensino Fundamental? Qual é a importância dessa abordagem? O a BNNC traz como proposta para esse tema?

Para responder a essas perguntas iremos elaborar e propor uma sequência didática com a Teoria dos Grafos para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental mostrando a importância desse tema na resolução de problemas e a competência atingida pelos alunos ao final dela. Portanto, os nossos objetivos específicos são:

- Pesquisar e apresentar alguns conceitos iniciais conhecidos da Teoria dos Grafos que podem ser utilizados pelos alunos, de forma interdisciplinar ou não, dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de situações-problema;
- Discutir possíveis competências propostas pela BNCC que os alunos podem desenvolver ao estudar grafos;
- Pesquisar e propor questões e exercícios para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental sobre grafos, sobretudo aquelas que já estiveram em provas anteriores de olimpíadas nacionais.
- Aplicar, analisar e discutir uma sequência didática com o tema sobre a Teoria dos Grafos em uma sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental.

Inicialmente, neste documento, serão apresentados alguns conceitos e teoremas sobre grafos que podem ser abordados nesse nível de ensino, porém faremos um aprofundamento desse tema, pois sabemos que este trabalho tem como público alvo professores de Matemática. Discutiremos sobre o que a BNCC traz sobre a Teoria dos Grafos e quais possíveis competências esse conteúdo pode ajudar a desenvolver nos alunos. Depois iremos mostrar problemas de provas anteriores de olimpíadas nacionais, com suas resoluções, que podem ser abordados em uma sala de aula dos anos finais Ensino Fundamental. Em seguida, será apresentada e discutida uma sequência didática sobre o tema aplicada em uma turma do 7º ano de uma escola privada da região metropolitana do Recife. Analisaremos e discutiremos as habilidades e os conhecimentos adquiridos pelos estudantes ao longo e ao final desse processo de aprendizagem.

1 Referencial Teórico

Neste capítulo serão abordados algumas definições, conceitos e teoremas da teoria dos grafos. Algumas ideias para definições e demonstrações de teoremas desta seção foram retiradas de (BONDY, 1997), de (SANTOS, 2007), de (LEMOS, 2003) e de (JURKIEWICZ, 2009). Mas, afinal, o que seria um *grafo*?

> "Muitas situações do mundo real podem ser convenientemente descritas por meio de um diagrama que consiste em um conjunto de pontos junto com linhas que unem certos pares desses pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, com linhas unindo pares de amigos; ou os pontos podem ser centros de comunicação, com linhas representando links de comunicação. Observe que, em tais diagramas, o principal interesse é se dois pontos dados são ou não unidos por linha; a maneira pela qual eles são unidos é irrelevante. Uma abstração matemática de situações desse tipo dá origem ao conceito de um grafo" (BONDY, 1997, p. 1)

1.1 Definição de Grafo e sua representação

Definição 1.1. Um *grafo* G é uma tripla ordenada $(V(G), A(G), f_G)$ que é constituída por um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de *vértices*, um conjunto $A(G)$ de *arestas* e uma *função de incidência* f_G que associa a cada aresta de G a um par não ordenado de vértices, não necessariamente distintos, de G.

Observe que pela definição a função f_G não necessariamente precisa ser injetiva nem sobrejetiva. O exemplo do grafo abaixo servirá para deixar mais claro essa definição:

Seja o grafo $G = (V(G), A(G), f_G)$ com

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}; \quad A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

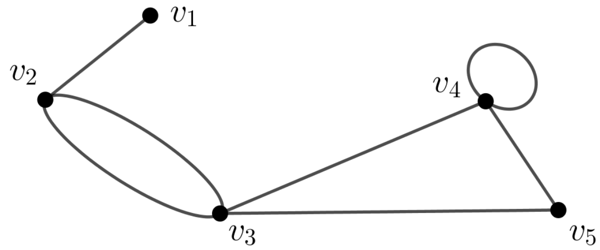
e f_G definido por

$$f_G(a_1) = \{v_1, v_2\}; \quad f_G(a_2) = \{v_2, v_3\}; \quad f_G(a_3) = \{v_2, v_3\}; \quad f_G(a_4) = \{v_3, v_4\};$$
$$f_G(a_5) = \{v_4, v_4\}; \quad f_G(a_6) = \{v_4, v_5\}; \quad f_G(a_7) = \{v_3, v_5\}.$$

Comumente utilizamos um diagrama (ou desenho) para representar essas relações de um grafo que facilita a nossa compreensão dessa estrutura. O desenho ajuda a nós, pessoas, mas os computadores preferem letras e números (JURKIEWICZ, 2009). Observe abaixo o diagrama do grafo G que utilizamos no exemplo acima.

Como o leitor já pode perceber pelo desenho acima, neste trabalho, iremos ocultar os nomes das arestas para não sobrecarregar os diagramas.

Figura 4 – Exemplo de diagrama de um Grafo



Fonte: Autor

Se uma aresta a de um grafo corresponde a um par de vértices i, j dizemos que i e j são as *extremidades* da aresta a ou que a é *incidente* nos vértices i e j. Duas arestas que incidem em um mesmo vértice são chamadas de *adjacentes.* As arestas que possuem as duas extremidades iguais são chamadas de *laços.* No exemplo do grafo G acima, a aresta a_5, que associa o vértice v_4 a ele mesmo, é um *laço.* Em alguns casos podemos nos deparar com a situação de duas ou mais arestas associarem o mesmo par de vértices, como é o caso das arestas que associam v_2 a v_3 (a_2 e a_3) em G. Essas arestas são chamadas de *arestas múltiplas.* Arestas múltiplas são consequentemente arestas adjacentes.

Um grafo que não possui *laços* nem *arestas múltiplas* é chamado de *grafo simples.* Em um grafo simples, se uma aresta a tem extremidades i e j, podemos denotar $a = \{i, j\}$. Em algumas bibliografias o leitor pode se deparar com o termo *multigrafo*, esse termo é comumente usado para grafos que não são simples.

Observação 1.2. Dado um grafo G, chamamos de *subgrafo de G* um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto dos vértices de G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto das arestas de G. Obviamente que, sendo o subgrafo um grafo, também deve existir uma função de incidência que associa cada aresta do subgrafo a um par de vértices também do subgrafo.

Observação 1.3. Em algumas bibliografias o leitor pode encontrar também os termos *nós* e *arcos* que se referem a vértices e arestas respectivamente. Como já pode ser visto, neste trabalho, não optamos pela utilização desses termos.

1.2 Graus dos vértices de um grafo

Esta seção é reservada para tratarmos da definição de *grau* de um vértice e os principais teoremas que envolvem esta definição.

Definição 1.4. Definimos o *grau* de um vértice v de um grafo G, que será denotado por $d_G(v)$, como sendo o número de arestas incidentes a este vértice, sendo que cada laço que lhe é incidente contribui com dois para seu grau.

Daí, podemos apresentar os dois primeiros teoremas:

Teorema 1.5. *A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas de G.*

Demonstração: Basta observar que, quando contamos os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes, isto é

$$2|A(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Teorema 1.6. *O número de vértices de grau ímpar de um grafo é par.*

Demonstração: Podemos separar o somatório do Teorema 1.5 em duas parcelas, a primeira parcela contendo os graus pares e a segunda os ímpares:

$$2|A(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V(G) | d_G(v) \text{ é par}} d_G(v) + \sum_{v \in V(G) | d_G(v) \text{ é ímpar}} d_G(v).$$

Então, como na primeira parcela temos o somatório de graus pares e a soma das parcelas é par, o somatório na segunda parcela tem que ser par também. Como no somatório da segunda parcela os graus são todos ímpares, temos que ter um número par de vértices de grau ímpar para que o esse somatório seja par.

1.3 Grafos Completos

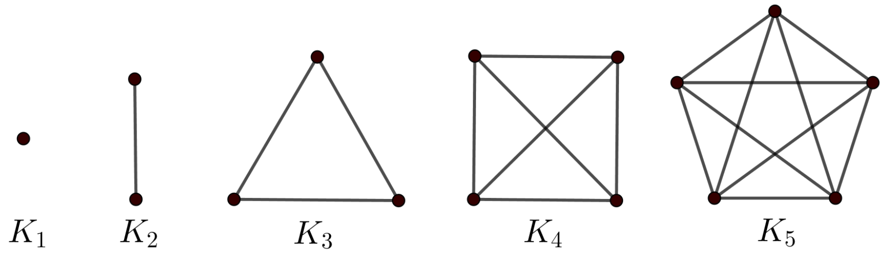
Definição 1.7. Um grafo G diz-se um *grafo completo* de ordem n se for um grafo simples, tiver uma quantidade n de vértices ($|V(G)| = n$) e para cada par de vértices distintos existir uma única aresta associando esses vértices. Denota-se por K_n o *grafo completo* de ordem n.

Abaixo temos como exemplos os diagramas dos grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5 respectivamente.

É fácil notar, pela definição, que, em um grafo completo K_n, o grau de cada vértice é igual a $n-1$ e que, consequentemente, $\sum_{v \in V(K_n)} d_G(v) = n(n-1) = n^2 - n$. Assim, pelo Teorema 1.5, podemos concluir que, em um grafo completo K_n, é válida a relação:

$$|A(K_n)| = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Figura 5 – Grafos Completos



Fonte: Autor

Dado um grafo G simples qualquer, não necessariamente completo, chamamos de *grafo complementar de* G, denotado por $\overline{G}$, o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas de $\overline{G}$ é o conjunto de arestas que faltam para G ser completo.

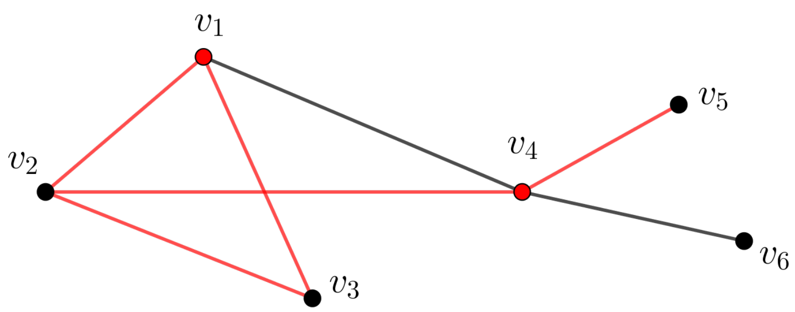
1.4 Passeios em grafos

Definição 1.8. Um *passeio* é uma sequência alternante de vértices e arestas, começando e terminando em vértices, tal que cada aresta é incidente aos vértices que a cercam na sequência.

No exemplo do grafo abaixo, que chamaremos de grafo G, destacamos o passeio:

$$(v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \{v_3, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_4\}, v_4, \{v_4, v_5\}, v_5, \{v_5, v_4\}, v_4).$$

Figura 6 – Passeio no Grafo G



Fonte: Autor

No diagrama do grafo G os vértices destacados v_1 e v_4 são, respectivamente, o início e o término do passeio mencionado. Note que a subsequência de arestas seria suficiente para caracterizar o passeio $(\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_4\})$. Já a subsequência de vértices pode gerar ambiguidade no caso de lidarmos com grafos que possuem arestas múltiplas. Caso o grafo não possua arestas múltiplas, iremos adotar a subsequência de vértices para identificar o passeio facilitando a escrita e a leitura do mesmo.

Observe que, pela definição de passeio em um grafo, não é necessário que os vértices nem as arestas sejam distintos, muito menos que o vértice de início seja o mesmo vértice do término. Como ao longo dos estudos sobre grafos feitos pela humaninade veio a necessidade de especificar passeios que possuem essas tais propriedades surgiu a necessidade de classificar esses tais passeios. Daí seguem as nossas próximas definições.

Definição 1.9. Um passeio em que todas as arestas são distintas é chamado de *trilha*.

Definição 1.10. Um passeio em que todos os vértices são distintos é chamado de *caminho*.

Definição 1.11. Um passeio que inicia em um vértice e termina no mesmo vértice de início é chamado de *circuito*.

Definição 1.12. Um passeio que possui exatamente dois vértices iguais, sendo eles o de início e o de término, é chamado de *ciclo*.

Observação 1.13. Um passeio que é simultanemante uma trilha e um circuito é chamado de *trilha fechada*. Uma trilha que não é um circuito (isto é, que não é uma trilha fechada) é chamada de *trilha aberta*.

Observação 1.14. O número de vezes que aparecem arestas em um passeio é chamado de *comprimento* do passeio.

Em outras palavras, o comprimento de um passeio é a quantidade de vezes que "passamos" por arestas ao "traçar" o passeio. No exemplo do grafo G', o passeio que destacamos tem comprimento igual a 7.

1.5 Grafos conexos

Definição 1.15. Um grafo G é dito *conexo* se, e somente se, existir pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices de G. Caso contrário, G é chamado de *desconexo*.

Outra forma de caracterizar a conexidade de um grafo é mostrado pelo teorema que segue.

Teorema 1.16. *Um grafo G é desconexo se, e somente se, o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2, de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja G um grafo desconexo. Considere um vértice $v \in V$ qualquer. Formemos assim o conjunto V_1 que contém v e todos os vértices de G que estejam ligados a ele por um passeio. Como G é desconexo, V_1 não contém todos os vértices de G. Assim os vértices restantes formam um conjunto não-vazio V_2, e não existe nenhuma aresta de G com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Portanto V_1 e V_2 formam a partição desejada.

($\Leftarrow$) Seja V_1 e V_2 uma partição do conjunto V dos vértices do grafo G, tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2. Considere dois vértices arbitrários v_1,$v_2 \in V$ tais que $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Não pode existir passeio entre v e w, pois se existisse, haveria uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Portanto, se uma tal partição existe, o grafo é desconexo.

Observação 1.17. Cada um dos subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo é chamado de uma componente conexa do grafo. Ou seja, uma componente conexa é um subgrafo conexo que não esteja estritamente contido em outros subgrafos conexos.

Definição 1.18. Uma *ponte*, ou também chamada de *aresta de corte*, é uma aresta cuja deleção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Teorema 1.19. *Uma aresta é uma ponte se, e somentes se, ela não está contida em nenhum ciclo.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Sejam G um grafo e $p = \{x, y\}$ uma ponte do mesmo, suponha por absurdo que os vértices x e y pertencem a um ciclo $(x, v_1..., v_n, y, x)$. Ao deletar a aresta p, obtemos um grafo G' em que x e y estão em diferentes componentes conexas, mas G' contém o caminho $(x, v_1, ..., v_n, y)$, um absurdo. Logo, se p é ponte, ela não está contida em nenhum ciclo.

