



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Conjunto de Julia

por

Hosana Maria de Lima Ribeiro

2014



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Conjunto de Julia [†]

por

Hosana Maria de Lima Ribeiro

sob orientação da

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014

Recife - PE

[†] O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Conjunto de Julia

por

Hosana Maria de Lima Ribeiro

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva -UFRPE (Orientadora)

Prof. Dr. Airton Temistocles Gonçalves de Castro - UFPE

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva - UFRPE

Profa. Dra. Maité Kulesza - UFRPE

Agosto/2014

Dedicatória

*Aos meus pais, Maria do Carmo e
José Clementino; e ao meu esposo,
Gustavo Ribeiro.*

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À minha orientadora, professora Bárbara Costa, pelo apoio, orientação, disponibilidade, dedicação e contribuição durante a elaboração deste trabalho. As inúmeras reuniões para discussão das demonstrações foram imprescindíveis. À professora Bárbara, o meu mais profundo reconhecimento.

Aos professores que compuseram a banca examinadora e em especial ao professor Airton Temistocles G. de Castro que acompanhou minha trajetória acadêmica desde a graduação na UFPE e sempre me incentivou.

Ao professor Antonio Carlos Rodrigues Monteiro, da UFPE, pelo incentivo dado desde a graduação.

Aos professores do PROFMAT-UFRPE.

Aos meus pais e irmãos, que sempre acreditaram em mim.

Ao meu esposo pelo apoio, compreensão e carinho.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos algumas definições do conjunto de Julia de uma função polinomial complexa de grau maior que ou igual a 2 e demonstramos a equivalência entre elas. Além disto, algumas propriedades topológicas são estudadas. Abordamos a família \mathcal{F} das funções quadráticas em \mathbb{C} dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa e definimos o conjunto de Mandelbrot como o conjunto dos parâmetros c tais que o conjunto de Julia $J(f_c)$ é conexo. Mostramos que esta definição é equivalente à órbita do ponto crítico de f_c ser limitada. Definimos o conjunto de Julia preenchido de f_c , cuja fronteira é igual a $J(f_c)$ e utilizamos os softwares MatLab e GeoGebra para visualizar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido de f_c e do conjunto de Mandelbrot.

Palavras-chave: conjunto de Julia, conjunto de Mandelbrot, iteração de função complexa.

Abstract

At this dissertation, we present some definitions of Julia set of a complex polynomial function of degree greater than or equal to 2 and demonstrate the equivalence between them. In addition, some topological properties are studied. We approached the family \mathcal{F} of quadratic functions on \mathbb{C} given by $f_c(z) = z^2 + c$, where c is a complex constant and define Mandelbrot set as the set of parameters c such that Julia set $J(f_c)$ is connected. We show this definition is equivalent to the orbit of the critical point of f_c to be limited. We define filled Julia set of f_c , whose border is equal to $J(f_c)$ and use MatLab and GeoGebra softwares to view an approximate figure of filled Julia set of f_c and Mandelbrot set.

Keywords: Julia set, Mandelbrot set, iteration of complex function.

Sumário

Introdução	1
1 Conjunto de Julia: definição e métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada	3
1.1 Sistemas dinâmicos complexos	4
1.2 Conjunto de Julia: definição e exemplo	12
1.3 Conjunto de Mandelbrot	14
1.4 Métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido e do conjunto de Mandelbrot	18
1.4.1 Códigos do Matlab	20
1.4.2 Utilizando o GeoGebra para plotar o conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia preenchido de f_c	33
2 Algumas propriedades topológicas do conjunto de Julia	43
2.1 Propriedades topológicas	43
2.2 Funções quadráticas e o conjunto de Mandelbrot	61
A Variáveis complexas	78
A.1 Limites de sequências	78
A.2 Algumas noções da topologia de \mathbb{C}	79
A.3 Função, limite e continuidade	82

A.3.1	Função complexa de uma variável complexa	82
A.3.2	Imagem inversa	83
A.3.3	Limites de funções	83
A.3.4	Função contínua	84
A.4	Função analítica	85
A.5	Conjugação topológica	88
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Figuras