($\Leftarrow$) Agora, suponha por absurdo que p não pertence a nenhum ciclo e que p não é uma ponte. Como p não é uma ponte, sua deleção gera um grafo G' que contém um caminho entre x e y. Porém, em G, esse caminho entre x e y junto com a aresta p formam um ciclo, um absurdo. Logo, se p não está contida em nenhum ciclo, ela é uma ponte.

1.6 Árvores

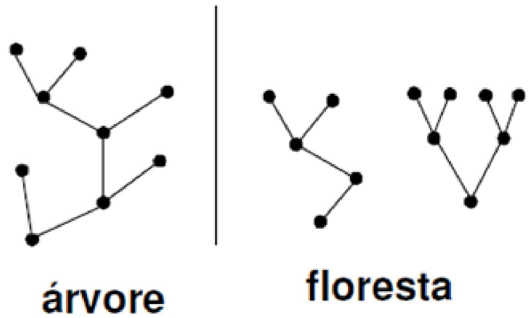
Definição 1.20. Um grafo é chamado de *árvore* quando ele é conexo e não possui ciclos.

As ávores são grafos bem comuns no componente curricular de Matemática do Ensino Básico. Elas estão presentes, por exemplo, nos estudos da Análise Combinatória e Probabilidade.

Definição 1.21. Um grafo é chamado de *floresta* quando ele não é conexo e todas as suas componentes conexas são árvores.

Observação 1.22. Uma *folha* em uma árvore é um vértice de grau 1.

Figura 7 – Árvores



Fonte: (JURKIEWICZ, 2009)

Anteriormente, em outra seção, estabelecemos uma relação entre a quantidade de arestas e a soma dos graus dos vértices de um grafo. Todavia uma propriedade interessante que as árvores possuem é a relação entre a quantidade de arestas e de vértices.

Teorema 1.23. *A quantidade de arestas de uma árvore de n vértices é igual a $n-1$.*

Demonstração:

Considere G uma árvore. Precisamos mostrar apenas que G possui $n-1$ arestas, com n sendo a sua quantidade de vértices. Vamos usar indução matemática sobre n. Vamos verificar o resultado para um valor particular de n. Por exemplo para $n = 1$ e $n = 2$. É fácil de observar que para $n = 1$ temos $1 - 1 = 0$ aresta, e que para $n = 2$ temos $2 - 1 = 1$ aresta. Vamos supor agora que o resultado vale para um grafo G com $k - 1$ vértices. Isto é, se G é uma árvore, então G é conexo e possui $k - 2$ arestas. Vamos acrescentar uma nova aresta $\{x, y\}$ a esse grafo. Para manter o grafo conexo e sem ciclos um e apenas um dos vértices em $\{x, y\}$ pode pertencer a G. Assim, ao acrescentar a aresta $\{x, y\}$, a G , precisamos acrescentar também um vértice. Assim, pela hipótese de indução, teremos um novo grafo G' com $k - 1 + 1 = k$ vértices e $k - 2 + 1 = k - 1$ arestas. A forma como G' foi construído garante que é conexo e sem ciclos, portanto temos que G' é uma árvore. Mostramos assim, por indução, que se G é uma árvore com n vértices, então G é conexo com $n - 1$ arestas.

Uma outra forma também de caracterizar uma árvore, equivalente a definição estabelecida neste trabalho, é a seguinte.

Teorema 1.24. *Um grafo G é uma árvore se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.*

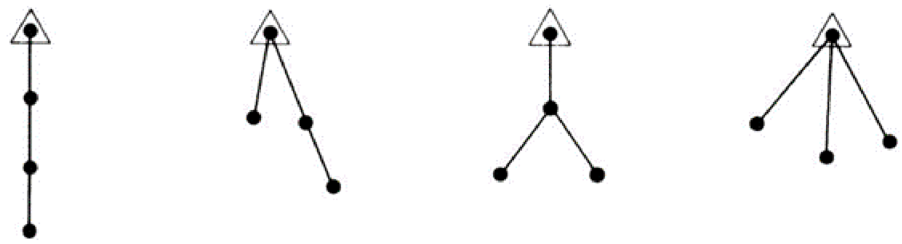
Demonstração:

($\Rightarrow$) Se G é uma árvore, então, por definição, G é conexo e sem ciclos. Como G é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices. Precisamos mostrar que este caminho é único. Vamos supor por absurdo que existam dois caminhos distintos entre um par de vértices qualquer, então a união destes caminhos contém um ciclo, uma contradição. Portanto existe apenas um caminho entre cada par de vértices.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar agora que se existe um, e apenas um, caminho entre cada par de vértices, então G é uma árvore. Como existe um caminho entre cada par de vértices, temos que G é conexo. Vamos supor que G contenha um ciclo. A existência de um ciclo no grafo implica que existe pelo menos um par de vértices x e y tais que existem dois caminhos distintos entre entre eles. Mas, por hipótese, existe um e apenas um caminho entre cada par de vértices e portanto o grafo não tem ciclos. Por definição, G é uma árvore.

Podemos representar uma árvore de forma a destacar graficamente um de seus vértices, qualquer que seja, dos demais. Esse vértice destacado é chamado de *vértice raiz*. Quando uma árvore está representada de forma a distiguir esse vértice, ela é chamada de *árvore enraizada*. Por exemplo as árvores de 4 vértices abaixo estão enraizadas.

Figura 8 – Árvores Enraizadas



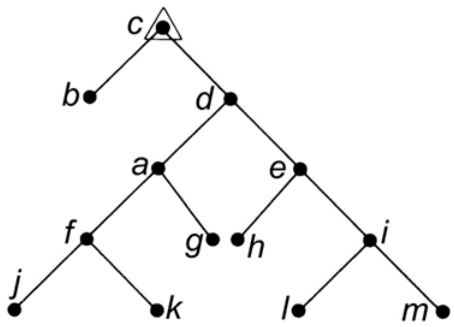
Fonte: (RANGEL, 2002-2013)

Observação 1.25. Em uma árvore enraizada, os vértices de grau 1, com exceção do vértice raiz, são chamados de *folhas*. Se a árvore não estiver enraizada, qualquer vértice de grau 1 é uma folha.

Se representamos uma árvore de forma enraizada, podemos definir níveis na árvore. Considere, por exemplo, a seguinte árvore enraizada:

Dizemos que o vértice raiz c está no nível zero. Os vértices b e d, no nível 1. Os vértices a e e no nível 2. os vértices f, g, h e i no nível 3. E os j, k, l e m no nível 4. Nessa árvore os vértices b, g, h, j, k, l e m são folhas.

Figura 9 – Árvore Enraizada



(RANGEL, 2002-2013)

1.7 Grafos eulerianos e semieulerianos

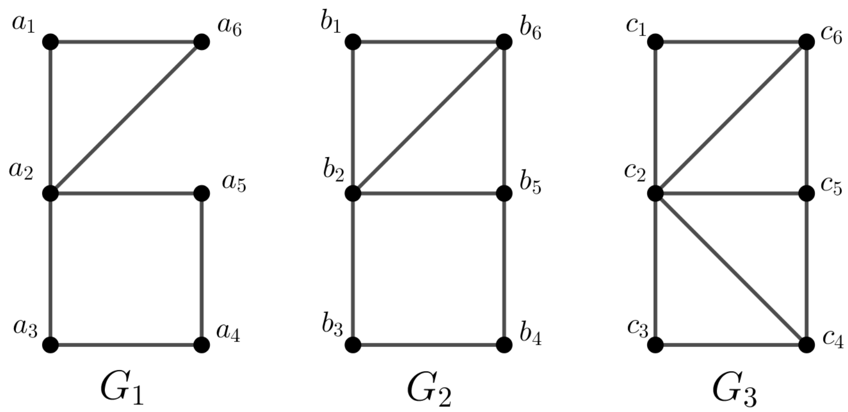
A seguir iremos expor a definição de um *grafo euleriano* e teoremas envolvendo passeios que são essenciais para a resolução de problemas que iremos apresentar no capítulo 3, como por exemplo do problema das pontes de Königsberg mencionado na introdução deste trabalho.

Definição 1.26. Um grafo G conexo com m arestas $(A(G) = m)$ é dito *euleriano* se existe uma trilha fechada de comprimento m em G.

Isto é, se em um grafo, podemos percorrer todas as arestas uma única vez partindo de um vértice e a ele retornando dizemos que o grafo é euleriano.

Se o grafo conexo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento m, ele é dito *semieuleriano*.

Figura 10 – Grafos G_1, G_2 e G_3



Fonte: Autor

Os grafos G_1, G_2 e G_3, respectivamente, são representados acima. G_1 é euleriano visto que existe, por exemplo, a trilha $(a_2, a_6, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_2)$ é fácil notar que esta não é a única trilha que prova que esse grafo é euleriano. G_2 é semieuleriano, pois a trilha pode ser $(b_6, b_2, b_3, b_4, b_5, b_2, b_1, b_6, b_5)$, também não é a única possível. Já G_3 não é nem euleriano nem semieuleriano, esses conceitos serão mostrados e provados no Teorema 1.28 e no Corolário 1.29 que serão apresentados logo a seguir.

O grafo G_2 é uma representação do desenho do problema ilustrado na introdução deste trabalho. O problema para encontrar se um grafo é euleriano ou não pode ser resumido em saber se um desenho pode ser decalcado sem tirar o lápis do papel e sem "traçar" uma "linha" mais de uma vez. O nome "euleriano" se originou com o problema das pontes de Königsberg que foi resolvido por Leonhard Euler em 1736 também. Ele mostrou que era impossível realizar um passeio pelas pontes com tais restrições. Para entender como Euler provou isso iremos precisar de um lema:

Lema 1.27. *Se todo vértice de um grafo G tem grau maior que ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G contém arestas múltiplas ou laços é fácil notar que não há o que provar, pois ele terá, trivialmente, um ciclo. Suponha, portanto, que G é um grafo simples (isto é, sem arestas múltiplas nem laços), como todo vértice de G tem grau maior que ou igual a 2, ao chegarmos em um vértice qualquer por meio de um passeio ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como a quantidade de vértices é finita, o lema está provado.

Com esse lema, agora, podemos enunciar e provar o teorema que segue.

Teorema 1.28. *Um grafo G conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que G seja conexo e tenha uma trilha fechada de comprimento m, com $|A(G)| = m$. Cada vez que a trilha passa por um vértice ela utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair, também incluindo o vértice de início e término da trilha. Logo, o grau de cada vértice tem que ser obrigatorimente par.

($\Leftarrow$) Usaremos indução sobre o número de arestas m de um grafo G conexo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior que ou igual a 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todos as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H, e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T. A concatenação das trilhas fechadas de T e H tem comprimento m, logo, o grafo G é euleriano.

Um fato decorrente desse teorema é uma proposição semelhante, porém para o caso dos grafos serem semieulerianos.

Corolário 1.29. *Um grafo G conexo é semieuleriano se, e somente se, exatamente, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que G seja conexo e tenha uma trilha aberta de comprimento m, com $|A(G)| = m$. Cada vez que a trilha passa por um vértice, ela utiliza duas arestas, uma para entrar e outra para sair, porém, devemos perceber a exceção dos vértices de início e de término da trilha por serem distintos. No vértice de início, chamemos de v, iremos utilizar uma aresta para iniciar a trilha e, a partir desse início, a cada passagem por v novamente, caso haja, a trilha passa por v entrando e saindo por arestas ainda não utilizadas na trilha. Analogamente acontece com o vértice de término da trilha, chamemos de u, no término da trilha, chegamos em u e não utilizamos mais arestas para sair. As quantidades de saídas e chegadas nos vértices v e u são obrigatoriamente ímpares.

($\Leftarrow$) Sendo v e u os únicos vértices de grau ímpar de G, se houvesse uma aresta ligando esses dois vértices, aumentaria em uma unidade o grau de cada um deles, isso faria com que os graus de todos os vértices do grafo fossem pares, logo, G seria euleriano, pois, segundo o Teorema 1.28, existiria uma trilha fechada que passa por todas as suas arestas. Assim, é fácil notar que, com a ausência da aresta que liga os vértices v e u, essa possível trilha fechada ficaria incompleta, faltando apenas essa aresta. Então, com a ausência da aresta $\{u,v\}$, conseguiríamos obter uma trilha aberta que passa por todas as arestas de G e que tem início e término nos vértices v e u, não necessariamente nessa ordem. Logo, G é semieuleriano.

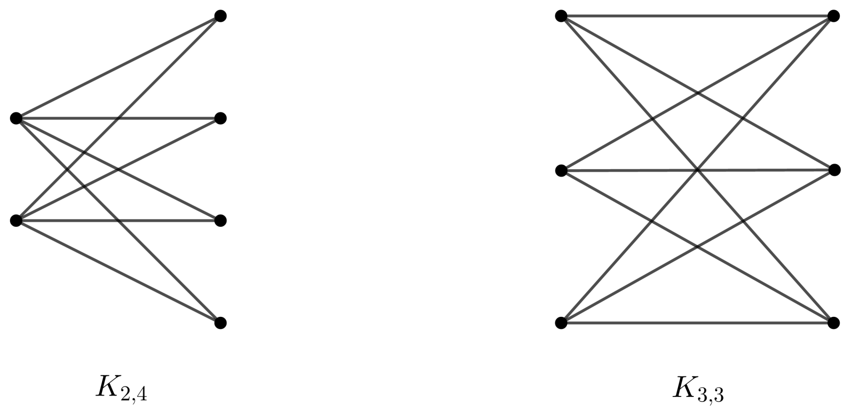
1.8 Grafos bipartidos

Definição 1.30. Um grafo G em que o conjunto $V(G)$ de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos $V_1(G)$ e $V_2(G)$ tal que toda aresta de G tem uma extremidade em $V_1(G)$ e outra em $V_2(G)$ é chamado de *grafo bipartido*.

Definição 1.31. Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido em que todos os vértices de $V_1(G)$ são ligados a todos os vértices de $V_2(G)$. Denota-se por $K_{p,q}$ o grafo bipartido completo com $p = |V_1(G)|$ e $q = |V_2(G)|$.

No exemplo abaixo temos, respectivamente, os diagramas dos grafos bipartidos completos $K_{2,4}$ e $K_{3,3}$.

Figura 11 – Grafos $K_{2,4}$ e $K_{3,3}$



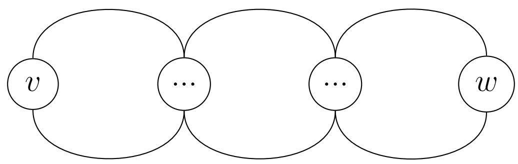
Fonte: Autor

Teorema 1.32. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, é conexo e não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja G bipartido. Se não houver ciclo em G, não há o que mostrar. Se há um ciclo em G este alterna vértices de $V_1(G)$ e $V_2(G)$, dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de $V_1(G)$ (por exemplo), para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

($\Leftarrow$) Seja G um grafo conexo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos $V_1(G)$ e $V_2(G)$, independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer v. O subconjunto $V_1(G)$ será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w. O subconjunto $V_2(G)$ será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w. Os conjuntos $V_1(G)$ e $V_2(G)$ são disjuntos, pois se w estivesse em $V_1(G)$ e $V_2(G)$ simultaneamente, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a w. Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w, produzindo alguns ciclos (veja o diagrama a seguir). Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G, contrariando a hipótese.

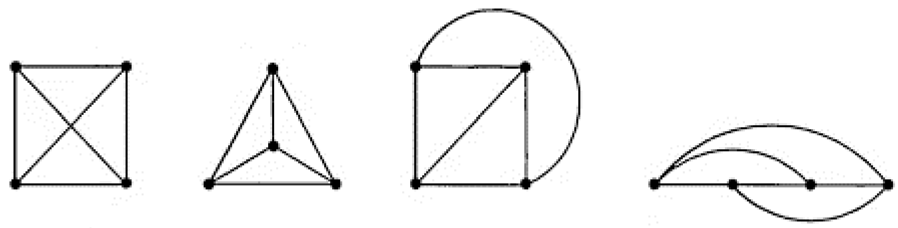


Fonte: (JURKIEWICZ, 2009)

1.9 Grafos planares

Definição 1.33. Um grafo G é *planar* se puder ser representado graficamente no plano de tal forma que não haja cruzamento entre suas arestas. Caso contrário, o grafo é dito *não-planar*

Com esta definição tem-se que, se o desenho de um grafo tiver cruzamentos, o grafo pode ainda ser planar se puder ser desenhado sem cruzamentos. Vejamos, por exemplo, algumas representações gráficas do K_4.



Fonte: (RANGEL, 2002-2013)

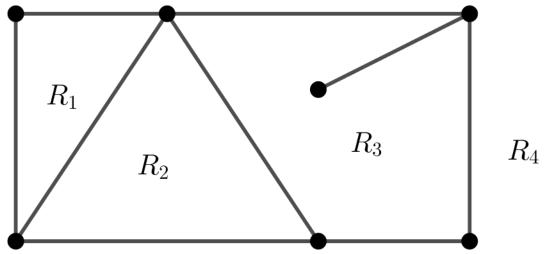
Como podemos perceber, a primeira representação mostrada acima é a única, dentre as 4 apresentadas, que possui cruzamento entre arestas, porém, isso não é suficiente para afirmarmos que K_4 é não-planar. Como é mostrado nas demais representações do K_4 acima, é possível representar graficamente o grafo sem necessariamente cruzar arestas, então K_4 é planar.

Observação 1.34*.* A representação gráfica planar de um grafo é um excelente forma de verificarmos se uma aresta faz parte ou não de algum ciclo do grafo.

A representação planar de um grafo divide o plano em regiões delimitadas pelas arestas, uma das regiões é ilimitada. Como mostra abaixo um grafo planar dividido em 4 regiões em que a região R_4 é ilimitada.

Leonhard Euler (1707 - 1783) mostrou que a relação descrita abaixo entre o número de regiões r, o número de vértices n, e o número de arestas m pode ser estabelecida em todo grafo planar.

Figura 12 – Regiões num grafo



Fonte: Autor

Teorema 1.35. *Seja um grafo G planar, r o número de suas regiões, m o número de suas arestas e n o número de seus vértices, então*

$$r - m + n = 2.$$

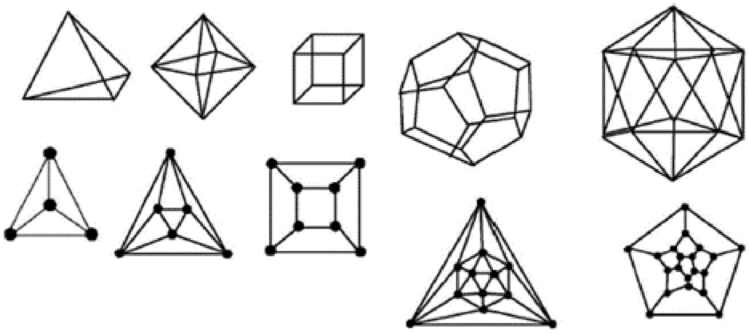
No Ensino Básico, essa fórmula é muito utilizada na geometria, nos estudos de poliedros convexos. Decidimos omitir a demonstração neste trabalho, caso o leitor tenha curiosidade, recomendamos a leitura das notas de aula (RANGEL, 2002-2013).

Como exemplo, vejamos o grafo mostrado acima que possui 4 regiões, 9 arestas e 7 vértices, então $4 - 9 + 7 = 2$. De fato, observe que para o K_4 supracitado a relação também é satisfeita: $4 - 6 + 4 = 2$.

Observação 1.36. É fácil notar que todo grafo do tipo árvore é planar, e, como não possuem ciclos, têm apenas uma região, que é a ilimitada. Logo, da relação de Euler, $r - m + n = 2 \rightarrow 1 - m + n = 2 \rightarrow m = n - 1$, o que corrobora com um fato já mencionado no capítulo sobre árvores.

Todos os grafos platônicos (grafos que representam os 5 poliedros de Platão) são planares como mostra a figura a seguir.

Figura 13 – Grafo ENEM



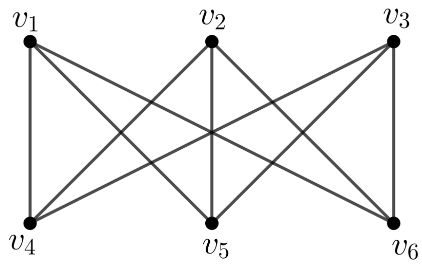
Fonte: (JURKIEWICZ, 2009)

Uma técnica de demonstração da não planaridade de um grafo que pode ser abordada nos anos finais do ensino fundamental será apresentada no teorema a seguir.

Teorema 1.37. *O grafo $K_{3,3}$ é não-planar.*

Demonstração: Para demonstrar esse teorema vamos tentar construir a representação planar desse grafo. Para isso peguemos um possível representação do $K_{3,3}$ e nomeamos os seus vértices a fim de facilitar o passo a passo que será mencionado.

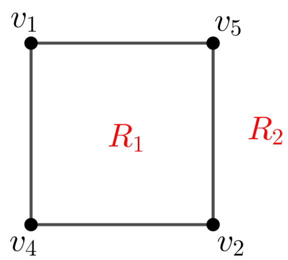
Figura 14 – Grafo $K_{3,3}$



Fonte: Autor

Perceba que os vértices v_1 e v_2 têm que estar ligados com os vértices v_4 e v_5, então comecemos por eles e montemos essa representação abaixo. Como se pode ver abaixo, esses quatro vértices dividem o plano em duas regiões R_1 e R_2.

Figura 15 – Vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 do grafo $K_{3,3}$

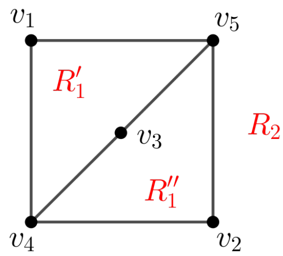


Fonte: Autor

O vértice v_3 também deve estar ligado aos vértices v_4 e v_5. Na nossa representação o vértice v_3 estará ou em R_1 ou em R_2. Sem perda de generalidade, coloquemos v_3 em R_1 - estando v_3 em R_2 a construção pe análoga. Perceba que, por causa da inclusão de v_3, a região R_1 foi dividida em duas regiões R_1' e R_1'' como mostra a representação a seguir.

Para inserir o último vértice, o v_6, devemos perceber que ele deve estar ligado a v_1, a v_2 e a v_3, porém não existe uma forma de inserir o v_6 sem cruzar arestas: se ele estiver em R_1' irá cruzar aresta ao se ligar a v_2; se ele estiver em R_1'' irá cruzar aresta ao se ligar a v_1; e se ele estiver em R_2 irá cruzar aresta ao se ligar a v_3. Logo, é impossível construirmos uma representação planar do $K_{3,3}$.

Figura 16 – Inclusão do vértice v_3 no grafo $K_{3,3}$



Fonte: Autor

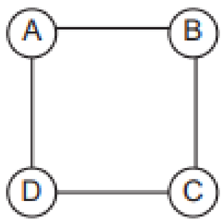
Analogamente, podemos utilizar a mesma ideia para provar que o grafo K_5 também é não-planar. Essa demonstração pode ser encontrada em (RANGEL, 2002-2013).

1.10 Coloração de vértices

Estudaremos agora o problema do ENEM de colorir os vértices de um grafo apresentado na introdução deste trabalho:

Problema: *Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?*

Figura 17 – Grafo ENEM



Fonte: ENEM 2016

Solução: Ao colorir o grafo, percebemos que o vértice A dispõe de 3 opções, visto que temos apenas três cores disponíveis. Para colorir o vértice B temos 2 opções, pois não podemos colorir com a mesma cor que já está estabelecida em A. Para pintar os demais vértices precisamos nos atentar a dois casos:

1. Se C for colorido com a mesma cor de A, isto é, apenas 1 opção, D tem 2 opções de cores, pois não podemos escolher a cor estabelecida em A e C. Logo, utilizando o princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ maneiras.

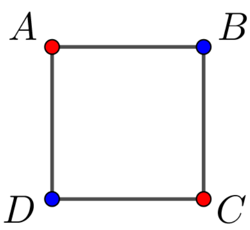
2. Se C for colorido com uma cor diferente de A, isto é, 1 opção, pois também não podemos repetir a cor de B, D tem 1 opção de cor, pois não podemos escolher as cores de A nem de C. Logo, utilizando o princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ maneiras.

Então temos $12 + 6 = 18$ maneiras de se colorir os vértices do grafo do problema utilizando três cores.

No problema do ENEM acima, foi utilizado um grafo como simplesmente um instrumento para a elaboração de um problema de contagem que os alunos de ensino básico já estão acostumados a resolver nas salas de aula. O que desejamos é explorar um pouco mais os conceitos estabelecidos na teoria dos grafos.

Então vamos considerar o problema de determinar o menor número de cores que podem ser usadas para colorir os vértices de um grafo sem colorir vértices adjacentes com a mesma cor. É fácil perceber que o menor número de cores que podem colorir o grafo do problema do ENEM é 2 como ilustra a representação abaixo.

Figura 18 – Grafo ENEM com vértices coloridos com duas cores



Fonte: Autor

Definição 1.38. O *número cromático* de um grafo é o menor número de cores necessárias à coloração dos vértices desse grafo. O número cromático de um grafo G é denotado por $x(G)$.

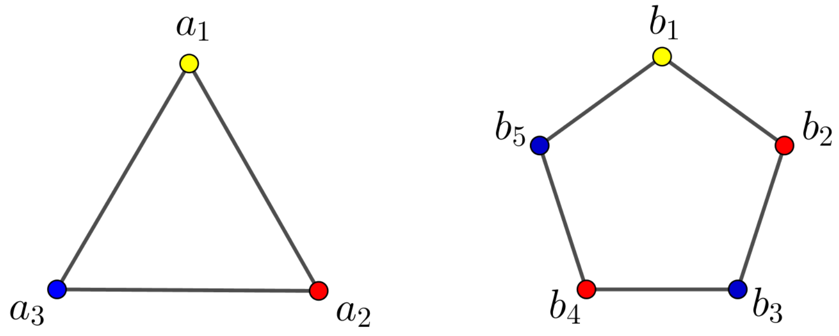
Observação 1.39. Quando é possível colorir um grafo com k cores, dizemos que o grafo é k-colorável. k não é necessariamente o número cromático do grafo.

Observação 1.40. Obviamente se um grafo é k-colorável, ele é colorável para qualquer outro valor maior que k e menor que ou igual ao número de vértices do grafo.

Na teoria dos grafos, denotamos por C_n um grafo formado por apenas um ciclo com n arestas (ou n vértices). No problema do ENEM, o grafo é o C_4 e vimos que ele pode ser colorido com, no mínimo, 4 cores, isto é, $x(C_4) = 2$ Na verdade, para qualquer grafo do tipo C_k, com k par, $x(C_k) = 2$. Assim como para qualquer grafo do tipo C_k, com k ímpar, $x(C_k) = 3$. Como exemplo, apresentamos abaixo o C_3 e o C_5 respectivamente.

Observação 1.41. Por definição, um grafo G é bipartido se, e somente se, $x(G) = 2$.

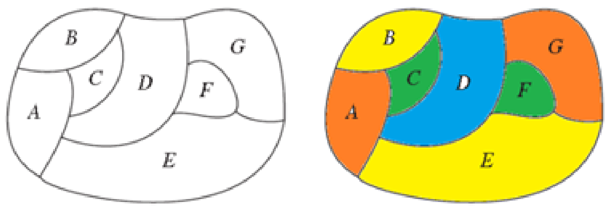
Figura 19 – Grafos C_3 e C_5 com vértices coloridos com três cores



Fonte: Autor

Agora, considere o problema de determinar o menor número de cores que podem ser usadas para colorir um mapa de tal forma que regiões vizinhas nunca tenham a mesma cor. Por exemplo, observe o mapa abaixo de sete regiões que pode ser colorido com 4 cores.

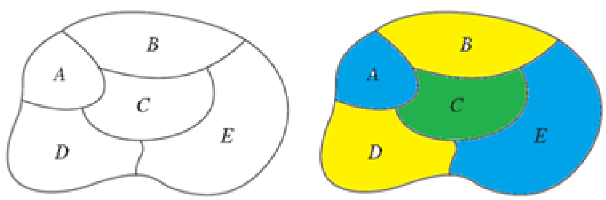
Figura 20 – Mapa 4-colorável



Fonte: https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md$_9Grafos_MaterialExtra$

Observe abaixo um outro mapa de cinco regiões que pode ser colorido com apenas 3 cores.