1.1	Iteração de $z_0 = 0,9 + 0,1i$ e $w_0 = 0,6 + 0,8i$	6
1.2	Iteração de $p_0 = 1,35 + 0,31i$	7
1.3	Análise gráfica da órbita de $z_0 \in \mathbb{R}$ pela função $f(z) = z^2$	8
1.4	Análise gráfica da órbita de $z_0 \in \mathbb{R}$ pela função $f(z) = z^2$	9
1.5	K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 20$ iterações.	22
1.6	K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 100$ iterações.	22
1.7	Conjunto de Mandelbrot, $q = 20$ iterações.	24
1.8	Conjunto de Mandelbrot, $q = 100$ iterações.	25
1.9	K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 150$ iterações.	29
1.10	Ampliação da figura 1.9.	29
1.11	Ampliação da figura 1.10.	30
1.12	Conjunto de Mandelbrot, $q = 150$ iterações.	32
1.13	Ampliação da figura 1.12.	32
1.14	Menu “Exibir” do GeoGebra.	33
1.15	Pincel horizontal.	35
1.16	Planilha do GeoGebra.	36
1.17	Conjunto de Mandelbrot no GeoGebra	37
1.18	Listas no GeoGebra	38
1.19	Conjunto de Mandelbrot no GeoGebra, n°2	39
1.20	Ampliação do conjunto de Mandelbrot no GeoGebra	40

1.21	K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e 99 iterações no GeoGebra	41
1.22	K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e 99 iterações no GeoGebra, n° 2 . . .	42
1.23	Conjuntos de Julia preenchido para diferentes valores de c e a posição de c em relação ao conjunto de Mandelbrot.	42
2.1	Figura de oito $f_c^{-1}(C)$	72
2.2	Iterados inversos de um círculo C por f_c , com $c = -0,3 + 0,3i$. Fonte [4]	75
2.3	Iterados inversos de um círculo C por f_c , com $c = -0,9 + 0,5i$. Fonte [4]	76

Introdução

O conjunto de Julia surgiu com o estudo de iteração de funções complexas. O matemático francês Gaston Maurice Julia (1893-1978) publicou sua obra prima “Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles” em 1918 no “Journal de mathématiques pures et appliquées”, onde introduziu o conceito do conjunto que atualmente conhecemos por conjunto de Julia. A obra o tornou famoso entre os matemáticos da época, sendo Gaston Julia um dos precursores da moderna teoria dos sistemas dinâmicos complexos.

Simultaneamente aos trabalhos de Gaston Julia e de forma independente, o matemático e astrônomo francês Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) desenvolveu vários trabalhos na área de iteração de funções complexas. Em sua homenagem, o complementar do conjunto de Julia, no plano complexo, é denominado conjunto de Fatou.

Os trabalhos dos matemáticos Julia e Fatou foram relativamente esquecidos até as descobertas do matemático Benoit B. Mandelbrot (1924-2010) no final dos anos setenta. Ele utilizou computadores gráficos para visualizar conjuntos de Julia que possuem formas fractais. Em 1980, ao estudar os conjuntos de Julia de funções da forma $f_c = z^2 + c$, denominou de Conjunto de Mandelbrot o conjunto dos parâmetros c tais que o conjunto de Julia de f_c é conexo.

No primeiro capítulo definiremos o conjunto de Julia de uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$ como a fronteira da bacia de atração de um ponto fixo

atrator de f . Para isto, apresentaremos alguns conceitos de sistemas dinâmicos complexos. Definiremos também o conjunto de Julia preenchido, cuja fronteira é igual ao conjunto de Julia. Abordaremos a família \mathcal{F} das funções quadráticas da forma $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa e definiremos o conjunto de Mandelbrot. Na última seção, os softwares MatLab e GeoGebra serão utilizados para visualizar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido e do conjunto de Mandelbrot.

No segundo capítulo apresentaremos outra definição para o conjunto de Julia de uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$ e estudaremos algumas propriedades topológicas. Mostraremos a equivalência entre as definições adotadas. Na última seção nosso estudo será voltado às funções quadráticas e mostraremos que a definição do conjunto de Mandelbrot, apresentada no capítulo 1, é equivalente à órbita do ponto crítico de f_c ser limitada.

O leitor não familiarizado com alguns tópicos de Variáveis Complexas pode consultar o apêndice, o qual fornece definições e resultados sobre: limites de sequências; algumas noções da topologia de \mathbb{C} ; função, limite e continuidade; função analítica e conjugação topológica.