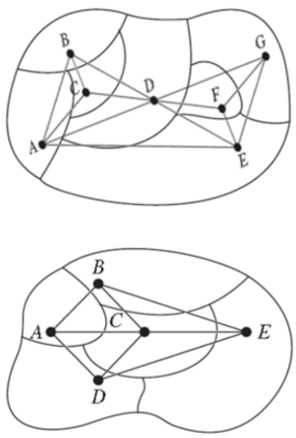
Figura 21 – Mapa 3-colorável



Fonte: https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md$_9Grafos_MaterialExtra$

Cada mapa no plano pode ser representado por um grafo representando cada região como sendo um vértice e conectando arestas a esses vértices caso eles sejam vértices de regiões vizinhas. Esse tipo de grafo que é o resultado dessa construção é chamado de *grafo dual*. O problema de colorir as regiões de um mapa é equivalente ao problema de colorir os vértices do grafo dual com vértices adjacentes não contendo a mesma cor. Observe, na figura 22 abaixo, os grafos duais dos mapas apresentados acima.

Figura 22 – Grafos duais dos mapas



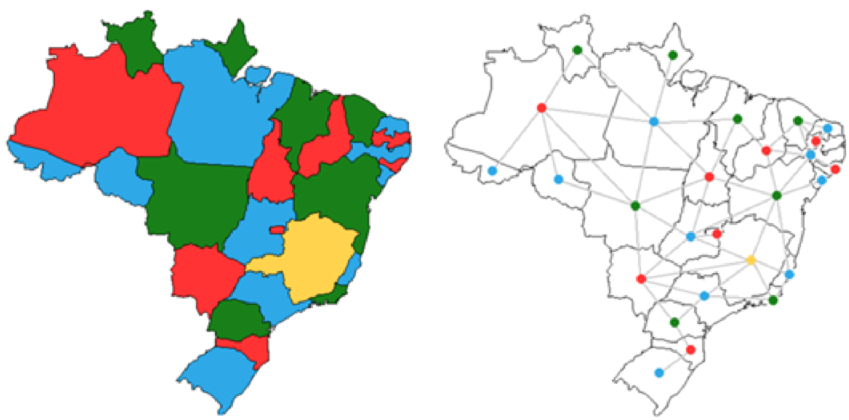
Fonte: https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md$_{9}Grafos_{M}aterialExtra$

Um teorema muito interessante da teoria dos grafos é o *teorema das quantro cores* que diz que qualquer mapa pode ser colorido com 4 cores de tal forma que regiões que façam fronteira não tenham cores iguais.

Teorema 1.42. *(Teorema das quatro cores) Todo grafo planar é 4-colorável.*

A demonstração desse teorema é muito complexa e não será apresentada neste trabalho. Trouxemos à discussão esse teorema apenas a título de curiosidade visto que é um teorema importante quando se trata de coloração de grafos. Como exemplo, representamos, na figura 23 abaixo, a coloração com apenas 4 cores do mapa do Brasil com o seu respectivo grafo dual.

Figura 23 – Mapa do Brasil colorido com 4 cores



Fonte: https://www.cos.ufrj.br/ celina/ftp/celina-im.pdf

Além de coloração de vértices, também é objeto de estudo da teoria dos grafos a coloração de arestas. Acreditamos que este tema, a coloração de vértices e arestas de grafos, tem grande potencial para ser tabalhado em turmas do ensino básico visto que é fácil dar ludicidade às aulas colorindo mapas.

1.11 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Como já mencionado anteriormente, utilizaremos a BNCC como guia de competências que os alunos irão desenvolver em todo o processo da sequência didática. Segundo a BNCC:

> "Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho." (BRASIL, 2018, p. 8)

Ao definir essas competências, a BNCC reconhece que a educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza (BRASIL, 2018, p. 8).

A Matemática, no Ensino Fundamental, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo no final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 265).

> "Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional." (BRASIL, 2018, p. 266)

Agora que entendemos um pouco a perspectiva da BNCC sobre competências, acreditamos que os conhecimentos advindos da Teoria dos Grafos só tenham a contribuir para a formação do aluno. As representações por esquemas de situações-problema e o desenvolvimento do pensamento computacional são, particularmente, características muito presentes nessa área da Matemática.

Dentre as oito competências específicas da Matemática citadas pela BNCC, elegemos a competência de número 6 como a que mais se encaixa com o conteúdo apresentado pela sequência didática desenvolvida neste trabalho. A competência específica de número 6 de Matemática para o Ensino Fundamental diz que o aluno deve enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267). A escolha dessa competência para este trabalho não significa que as outras não podem ser trabalhadas usando esse mesmo conteúdo. Neste caso, caberia apenas uma alteração na abordagem.

Infelizmente, não há, na BNCC, o que nos diga especificamente algo sobre o conteúdo da Teoria dos Grafos visto que este conteúdo não faz parte do currículo da matemática vista no Ensino Básico. Todavia alguns conteúdos presentes na disciplina de Matemática, e em outras disciplinas, que não são propriamente da Teoria dos Grafos fazem analogia com a organização e a estrutura de grafos. Deixamos essa discussão interdisciplinar e intradisciplinar para um capítulo posterior deste trabalho.

Acreditamos que a Teoria dos Grafos será, em um futuro próximo, introduzido no currículo de matemática nessa etapa escolar devido à sua vasta aplicação no cotidiano e nas ciências bem como sua importante contribuição na computação.

2 Metodologia

Optamos por realizar um estudo exploratório de caráter qualitativo. A pesquisa exploratória, segundo (GIL, 2002), tem como objetivo:

> "Proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições." (GIL, 2002, p. 41)

Inicialmente serão apresentados ao leitor problemas de olimpíadas nacionais que apresentam a utilização de conceitos de grafos juntamente com suas respectivas soluções. Esses problemas foram retirados da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), da olimpíada Canguru de Matemática e da Olimpíada Brasileira de Informática (OBI). Nesta última só foram selecionados problemas do nível de iniciação da olimpíada, e não de programação, dos últimos 5 anos. Nas provas da OBMEP e da Canguru de Matemática foram pesquisadas e selecionadas questões de suas provas de todos os níveis e de todos os anos anteriores até as suas existências. Faremos essa apresentação para que o leitor perceba que a teoria dos grafos, por mais que seja uma área recente, está cada dia mais presente no ambiente escolar como uma proposta de conteúdo a ser abordado no Ensino Básico.

Em seguida serão apresentadas duas sequências didáticas cujo tema central é a Teoria dos Grafos aplicadas em uma turma do 7º ano de uma escola localizada na região metropolitana da cidade de Recife-PE. A turma do 7º ano que fez parte desta pesquisa consiste em um grupo formado por 25 alunos. Nas sequências didáticas, serão apresentados aos alunos conceitos, problemas, resultados e aplicações sobre a Teoria dos Grafos. A primeira sequência consiste em apresentar aos alunos o conceito e a estrutura de um grafo, os conceitos de vértices, grau de um vértice e arestas bem como suas relações e a modelagem de problemas de diversas situações do nosso cotidiano e das ciências. A segunda sequência consite em os alunos aprenderem a definição de passeio em um grafo e reconhecer os grafos que são ou não eulerianos.

Nas sequências didáticas, os alunos constantemente estarão resolvendo problemas, seja de forma coletiva com indagações do professor expondo problemas no quadro para toda turma, ou de forma individual através de fichas de questões e exercícios propostas pelo professor.

Ao final de cada sequência didática, será aplicado para os alunos um teste que servirá como uma avaliação somativa da sequência didática, com problemas em que os alunos poderão utilizar resultados e conceitos sobre grafos já trabalhados em aulas anteriores para solucioná-los. Uma retomada do assunto após o teste será dada pelo professor se houver necessidade. Por último, iremos discutir resultados esperados na sequência didática com base no desenvolvimento de competências do documento curricular nacional BNCC.

3 Problemas e Aplicações

3.1 Interdisciplinaridade e intradisciplinaridade

Dentro do contexto pedagógico, muitos associam a palavra disciplina a uma determinada área do conhecimento como a Matemática, a Biologia, a História, dentre outras. Essas componentes curriculares são tidas como disciplinas do currículo escolar. Historicamente, as disciplinas foram criadas com o objetivo de dividir e organizar todo o conhecimento a ser adquirido pelos alunos durante sua vida escolar, ou seja, elas têm como propósito uma fragmentação do todo a ser apreendido. Ainda no contexto pedagógico, uma das relações entre as disciplinas que se pode encontrar no ambiente escolar é a chamada interdisciplinaridade.

Como observado por Fazenda (2003, p.41), se o conhecimento fosse absoluto, a educação poderia constituir-se numa mera transmissão e memorização de conteúdo. Mas, como é dinâmico, há necessidade da crítica, do diálogo, da comunicação, da interdisciplinaridade (FAZENDA, 2003, p. 41).

> "No espaço escolar e acadêmico, organizados em disciplinas, a prática interdisciplinar refere-se à ação que parte de uma disciplina, mas utiliza de conceitos ou instrumentos de outras para tratar das questões previstas em seus objetivos. O professor que atua numa perspectiva interdisciplinar é aquele que domina o conteúdo de sua área e recorre a outras disciplinas para explorar plenamente os temas de que está tratando." (CORDIOLLI, 2002, p. 19)

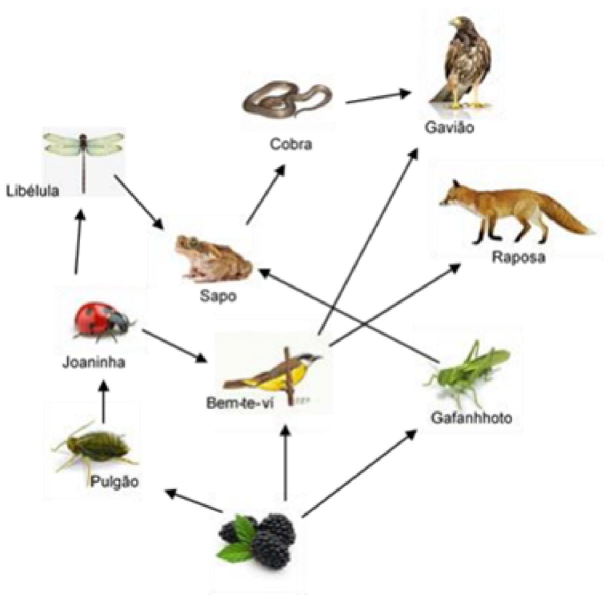
Os grafos podem ser encontrados em diversas disciplinas ao longo de todo Ensino Fundamental. A aprendizagem em Matemática no anos finais do Ensino Fundamental também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares (BRASIL, 2018, p. 298). A seguir, serão abordados alguns conteúdos em que tem-se a presença de grafos em disciplinas além da Matemática em todo o Ensino Básico.

No ensino de Ciências, tanto nos anos iniciais quanto nos finais do Ensino Fundamental, tem-se o estudo de cadeias (ou teias) alimentares. Esse tema é uma das primeiras evidências do contato recente dos alunos com a estrutura gráfica de um grafo, como mostra o grafo com arestas orientadas da figura abaixo. Mesmo não se tratando de grafos árvores especificamente e se tratando de grafos dirigidos, podemos observar uma analogia com os níveis de um grafo árvore quando se trata de níveis tróficos em uma cadeia alimentar.

O professor pode trabalhar graficamente com a cadeia alimentar analisando a melhor disposição dos vértices e arestas para melhor visualização dos níveis tróficos da cadeia.

Particulamente no 4º ano, uma das habilidades propostas pela BNCC a ser desenvolvida pelos alunos nesse conteúdo é a (EF04CI04), que diz que os alunos devem analisar e construir cadeias alimentares simples, reconhecendo a posição ocupada pelos seres vivos nessas cadeias e o papel do Sol como fonte primária de energia na produção de alimentos (BRASIL, 2018, p. 339).

Figura 24 – Teia alimentar



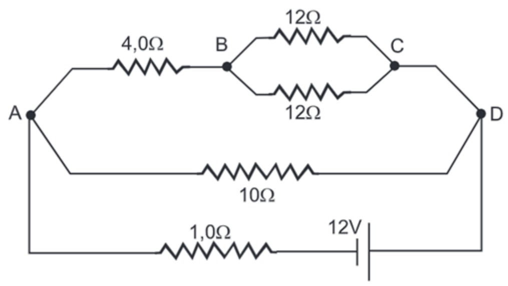
Fonte: IDECAN - Prova 2019 - IFPB - Professor EBTT - Meio Ambiente

Ainda nos anos inicias também podemos encontrar um grafo do tipo árvore na construção de uma árvore genealógica feita pelos alunos. Acreditamos que essa construção é relevante para os alunos desse nível começarem a entender a organização das conexões de vértices que nesse caso estaria sendo representado por pessoas da família.

Podemos perceber com esses dois exemplos que a abordagem interdisciplinar da Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental é totalmente possível. Esse tipo de abordagem é ainda mais rico no Ensino Médio. Na Física, os grafos estão presentes nos estudos de circuitos elétricos e na Química, os grafos estão presentes graficamente nas estruturas dos compostos orgânicos. As figuras abaixo são exemplos que mostram a utilização de grafos nos conteúdos supracitados.

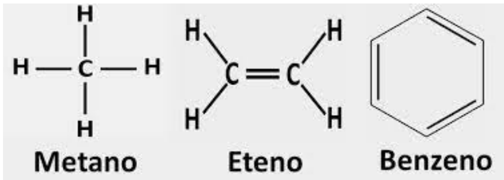
Além da interdisciplinaridade, os grafos também podem ser trabalhados dentro da sala de aula de forma intradisciplinar. Entende-se por intradisciplinaridade as relações entre conhecimentos pertencentes a uma mesma disciplina. Isto é, analisaremos em que outros conteúdos da Matemática podemos encontrar a presença de grafos.

Figura 25 – Representação de um circuito elétrico



Fonte: Prova ITA 2010

Figura 26 – Representação de alguns compostos orgânicos



Fonte: https://www.todamateria.com.br/compostos-organicos/

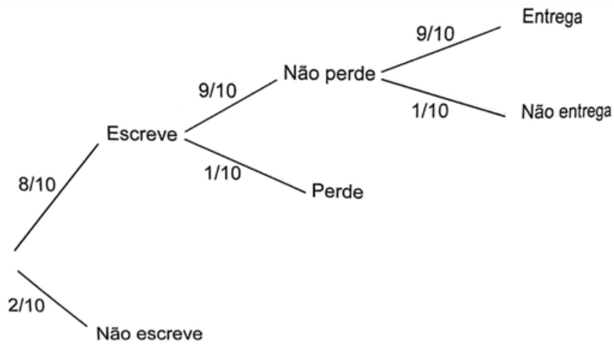
Na Análise Combinatória e na Probabilidade, podemos encontrar grafos nos diagramas denominados de árvore de possibilidades e árvore de probabilidade. Esses diagramas são necessários para possibilitar a compreensão desses conteúdos por parte dos alunos, facilitando, no caso da árvore de possibilidades, a contagem de certos objetos combinatoriais ou simplesmente, nos dois casos, para deixar mais clara e organizada a compreensão de uma situação problema. Segundo a habilidade (EF05MA09) do 5º ano, o aluno deve resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (BRASIL, 2018, p. 295). No Ensino Médio pode-se encontrar a habilidade (EM13MAT310), em que afirma que o aluno deve resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (BRASIL, 2018, p. 537).

> “No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos.” (BRASIL, 2018, p. 528)

Particularmente, o diagrama de probabilidade, serve também para melhor compreensão, por exemplo, da probabilidade condicional. No exemplo da figura abaixo vemos uma esquematização de uma situação problema do livro *Análise Combinatória e Probabilidade* da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Problema: Marina quer enviar uma carta a Verônica. A probabilidade de que Marina escreva a carta é de 8/10. A probabilidade de que o correio não a perca é de 9/10. A probabilidade de que o carteiro a entregue é de 9/10. Dado que Verônica não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Marina não a tenha escrito?

Figura 27 – Exemplo de árvore de probabilidade condicional



Fonte: Livro *Análise Combinatória e Probabilidade* da SBM

Os conceitos de grafos também podem servir para o estudo da Geometria Plana, como por exemplo para calcular a quantidade de diagonais de um polígono regular, para isso podemos utilizar a fórmula da contagem de arestas visto no Teorema 1.5 deste trabalho. Ou até mesmo na Geometria Espacial, com a relação de Euler para poliedros convexos.

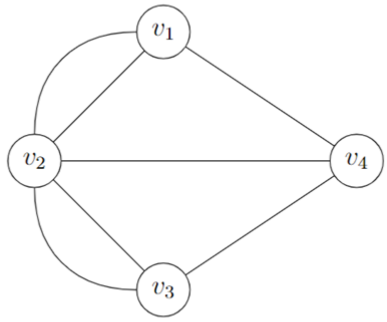
3.2 As pontes de Königsberg

Para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática (BRASIL, 2018, p. 299). Com isso iremos resolver um problema histórico para a teoria dos grafos que já foi apresentada na introdução deste trabalho. Enunciaremos o problema das sete pontes novamente:

Exercício 3.1. Na cidade de Königsberg, sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as margens opostas do rio, conforme ilustrado na figura a seguir. Será possível fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar cruzando cada ponte exatamente uma vez?

Solução: Como podemos observar da Figura 1 presente na introdução deste trabalho, podemos formar um grafo dual da região sendo as porções de terra os vértices e as pontes que os ligam como sendo as arestas.

Figura 28 – Grafo dual do problema das pontes de Königsberg



Fonte: Autor

Temos então um grafo com quatro vértices sendo todos de grau ímpar: $d(v_1) = 3$; $d(v_2) = 5$; $d(v_3) = 3$ e $d(v_4) = 3$. Como já mostrado, para ser euleriano ou semieuleriano o número de vértices de grau ímpar tem que ser menor que ou igual a 2 (uma observação desta afirmação é que é impossível obter um grafo com apenas um vértice de grau ímpar, vide Teorema 1.6). Logo é impossível realizar este passeio nas pontes satisfazendo as condições desejadas.

3.3 Grafos nas olimpíadas nacionais

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC. O público-alvo da OBMEP é composto de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio.

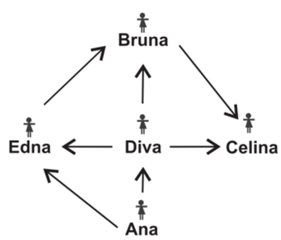
O Concurso Canguru de Matemática é uma competição anual internacional destinada aos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. A competição teve origem na França e é administrada globalmente pela Associação Canguru sem Fronteiras (Association Kangourou sans Frontières - AKSF). O Concurso Canguru de Matemática é a maior competição de Matemática do mundo, com mais de 6 milhões de participantes por ano em mais de 80 países. No Brasil, o Concurso é realizado desde 2009.

A Olimpíada Brasileira de Informática (OBI) é uma competição organizada pela Sociedade Brasileira de Computação (SBC) nos moldes das outras olimpíadas científicas brasileiras, como Matemática, Física e Astronomia. O objetivo da OBI é despertar nos alunos o interesse por uma ciência importante na formação básica (no caso, ciência da computação), através de uma atividade que envolve desafio, engenhosidade e uma saudável dose de competição. A OBI está organizada em duas modalidades e cada modalidade é dividida em níveis. As duas modalidades denominadas Iniciação e Programação. As questões pesquisadas e apresentadas nesta seção foram extraídas da modalidade Iniciação, visto que nessa modalidade os alunos resolvem problemas de lógica e de raciocínio computacional, sem uso de computador, apenas utilizando lápis e papel. O objetivo desta modalidade é despertar o gosto por programação de computadores e detectar talentos potenciais para raciocínio computacional e programação.

A seguir, serão apresentados alguns problemas desses três programas olímpicos (OBMEP, Canguru e OBI) de provas dos anos anteriores. Alguns dos problemas apresentados abaixo foram retirados também do Banco de Questões da OBMEP ou de sites dos programas voltados para essa olimpíada, como os Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), o Programa de Iniciação Científica (PIC) e o Portal da Matemática.

Exercício 3.2. (OBMEP 2007 - Nível 1) A figura mostra como comparar as idades de cinco irmãs, usando flechas que partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Por exemplo, Edna é mais velha que Ana. Qual é a irmã mais velha?

Figura 29 – Comparação das idades das cinco irmãs



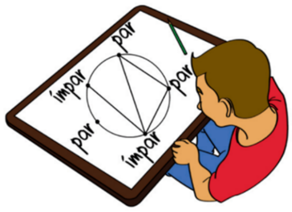
Fonte: OBMEP 2007 - Nível 1

Solução: Como podemos observar no grafo direcionado (com arestas orientadas), o vértice Ana é o único vértice que possui apenas origens de arestas incidindo-a, logo, não existe irmã mais nova do que ela. O vértice Celina é o único vértice que possui apenas extremidades de arestas incidindo-a, logo, não existe irmã mais velha do que ela. Celina é a mais velha dentre as irmãs.

Exercício 3.3. (OBMEP 2011 - 2ª fase do Nível 1) Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de ponto-ímpar quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de ponto-par caso contrário. Por exemplo, na ilustração ao lado, ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.

a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?

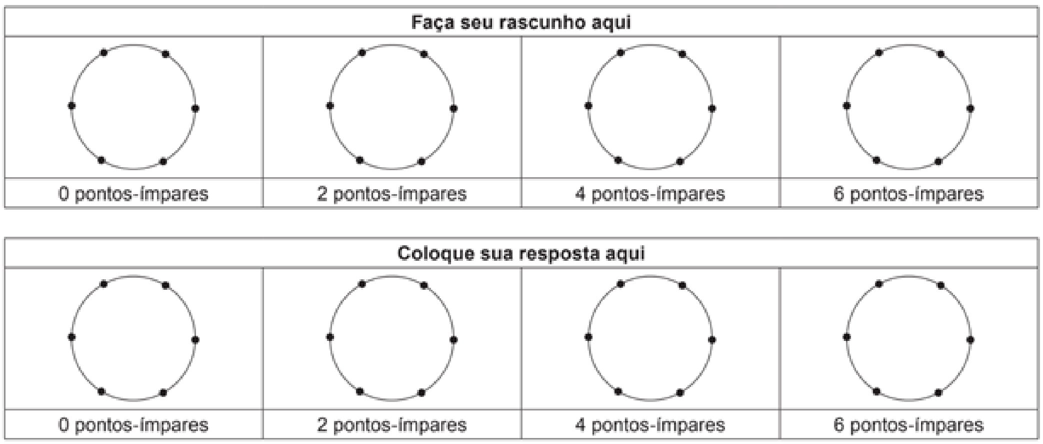
Figura 30 – Marcação de pontos sobre uma circunferência feita por Juquinha



Fonte: OBMEP 2011 - 2ª fase do Nível 1

b) Juquinha marcou seis pontos em cada uma das circunferências a seguir. Em cada caso, mostre como obter o número de pontos-ímpares indicado com exatamente cinco ligações.

Figura 31 – Rascunho da marcação de pontos na circunferência



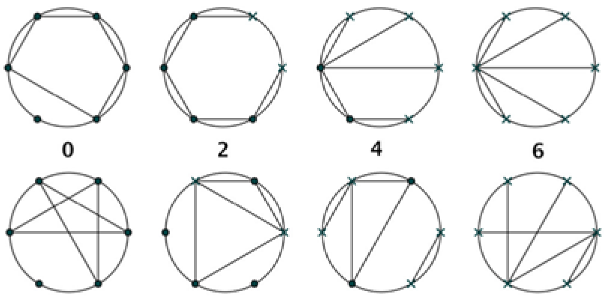
Fonte: OBMEP 2011 - Nível 1 - 2ª fase

c) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

Solução letra (a): Juquinha, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e traçar todas as ligações possíveis, está construindo um grafo com cinco vértices de grau par, pois cada vértice está ligado aos outros quatro restantes. Retirando qualquer uma das arestas, dois desses cinco vértices passam a ter grau ímpar. Logo, ao marcar cinco pontos sobre uma circunferência e fazer todas as ligações possíveis, exceto uma, Juquinha obtém 2 pontos-ímpares e 3 pontos-pares.

Solução letra (b): Na imagem abaixo, mostramos duas maneiras de se obter 0, 2, 4 e 6 pontos-ímpares (assinalados com $\times$) com exatamente cinco conexões. Perceba que formamos vários grafos e não necessariamente todos conexos.

Figura 32 – 0, 2, 4 e 6 pontos-ímpares com cinco conexões



Fonte: OBMEP 2011 - 2ª fase do Nível 1

Solução letra (c): Suponhamos que Juquinha tenha acabado de desenhar a figura. Para cada vértice, contamos a quantos outros vértices ele está ligado e somamos todos esses números. Essa soma é par; de fato, como cada ligação conecta dois vértices, essa soma é duas vezes o números de ligações. Cada vértice par contribui com uma parcela par e cada vértice ímpar com uma parcela ímpar para essa soma; como a soma é par, o número de parcelas ímpares deve ser par, ou seja, o número de vértices ímpares é par. Vide Teorema 1.6.

Exercício 3.4. Num grupo de 20 pessoas, algumas pessoas trocam apertos de mão.

a) Contamos quantos apertos de mão cada pessoa deu e somamos todos esses números. Mostre que o resultado é par.

b) É possível que num grupo de 99 pessoas cada pessoa tenha dado exatamente 3 apertos de mão?

Solução letra (a): Podemos imaginar um grafo em que as pessoas são os vértices e os apertos de mão são as arestas. Com isso percebe-se que a soma de todos os apertos de mão é, na verdade, a soma dos graus dos vértices do grafo. Sendo assim, pelo Teorema 1.5, essa soma será par.

Solução letra (b): Se cada pessoa cumprimentou 3 vezes com apertos de mão, então, para este grafo, temos que cada um dos 99 vértices tem grau igual a 3. A soma dos vértices é igual ao produto dentre dois númerosímpar, 3×99, o resultado é ímpar, o que contradiz o Teorema 1.5. Logo, não é possível.

Exercício 3.5. Um grupo de amigos acampou durante seis noites e toda noite, dois deles vigiaram o acampamento. Cada um ficou de guarda três vezes. Nunca com o mesmo amigo. Quantos eram os amigos?

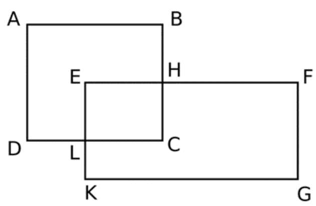
Solução: Sendo os n amigos os vértices e cada uma das 6 noites vigiadas uma aresta, e sabendo que cada vértice tem grau igual a 3, pois cada um ficou de guarda três vezes, queremos encontrar o valor de n neste grafo. A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro da quantidade de arestas, logo $3n = 2 \times 6 \to n = 4$. Eram 4 amigos e o grafo mencionado é o K_4.

Exercício 3.6. (PIC 2016) Em um país há 100 cidades, e sabemos que de cada cidade partem exatamente 4 estradas diretas para outras cidades. Quantas estradas existem no total?

Solução: Considerando as 100 cidades como sendo vértices com cada uma de grau igual a 4 e as estradas como sendo as arestas, queremos encontrar a quantidade m de arestas. Podemos utilizar a contagem dupla do Teorema 1.5 para resolver este problema. Assim, a soma dos graus dos vértices do grafo é igual ao dobro da quantidade de arestas, $4 \times 100 = 2m \to m = 150$. Há 150 estradas nesse país.

Exercício 3.7. (Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 1) Dizemos que um desenho é bem desenhado quando pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha. Por exemplo, o desenho representado abaixo é bem desenhado, pois pode ser desenhado, por exemplo, seguindo a ordem dos vértices $A \to B \to H \to F \to G \to K \to L \to C \to H \to E \to L \to D \to A$.

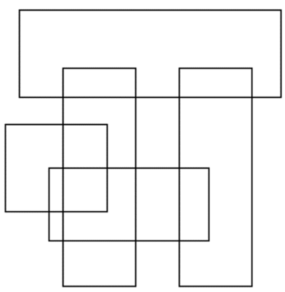
Figura 33 – Exemplo de desenho bem desenhado



Fonte: Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 1

a) Mostre que o desenho (a) abaixo é bem desenhado:

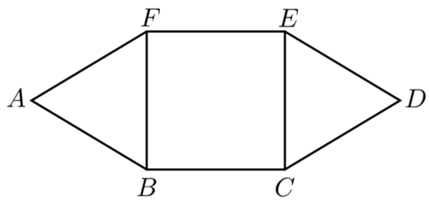
Figura 34 – Desenho (a)



Fonte: Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 1

b) O desenho (b) a seguir é bem desenhado? Justifique.

Figura 35 – Desenho (b)

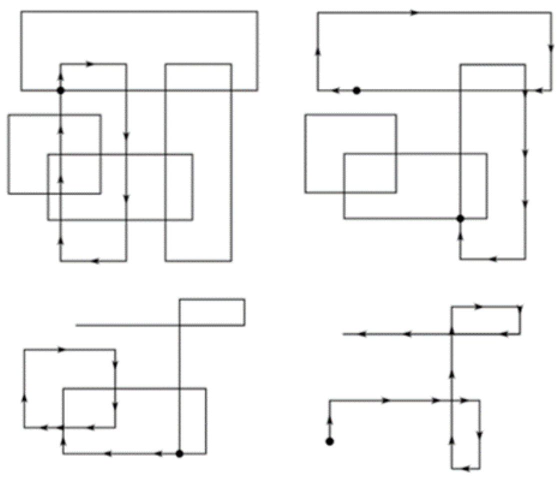


Fonte: Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 1

Solução letra(a): Considerando o desenho como sendo um grafo em que os vértices dos retângulos são vértices do grafo de grau igual a 2 e os cruzamentos entre os retângulos, vértices de grau igual a 4, percebemos que se trata de um grafo conexo em que todos os vértices têm grau par, logo, segundo o Teorema 1.28, o grafo é euleriano.