Capítulo 1

Conjunto de Julia: definição e métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos de sistemas dinâmicos complexos e definiremos o conjunto de Julia de uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$ como a fronteira da bacia de atração de um ponto fixo atrator de f . Definiremos também o conjunto de Julia preenchido, cuja fronteira é igual ao conjunto de Julia. Abordaremos a família \mathcal{F} das funções quadráticas da forma $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa e definimos o conjunto de Mandelbrot. Na última seção, apresentamos métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido e do conjunto de Mandelbrot, utilizando os softwares MatLab e GeoGebra.

1.1 Sistemas dinâmicos complexos

Definição 1.1 *Um sistema dinâmico consiste de um conjunto X de estados possíveis, juntamente com uma regra que descreve como o sistema evolui ao longo do tempo. Quando o tempo assume valores naturais ou inteiros, o sistema dinâmico é dito discreto. Quando o tempo assume valores reais, o sistema dinâmico é dito contínuo.*

Estudaremos sistemas onde a regra que o descreve é uma função $f : X \rightarrow X$.

Nesta dissertação, denotaremos o conjunto dos números naturais por \mathbb{N} e o conjunto dos números naturais não nulos por $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dado um conjunto X e uma função $f : X \rightarrow X$, a **k -ésima iterada de f** é definida por

$$\begin{aligned}f^0(x) &= x, \\f^k(x) &= f(f^{k-1}(x)), \text{ para } k \geq 1.\end{aligned}$$

Em um **sistema dinâmico discreto**, denotemos o tempo por k e o sistema é especificado pelas equações

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \\x(k+1) &= f(x(k)).\end{aligned}$$

Usando a notação $x(k) = x_k$ e a definição de iterada de uma função f podemos escrever

$$\begin{aligned}x_0 &= f^0(x_0), \\x_{k+1} &= f(x_k).\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 x_0 &= f^0(x_0) \\
 x_1 &= f(x_0) \\
 x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
 x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^3(x_0) \\
 &\vdots \\
 x_k &= f(x_{k-1}) = f(f^{k-1}(x_0)) = f^k(x_0)
 \end{aligned}$$

Definição 1.2 *Sejam a função $f : X \rightarrow X$ e $x_0 \in \mathbb{C}$. A órbita de x_0 por f é a sequência de pontos $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots, x_k = f^k(x_0), \dots$*

Definição 1.3 *Sejam a função $f : X \rightarrow X$ e $x_0 \in \mathbb{C}$. A órbita de x_0 por f é **limitada** se existe $M > 0$ tal que $|f^k(x_0)| \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Abordaremos sistemas dinâmicos discretos onde f é uma função complexa de uma variável complexa. Especificamente, função polinomial de grau $n \geq 2$ com coeficientes complexos, ou seja, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Estamos interessados no comportamento da órbita de pontos $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.1 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. Vamos observar geometricamente a órbita de pontos pertencentes a três regiões disjuntas que dividem o plano complexo. Sejam*

$$R_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}, R_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \quad \text{e} \quad R_3 = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}.$$

Vamos determinar os cinco primeiros elementos da órbita de $z_0 = 0,9 + 0,1i \in R_1$,

visualizá-los no plano complexo (figura 1.1) e calcular o módulo de cada um deles.

$$z_0 = 0,9 + 0,1i$$

$$z_1 = f(z_0) = 0,8 + 0,18i$$

$$z_2 = f^2(x_0) = 0,6076 + 0,288i$$

$$z_3 = f^3(x_0) = 0,28623376 + 0,3499776i$$

$$z_4 = f^4(x_0) = -0,0405545551380224 + 0,200350808727552i$$

$$|z_0| \cong 0,91 > |z_1| = 0,82 > |z_2| \cong 0,67 > |z_3| \cong 0,45 > |z_4| \cong 0,20$$

Observe que a cada iteração da função f obtemos um número complexo com módulo menor que o anterior.