Faremos algo equivalente a desenhar (bem) a figura. Sem tirar a borracha do papel, apagaremos cada uma das linhas, sem passar a borracha duas vezes numa mesma linha. Começaremos no ponto marcado na figura e faremos, com a borracha, o percurso marcado pelas setas. O caminho descrito abaixo não é a única trilha euleriana do grafo.

Figura 36 – Ilustração do desenho (a) sendo bem desenhado

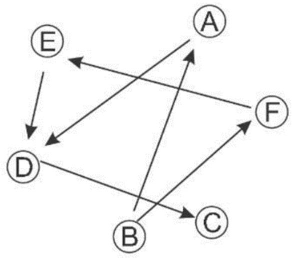


Fonte: Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 1

Solução letra(b): Não é bem desenhado, pois existem mais de dois vértices de grau ímpar, a saber os vértices B, C, E e F. Vide o Teorema 1.28 e o Corolário 1.29.

Exercício 3.8. (Canguru de Matemática 2020 - Nível P) Na figura, uma flecha apontando de uma pessoa para outra significa que a primeira pessoa é mais alta do que a segunda. Por exemplo, a pessoa B é mais alta que a pessoa A. Qual pessoa é a mais baixa?

Figura 37 – Comparação das alturas de cinco pessoas por flechas

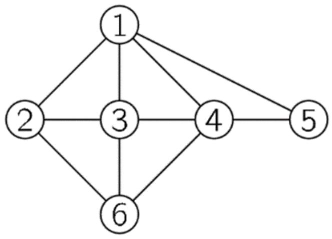


Fonte: Canguru de Matemática 2020 - Nível P

Solução: Utilizando o mesmo racicínio do Exercício 3.2, podemos perceber que no vértice B só incidem origens de arestas, logo a pessoa B é a mais alta, e que no vértice C só incide extremidade de aresta, logo a pessoa C é a mais baixa.

Exercício 3.9. (Canguru de Matemática 2020 - Nível B) O diagrama ao lado representa as relações de amizade das garotas Ana, Beatriz, Cláudia, Diana, Elisabete e Flora. Cada número representa uma garota e cada linha ligando dois números representa a amizade entre essas duas garotas. Cláudia, Diana e Flora têm quatro amigas cada uma. Beatriz é amiga somente de Cláudia e Diana. Qual é o número que representa Flora?

Figura 38 – Relações de amizade de Ana, Beatriz, Cláudia, Diana, Elisabete e Flora

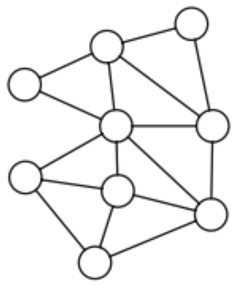


Fonte: Canguru de Matemática 2020 - Nível B

Solução: Como Beatriz tem apenas duas amigas, ele é o único vértice de grau igual a dois do grafo, que é o número 5. Como o vértice 5 tem que ser adjacente aos vértices correspondentes a Cláudia e Diana, pois Beatriz é amiga delas, então os vértices 1 e 4 correspondem, não necessariamente nessa ordem, Cláudia e Diana. O único vértice de grau quatro que sobrou no grafo é o vértice 3, que, consequentemente, corresponde ao número de Flora.

Exercício 3.10. (OBMEP 2012 - Nível 1) De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

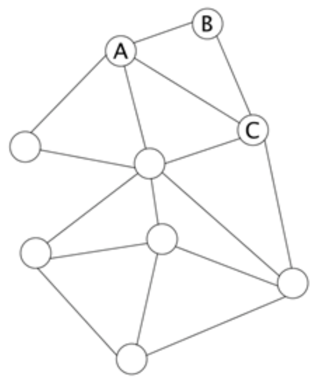
Figura 39 – Ligações dos círculos



Fonte: OBMEP 2012 - Nível 1

Solução: Começamos a colorir o grafo pelo vértice marcado com a letra A. Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o vértice B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica unicamente determinada pelas condições do problema, pois se tratam de vértices em ciclos triangulares. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades diferentes de colorir os vértices A, B e C. Agora notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos vértices restantes ficam unicamente determinadas. Portanto, temos 6 maneiras diferentes de colorir os vértices do grafo de acordo com as condições do enunciado.

Figura 40 – Círculos A, B e C

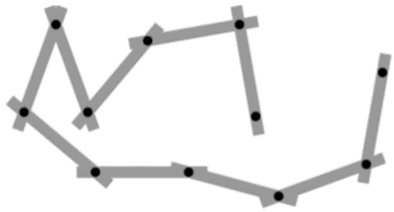


Fonte: OBMEP 2012 - Nível 1

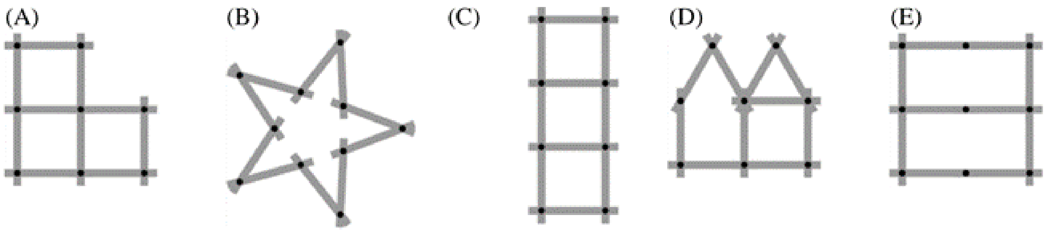
Exercício 3.11. (Canguru de Matemática 2019 - Nível B) Lia brinca com o metro de carpinteiro de seu pai, com dez segmentos, mostrado na figura. Qual das formas abaixo não pode ser feita com esse metro?

Solução: Perceba que não é possível resolver o problema contando as arestas das formas das alternativas visto que todas têm 10 arestas, a mesma quantidade de arestas do metro do pai de Lia. Porém a única forma que não pode ser feita é da letra C, pois é a única que possui mais de 2 vértices de grau ímpar, sendo impossível, assim, fazer uma trilha euleriana ou semieuleriana nesse grafo. Vide o Teorema 1.28 e o Corolário 1.29.

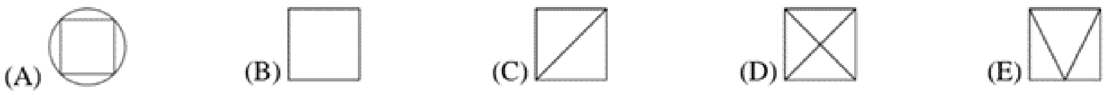
Figura 41 – Metro de carpinteiro do pai de Lia



Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível B



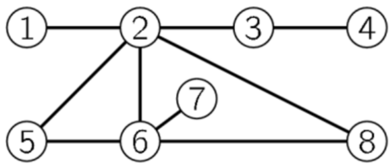
Exercício 3.12. (Canguru de Matemática 2019 - Nível C) Qual dos desenhos a seguir não pode ser feito sem você tirar o lápis do papel e sem passar o lápis pela mesma linha mais de uma vez?



Solução: O desenho D, pois se trata de um grafo que possui mais de dois vértices de grau ímpar. Vide o Teorema 1.27 e o Corolário 1.28.

Exercício 3.13. (Canguru de Matemática 2019 - Nível C) Pedro vai pintar os oito círculos da figura de vermelho, amarelo ou azul, de modo que dois círculos ligados por um segmento não tenham a mesma cor. Quais são os dois círculos que terão necessariamente a mesma cor?

Figura 42 – Os oitos círculos que Pedro vai pintar

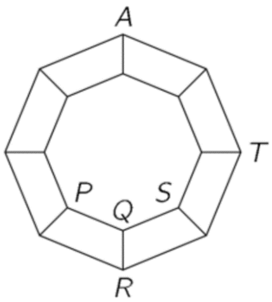


Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível C

Solução: Há dois ciclos triangulares nesse grafo: o ciclo formado por 2, 5 e 6; e o ciclo formado por 2, 6 e 8. Em um ciclo triangular, cada vértice deve ser pintado de uma cor diferente, visto que o seu número cromático é igual a 3. Assim, temos que os vértices 8 e 5, têm que ser necessariamente de cor diferente de 2 e de 6, que já possuem cores diferentes. Como dispomos de apenas 3 cores, os vértices 5 e 8 terão necessariamente a mesma cor.

Exercício 3.14. (Canguru de Matemática 2019 - Nível J) Um grafo consiste em 16 vértices e algumas arestas que os conectam, conforme a figura. Uma formiga está no vértice A. A cada movimento, ela pode caminhar de um vértice para qualquer vértice vizinho pela aresta que os liga. Em quais dos vértices P, Q, R, S, T pode estar a formiga, ao término de 2019 movimentos?
A) Somente P, R ou S, mas não Q e T.
B) Somente P, R, S ou T, mas não Q.
C) Somente Q.
D) Somente T.
E) Em todos esses pontos.

Figura 43 – Grafo do exercício 3.14

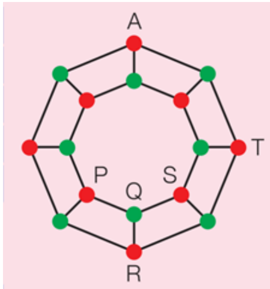


Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível J

Solução: Podemos pintar os vértices do grafo de vermelho e verde, por exemplo, de tal forma que dois vértices diretamente ligados por uma aresta tenham cores diferentes, como na figura. Dessa forma, fica claro que se a formiga partir de A e passar por um número ímpar de arestas irá terminar num ponto verde. Dentre os vértices P, Q, R, S, T somente o Q é verde. Logo, depois de 2019 movimentos a formiga poderá estar somente nesse vértice. Uma possível sequência de movimentos que levem a formiga do ponto A ao ponto Q é ir até e voltar do ponto verde mais próximo 1007 vezes, num total de 2014 movimentos e depois seguir com 5 movimentos até o ponto Q.

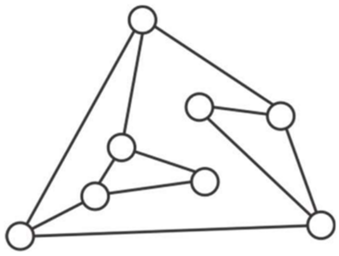
Exercício 3.15. (Canguru de Matemática 2018 - Nível B) Oito lâmpadas se conectam conforme mostrado na figura ao lado. Inicialmente, todas as lâmpadas estão apagadas. Quando uma lâmpada é tocada, ela e todas as lâmpadas a ela conectadas diretamente se acendem. Pelo menos quantas lâmpadas devem ser tocadas para que todas elas se acendam?

Figura 44 – Grafo do exercício 3.14 com vértices coloridos



Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível J

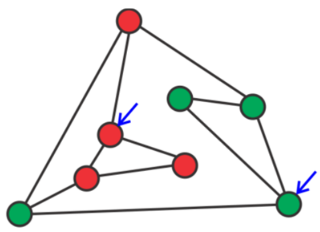
Figura 45 – Lâmpadas conectadas



Fonte: Canguru de Matemática 2018 - Nível B

Solução: Estamos interessados em encontrar o menor número de lâmpadas que podemos apertar para que todas elas acendam. Considerando as lâmpadas os vértices, para resolver esse problema basta apertarmos os vértices que têm os maiores graus do grafo. Ao tocar uma um vértice de grau 3, que é o maior grau encontrando dentre os vértices do grafo, quatro lâmpadas se acendem. Então é necessário tocar mais um vértice não aceso de grau 3. A figura mostra como as oito lâmpadas podem ser acesas tocando-se apenas duas delas.

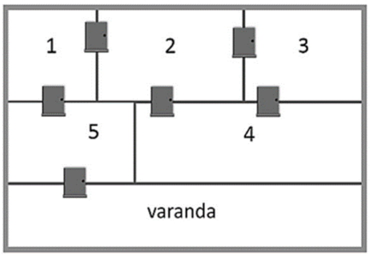
Figura 46 – Lâmpadas conectadas com duas lâmpadas tocadas



Fonte: Canguru de Matemática 2018 - Nível B

Exercício 3.16. (Canguru de Matemática 2018 - Nível S) A figura ao lado é a planta da casa de Renata. Ela entra pela porta da frente, na varanda, e passa por cada uma das portas exatamente uma vez. Em qual dos cômodos irá ficar?

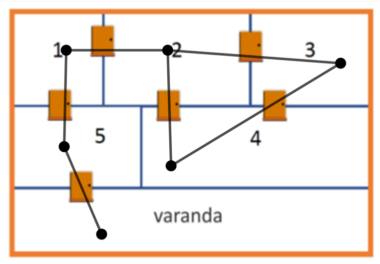
Figura 47 – Planta da casa de Renata



Fonte: Canguru de Matemática 2018 - Nível S

Solução: Como mostrado no grafo dual da casa de Renata abaixo, percebemos que os vértices representados pelo número 2 e pela varanda são os únicos de grau ímpar. Então, segundo o Corolário 1.28 o grafo é semieuleriano e a trilha semieuleriana se inicia na varanda e termina no cômodo de número 2.

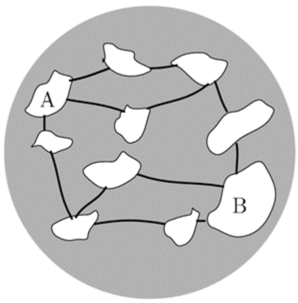
Figura 48 – Grafo dual da planta da casa de Renata



Fonte: Autor

Exercício 3.17. (Canguru de Matemática 2017 - Nível B) Num certo lugar há 10 ilhas e 12 pontes. Todas as pontes estão abertas ao tráfego neste momento. Qual é o menor número de pontes que devem ser fechadas de forma que seja impossível ir de A para B ou de B para A?

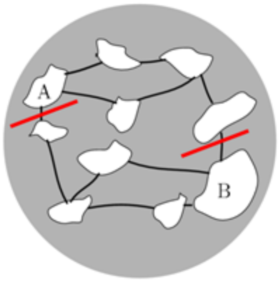
Figura 49 – 10 ilhas com 12 pontes



Fonte: Canguru de Matemática 2017 - Nível B

Solução: Considerando as ilhas como vértices e as pontes como arestas e utilizando uma ideia análoga a do Teorema 1.19, é interessante analisarmos as arestas que não fazem parte de um ciclo. Porém, nesse grafo, todas as arestas pertencem a um ciclo. Neste caso devemos cortar pelo menos duas arestas de tal forma que, ao cortarmos, obtemos duas componentes conexas com os vértices A e B desconectados. A figura abaixo ilustra uma dessas formas.

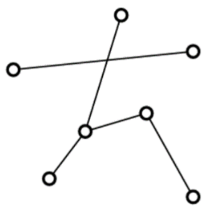
Figura 50 – Exemplo de duas pontes a serem cortadas do exercício 3.17



Fonte: Canguru de Matemática 2017 - Nível B

Exercício 3.18. (Canguru de Matemática 2014 - Nível J) Carina quer adicionar alguns segmentos na figura à direita, de modo que cada um dos sete pontos tenha o mesmo número de ligações com os demais. Pelo menos quantos segmentos ela deve traçar?

Figura 51 – Figura de Carina do exercício 3.18



Fonte: Canguru de Matemática 2014 - Nível J

Solução: Há sete vértices o o maior grau encontrado dentre eles é igual a 3. Se tentassemos construir arestas de tal forma que os outros vértices tivessem também grau 3, segundo o Teorema 1.5, a soma dos graus dos vértice deve ser par, logo $3 \times 7 = 21$, isto é, é impossível construir um grafo com sete vértices com cada um de grau 3. Porém, se adicionarmos arestas de tal forma que cada um dos sete vértices possua grau 4, conseguiremos resolver o problema. Nesse caso temos $4 \times 7 = 2m \rightarrow m = 14$, 14 arestas. Como já está presente no grafo inicial 5 arestas, então basta adicionar $14 - 5 = 9$ no grafo. Abaixo está representado o grafo construído com as 9 arestas incluídas.

Figura 52 – Figura de Carina com as 9 arestas incluídas

Fonte: Canguru de Matemática 2014 - Nível J

Exercício 3.19. (Quebra Cabeças da Matemática - OBMEP) Marcos trabalha em uma empresa onde há um alarme de segurança que deve ser ativado pelo último funcionário a ir embora. Após ativado o alarme, o funcionário deve atravessar, uma única vez, cada uma das portas para trancá-las. Com esse alarme, não é possível trancar uma porta sem antes atravessá-la. Uma vez trancada, cada porta só pode ser aberta no dia seguinte. É possível Marcos fazer um percurso para trancar todas as portas e sair da empresa?

Figura 53 – Planta da empresa em que Marcos trabalha

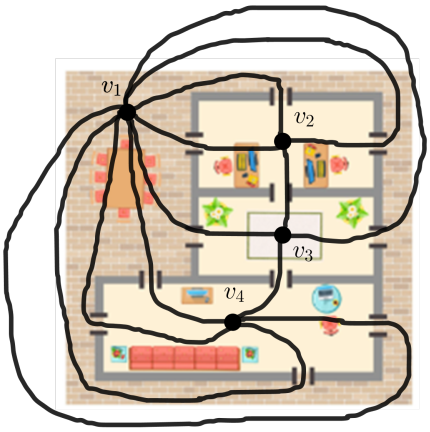
Fonte: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=194

Solução: Considerando o grafo dual da planta baixa da empresa, como mostrado na figura abaixo, obtemos um grafo de 4 vértices em que apenas dois deles possuem grau ímpar, a saber v_1 e v_4. Isso significa que é possível traçar uma trilha semieuleriana de forma a satisfazer os desejos de Marcos no percurso. Basta iniciar a trilha do cômodo representado pelo vértice v_4 e teminar na área externa representado por v_1.

Exercício 3.20. (OBI 2020 - Inic. Nível Júnior - Fase Local) Wanderley recebeu um desafio de seu pai. Ele ganhou um quebra-cabeças composto de dez bolinhas ligadas por alguns fios, cuja figura é mostrada abaixo.

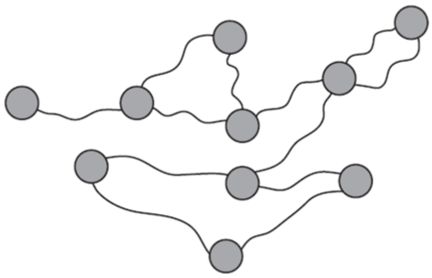
Como pode ser visto, não é possível separar o quebra-cabeças em duas partes sem romper os fios. O desafio de Wanderley é cortar apenas um dos fios e conseguir separar o quebra-cabeças em duas partes.

Figura 54 – Grafo dual da planta da empresa em que Marcos trabalha



Fonte:Autor

Figura 55 – Quebra-cabeças de Wanderley



Fonte: OBI 2020 - Inic. Nível Júnior - Fase Local

a) Quantos fios diferentes Wanderley pode escolher para cortar de forma a cumprir o desafio?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

b) Se Wanderley escolher separar o quebra-cabeças de forma que o número de bolinhas de uma das partes resultantes tenha o maior número de bolinhas possível, quantas bolinhas tem a parte do quebra-cabeças com o maior número de bolinhas após o fio ser cortado?

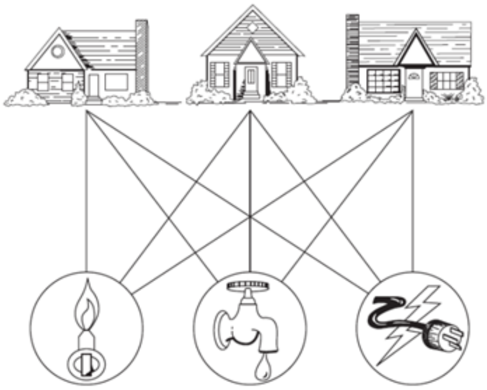
A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Solução letra (a): Percebemos que no grafo existem apenas 3 pontes, ou arestas de corte, então existem 3 formas diferentes de romper fios do quebra-cabeças separando-o em duas partes.

Solução letra (b): Escolhendo a ponte incidente no único vértice de grau 1 conseguimos obter uma componente conexa com 9 vértices, ou 9 bolinhas.

Exercício 3.21. É possível conectar cada serviço (gás, água e eletricidade) a cada uma das três casas sem haver cruzamento de tubulações?

Figura 56 – Conexões dos serviçoes a três casa



(JURKIEWICZ, 2009)

Solução: O grafo representado acima é o $K_{3,3}$ e vimos no Teorema 1.37 que ele é não-planar. Então é impossível fazer as conexões com essa restrição.

4 Sequências Didáticas

Neste capítulo, apresentamos as duas sequências didáticas desenvolvidas através de aulas expositivas na turma do 7º ano. Em cada uma das próximas seções, descrevemos essas sequências. Apesar de serem metodologicamente iguais, decidimos dividir em duas sequências didáticas devido ao surto de COVID-19 que houve na escola entre esses dois momentos. Também devido ao período pandêmico, a aplicação da avaliação da primeira sequência didática foi realizada de forma online por meio de formulário, mantendo o distanciamente exigido pelo governo estadual para evitar mais contaminações da doença.

4.1 Primeira sequência didática

- TEMAS:
    1. Conceito e estrutura de um grafo;
    2. Vértices e arestas de um grafo;
    3. Graus dos vértices de um grafo;
    4. Relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vétices de um grafo;
    5. Grafos conexos e não-conexos.
- PÚBLICO ALVO: Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.
- DURAÇÃO: 4 aulas com duração de 50 minutos cada.
- COMPONENTE CURRICULAR: Matemática.
- UNIDADE TEMÁTICA: Teoria dos Grafos.
- OBJETIVO GERAL: Estabelecer uma noção geral do que é um grafo e sua estrutura, bem como as suas diversas aplicações em nosso cotidiano e em outras ciências, e da contagem de seus elementos como vértices e arestas.
- OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
    1. Apresentar a noção do que é um grafo e a sua estrutura;
    2. Mostrar exemplos das aplicações dos grafos em nosso cotidiano e em outras ciências;
    3. Definir e idenficar os elementos como vértices, arestas e grau dos vértices de um grafo;

4. Estabelecer uma relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vértices de um grafo sem e com o auxílio da fórmula;
5. Perceber a importância da organização da estrutura de um grafo para identificar a conexidade entre os vértices;
6. Resolver diversos problemas contextualizados ou não sobre os conteúdos.

- DESENVOLVIMENTO: As duas primeiras aulas são constituídas por aulas expositivas com explicações feitas pelo professor e com a forte participação da turma. A terceira aula será destinada à resolução de exercícios (olímpicos ou não) sobre os assuntos comentados nas duas aulas anteriores. E a última aula será destinada para a aplicação de uma avaliação somativa.
- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Aula expositiva dialogada ministradas presencialmente.
- RECURSOS DIDÁTICOS:
  1. Quadro branco;
  2. Slides;
  3. Fichas de problemas e exercícios.
- AVALIAÇÃO: Ao final do processo das 3 primeiras aulas expositivas, será aplicado um teste na quarta e última aula desta sequência, uma avaliação somativa, contendo 5 questões de múltipla escolha com duas delas sendo questões de provas de olimpíadas anteriores da OBMEP, da Canguru da Matemática ou da OBI. As notas atribuídas a essa avaliação são números inteiros de 0 a 5, cada questão valendo 1 ponto. Os resultados dessa avaliação serão apresetados no próximo capítulo deste trabalho.

4.2 Segunda sequência didática

- TEMAS:
  1. Passeios em grafos;
  2. O problema das pontes de Königsberg;
  3. Grafos eulerianos e semieulerianos;
  4. Grafos duais.
- PÚBLICO ALVO: Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.
- DURAÇÃO: 4 aulas com duração de 50 minutos cada.
- COMPONENTE CURRICULAR: Matemática.

- UNIDADE TEMÁTICA: Teoria dos Grafos.

- OBJETIVO GERAL: Compreender a propriedade de conexidade de um grafo e identificar se um grafo é euleriano ou semieuleriano.

- OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

  1. Perceber as condições para que um grafo possa ser considerado euleriano ou semieuleriano;
  2. Compreender, na história da matemática, o que levou a surgir a teoria dos grafo com o problema das Pontes de Königsberg resolvida pelo matemática Leonhard Euler;
  3. Construir grafos duais de plantas baixas ou mapas a fim de encontrar trilhas eulerianas ou semieulerianas nesse grafo;
  4. Resolver diversos problemas contextualizados ou não sobre os conteúdos.

- DESENVOLVIMENTO: Assim como na sequência anterior, as duas primeiras aulas são constituídas por aulas expositivas com explicações feitas pelo professor e com a forte participação da turma. A terceira aula será destinada á resolução de exercícios (olímpicos ou não) sobre os assuntos comentados nas duas aulas anteriores. E a última aula será destinada para a aplicação de uma avaliação somativa.

- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Aula expositiva dialogada ministradas presencialmente.

- RECURSOS DIDÁTICOS:

  1. Quadro branco;
  2. Slides;
  3. Fichas de problemas e exercícios.

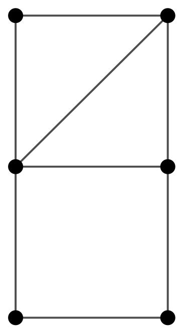
- AVALIAÇÃO: Ao final do processo das 3 primeiras aulas expositivas, será aplicado um teste na quarta e última aula desta sequência, uma avaliação somativa, contendo 5 questões de múltipla escolha com duas delas sendo questões de provas de olimpíadas anteriores da OBMEP, da Canguru da Matemática ou da OBI. As notas atribuídas a essa avaliação são números inteiros de 0 a 5, cada questão valendo 1 ponto. Os resultados dessa avaliação serão apresetados no próximo capítulo deste trabalho.

4.3 Fichas avaliativas

1ª FICHA AVALIATIVA

QUESTÃO 1. Determine a quantidade de arestas e a soma dos graus dos vértices, respectivamente, do grafo abaixo:
a) 6 e 12; b) 6 e 14; c) 8 e 14; d) 8 e 16; e) 9 e 18.

Figura 57 – Grafo da questão 1 - 1ª avaliação



Fonte: Autor

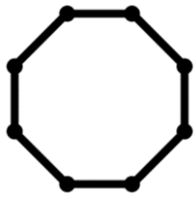
QUESTÃO 2. Em um país há 25 cidades, e sabemos que de cada cidade partem exatamente 6 estradas, sendo que cada estrada conecta duas cidades distintas. Quantas estradas existem no total nesse país?
a) 50 estradas;
b) 60 estradas;
c) 75 estradas;
d) 100 estradas;
c) 150 estradas.

QUESTÃO 3. No ano 3000 será possível viajar entre os "planetas"usados as seguintes rotas (todas de ida e volta): Terra–Mercúrio; Plutão–Vênus; Terra–Plutão; Júpiter–Marte; Plutão–Mercúrio; Mercúrio–Vênus; Vênus-Netuno; Urano–Netuno; Netuno–Saturno; Saturno–Júpiter e Marte–Urano. Com base nisso, qual caminho podemos adotar para chegar da Terra a Marte?
a) Terra - Vênus - Mercúrio - Júpiter - Netuno - Saturno - Marte;
b) Terra - Plutão - Mercúrio - Vênus - Netuno - Urano - Marte;
c) Terra - Plutão - Mercúrio - Saturno - Vênus - Netuno - Marte;
d) Terra - Vênus - Netuno - Saturno - Júpiter - Mercúrio - Marte;
e) É impossível adotar um caminho para ir da Terra até Marte.

QUESTÃO 4. Utilizando a ideia de grafos que você aprendeu nas aulas e determine quantas diagonais tem o polígono abaixo:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

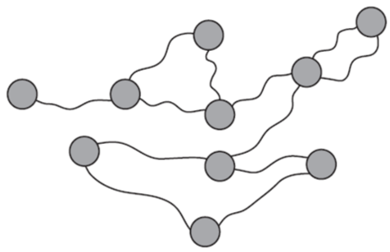
Figura 58 – Octógono regular



Fonte: Autor

QUESTÃO 5. (OBI 2020 - Inic. Nível Júnior - Fase Local) Wanderley recebeu um desafio de seu pai. Ele ganhou um quebra-cabeças composto de dez bolinhas ligadas por alguns fios, cuja figura é mostrada abaixo.

Figura 59 – Quebra-cabeças de Wanderley



Fonte: OBI 2020 - Inic. Nível Júnior - Fase Local

Como pode ser visto, não é possível separar o quebra-cabeças em duas partes sem romper os fios. O desafio de Wanderley é cortar apenas um dos fios e conseguir separar o quebra-cabeças em duas partes. Quantos fios diferentes Wanderley pode escolher para cortar de forma a cumprir o desafio?

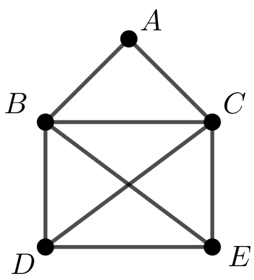
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2ª FICHA AVALIATIVA

QUESTÃO 1. Desenhe o grafo abaixo, começando em um vértice e terminando em outro, sem tirar o lápis do papel e sem passar por uma linha (aresta) duas vezes. Qual foi o vértice de início e de término, não necessariamente nessa ordem, do seu desenho?

a) A e B b) A e D c) B e C d) B e E e) D e E

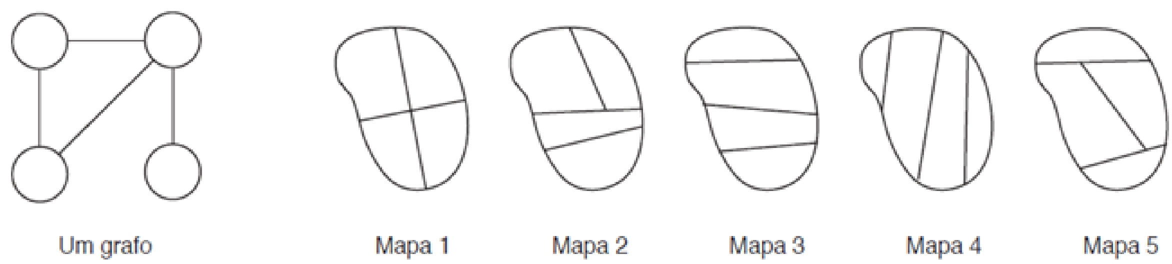
Figura 60 – Grafo da questão 1 - 2ª avaliação



fonte: Autor

QUESTÃO 2. (OBI 2015 – Iniciação Nível 1 – Fase 1) Grafos podem também ser usados para modelar as divisas entre países, usando vértices para representar os países e arestas para indicar se um determinado país tem divisa com outro país: se um país A tem divisa com outro país B ligamos os dois vértices que representam os países A e B com uma aresta. A figura abaixo mostra um grafo e cinco mapas.

Figura 61 – Grafo e mapas da questão 2



Fonte: OBI 2015 – Iniciação Nível 1 – Fase 1

Na figura, o grafo representa as divisas entre países de qual dos mapas?

(A) Mapa 1

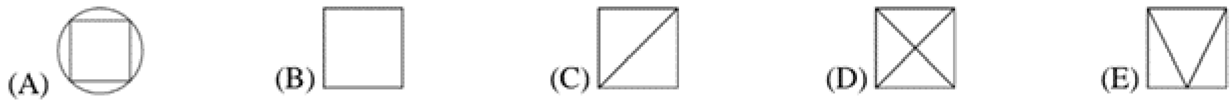
(B) Mapa 2

(C) Mapa 3

(D) Mapa 4

(E) Mapa 5

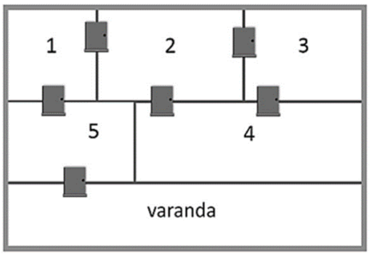
QUESTÃO 3. (Canguru de Matemática 2019 - Nível C) Qual dos desenhos a seguir não pode ser feito sem você tirar o lápis do papel e sem passar o lápis pela mesma linha mais de uma vez?



QUESTÃO 4. (Canguru de Matemática 2018 - Nível S) A figura ao lado é a planta da casa de Renata. Ela entra pela porta da frente, na varanda, e passa por cada uma das portas exatamente uma vez. Em qual dos cômodos irá ficar?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

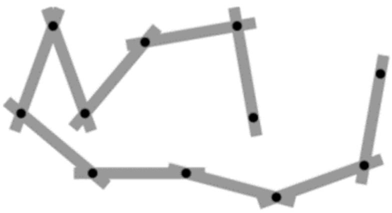
Figura 62 – Planta da casa de Renata



Fonte: Canguru de Matemática 2018 - Nível S

QUESTÃO 5. (Canguru de Matemática 2019 - Nível B) Lia brinca com o metro de carpinteiro de seu pai, com dez segmentos, mostrado na figura. Qual das formas abaixo não pode ser feita com esse metro?

Figura 63 – Metro de carpinteiro do pai de Lia



Fonte: Canguru de Matemática 2019 - Nível B

5 Resultados e discussão

Decidimos separar este capítulo em duas seções em que a primeira discorre sobre o relato de experiência e dos resultados obtidos da primeira sequência, e a segunda seção, refere-se à segunda sequência.

5.1 Relato da Primeira Sequência

Na primeira aula, quando o professor anunciou à turma sobre o conteúdo que seria abordado nas próximas semanas, a Teoria dos Grafos, os alunos acreditavam que o professor estava querendo se referir ao estudo de "gráficos", assunto esse comumente trabalhado na disciplina de Matemática e com grande presença no currículo base. É importante que essa diferenciação feita pelo professor entre "grafo"e "gráfico"seja bem clara para o aluno antes mesmo de começar os estudos de fato dessa teoria.

Na primeira sequência, dentro da introdução do conceito de grafo, foi necessário, também, enfatizar para os alunos nas aulas expositivas que os formatos das arestas na representação gráfica dos grafos não precisam ser necessariamente retas e que as arestas podem se cruzar sem formar um novo vértice nesse ponto de cruzamento entre elas. Percebemos que essa ênfase foi necessária para que os alunos compreendessem que os grafos são simplesmente conjuntos de pontos que possuem alguma (ou nenhuma) ligação dois a dois. Apesar dessa necessidade, os alunos compreenderam com facilidade essa ideia desde a primeira aula e não houve mais indagações sobre os formatos e os cruzamentos de arestas nos desenhos dos grafos que o professor apresentava. Os alunos adotaram os grafos como sendo "redes de conexões", definição essa proposta por uma das alunas e que houve concordância da turma como um todo.

A primeira aula foi para a apresentação do que é um grafo e de sua representação gráfica, com exemplos do cotidiano dos alunos e com forte presença da interdisciplinaridade utilizando a cadeia alimentar como um dos exemplos de grafos que se pode encontrar em outros componentes curriculares. A segunda aula foi voltada para a relação entre a contagem de arestas e a soma dos graus dos vértices e a conexidade.

Algumas questões da ficha avaliativa foram adaptadas de questões já existentes em alguns materiais disponíveis gratuitamente na internet, como as questões 2, 3 e 5, e outras foram elaboradas pelo próprio professor (questões 1 e 4). Percebe-se a presença de *distratores* nas questões elaboradas pelo professor. Abaixo organizamos uma tabela com o resultado da turma na primeira avaliação bem como a relação de acertos dos alunos em cada questão da avaliação.

Tabela 1

Notas	Número de alunos
0,0	0
1,0	1
2,0	0
3,0	7
4,0	6
5,0	11

Tabela 2

Questão	Número de acertos
Questão 1	20
Questão 2	24
Questão 3	21
Questão 4	12
Questão 5	24

Como podemos ver na Tabela 1, a moda da distribuição das notas dos alunos foi a nota 5,0, que é a máxima, com a média da turma sendo igual a 4,04. Devemos destacar também o fato de que apenas um aluno obteve uma nota abaixo de 3,0. Já na Tabela 2 podemos observar que a questão em que obtivemos um número maior de erros foi a questão 4, que foi elaborada pelo professor. Acreditamos que esse resultado de acertos nessa questão é devido a presença de distratores. Porém, de forma geral, concebemos como satisfeita a primeira sequência didática trabalhada com a turma.

5.2 Relato da Segunda Sequência

Na primeira aula da segunda sequência didática, o professor introduziu o tema histórico do problema das pontes de Königsberg. Os alunos, empolgados, começaram imediatamente a tentar desenhar o grafo apresentado pelo professor em seus cadernos obedecendo as restrições impostas: não podendo passar por uma aresta duas vezes e sem tirar o lápis do papel. No momento em que os alunos estavam desconfiados de que era impossível desenhar tal grafo, o professor afirmou que o segredo do problema está na paridade de cada grau do vértice. Em seguida, alguns poucos alunos já começaram a notar que, se um vértice tem grau par, é impossível iniciar o caminho a partir dele e terminar esse mesmo caminho parando nele. Então começaram a tentar partir do único vértice de grau ímpar do grafo que ilustra o problema das pontes. O professor encontrou nessa discussão uma ótima oportunidade para iniciar o novo conteúdo.

Na terceira aula, o professor utilizou-se do Exercício 3.19 do problema do funcionário

Marcos em trancar as portas com alarmes de uma empresa e podendo destrancá-las no dia seguinte. Esse problema foi muito interessante de ser trabalhado em sala visto que, depois que o professor mostrou a solução com utilizando-se do grafo dual, os alunos começaram a criar hipóteses como por exemplo: "Se tivesse mais uma porta entre o escritório e o lado de fora, o que acontece? é possível fazer o caminho?". Acreditamos que essa forma de aprender criando hipóteses sobre um determinado problema, e isso sendo feito pelos próprios alunos, é algo muito enriquecedor para a aprendizagem. Conforme a BNCC, é necessário que os alunos desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2018, p. 299).

Na ficha avaliativa as questões 2, 3, 4 e 5 foram retiradas de provas de olimpíadas de matemática. A única questão elaborada pelo professor nesta sequência é a questão 1. É importante ressaltar que, didaticamente, na elaboração de problemas sobre trilhas eulerianas ou semieulerians, não é interessante que a distribuição da nomeação dos vértices do grafo dê dica(s) sobre a(s) trilha(s) a ser(em) formada(s), e percebemos que o professor se atentou a esse detalhe. Assim como feito no relato da primeira sequência, a seguir, serão apresentadas as tabelas com os resultados obtidos pelos alunos na realização da ficha avaliativa.

Tabela 3

Notas	Número de alunos
0,0	0
1,0	3
2,0	6
3,0	3
4,0	7
5,0	6

Tabela 4

Questão	**Número de acertos**
Questão 1	20
Questão 2	12
Questão 3	22
Questão 4	14
Questão 5	14

Como podemos notar na Tabela 3, houve uma maior distribuição das notas obtidas pelos alunos com a média da turma igual a 3,28. Acreditamos que esse resultado, comparado com o resultado da sequência anterior, não se tornou muito satisfatório quanto, pois o tema desta sequência didática é um pouco mais complexo do que o tema da primeira sequência. Percebemos também, por meio da Tabela 4, que os grafos duais e problemas nos quais os grafos não estão desenhados explicitamente são assuntos que precisam ser trabalhados mais vezes com os alunos, talvez até uma retomada, e com mais cuidados a fim de sanar essas dificuldades.

6 Considerações finais

Como foi pesquisado, mostrado e discutido ao longo de todo este trabalho, a Teoria dos Grafos está cada vez mais presente nas salas de aulas do Ensino Básico, e, especificamente, nos anos finais do Ensino Fundamental, tanto na disciplina de Matemática e em suas competições olímpicas, quanto em outros componentes curriculares. As aplicações das sequências didáticas se mostraram positivas quanto ao alcance dos objetivos pretendidos por elas, e, por observação, pode-se perceber uma aceitação dos alunos pela abordagem desse tema em sala de aula, isto é, é possível abordar esse conteúdo nesse nível de ensino, o Fundamental. Esse conteúdo, atualmente, não faz parte do currículo nacional. Porém acreditamos que aos poucos ele será introduzido no documento curricular nacional nos próximos anos.

A Teoria dos Grafos é uma teoria que pode ser agradável e necessária durante a formação básica dos alunos, se mostrando um conteúdo que consegue facilmente interagir com outras disciplinas e/ou com outros conteúdos da Matemática. Mostra-se também como um boa proposta para dar mais sentido a matemática vista no Ensino Básico, visto que está fortemente presente no cotidiano dos alunos. Os benefícios da Teoria dos Grafos no ensino do professor e na aprendizagem do aluno são diversos.

Muitos outros temas da Teoria dos Grafos não abordados neste trabalho, como Emparelhamento, Coloração de Arestas, Algoritmos Gulosos e Grafos Hamiltonianos são também importantes de serem incluídos nos anos finais do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio. Por exemplo, já esteve presente uma questão olímpica sobre Caminho Mínimo em um grafo no nível básico (do 4º a 6º ano do Fundamental) na Olimpíada Internacional de Matemática Sem Fronteiras (OIMSF) do ano de 2019 e também a presença de Grafos Hamiltonianos em um dos problemas do Banco de Questões da OBMEP do ano de 2014. Muitos trabalhos realizados por professores voltados para esses temas podem ser encontrados em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). É recomendado a leitura desses trabalhos para professores que gostariam de se informar ou se aprofundar mais sobre o assunto.

Acreditamos que a pesquisa desenvolvida neste trabalho serve como motivação para trabalhos futuros, como a criação de um banco de questões sobre grafos com separações por temas da Teoria dos Grafos e por nível de dificuldade em que o professor pode acessar e preparar seu próprio material para trabalhar em sala de aula. Assim como também a criação de um material teórico didático sobre definições, teoremas, aplicações e exercícios para alunos do Ensino Básico. Acreditamos que, com essa contribuição, podemos preparar os professores e os alunos para uma melhor e agradável inclusão desse conteúdo em um futuro não distante.

Referências

BOAVENTURA, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. [S.l.]: Editora Blucher, 2012. 9

BONDY, J. A. *Graph Theory With Appication*. Ontario, Canada: University of Waterloo, 1997. 13

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Ministério da Educação. Brasília, 2018. 10, 32, 33, 37, 38, 39, 40, 67

CORDIOLLI, J. G. *A relação entre disciplinas em sala de aula: a interdisciplinaridade, a transdisciplinaridade e a multidisciplinaridade*. [S.l.]: A casa de Astérion, 2002. 37

FAZENDA, I. C. A. *Interdisciplinaridade: qual o sentido?* [S.l.]: Editora Paulus, 2003. 37

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atla, 2002. 35

JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução*. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>, 2009. 13, 19, 25, 26, 56

LEMOS, M. *Interação entre grafos e matróides*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2003. 13

RANGEL, S. *Teoria dos Grafos. Notas de Aula*. [S.l.]: IBILCE, Unesp, 2002–2013. 20, 21, 25, 26, 28

SANTOS, J. P. O. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007. 13