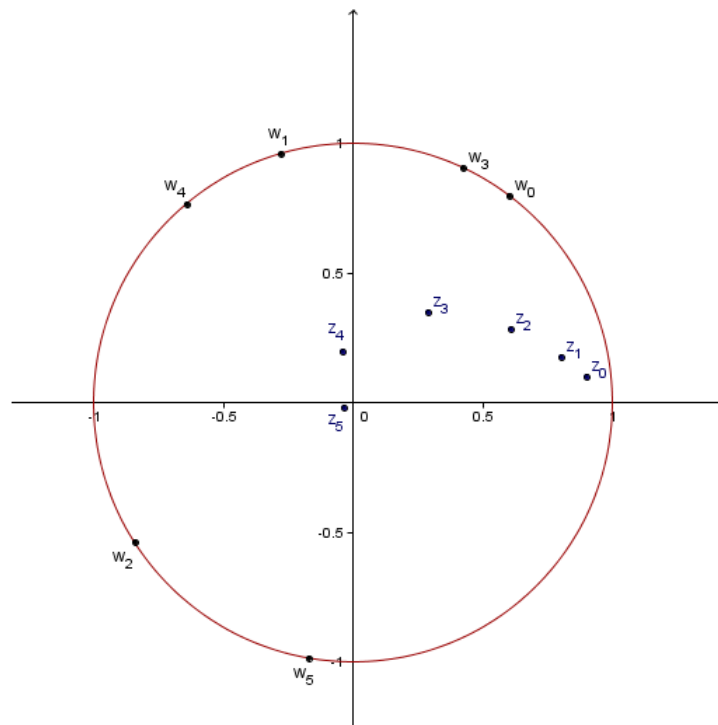


Figura 1.1: Iteração de $z_0 = 0,9 + 0,1i$ e $w_0 = 0,6 + 0,8i$.

Na figura 1.1 também podemos visualizar os seis primeiros elementos da órbita

de $w_0 = 0,6 + 0,8i \in R_2$ e na figura 1.2, os quatro primeiros elementos da órbita do ponto $p_0 = 1,35 + 0,31i \in R_3$.

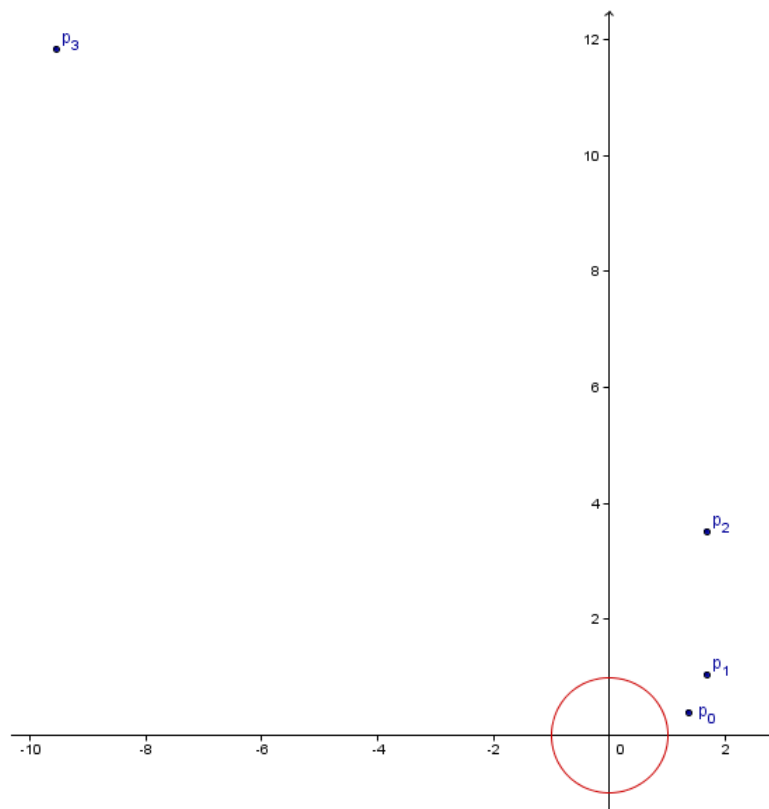


Figura 1.2: Iteração de $p_0 = 1,35 + 0,31i$.

Note que a escolha das regiões não foi arbitrária. Podemos provar que pontos pertencentes ao interior da circunferência de centro na origem e raio 1 possuem órbitas cuja sequência de pontos converge para a origem. Por outro lado, pontos sobre a circunferência originam sequências que permanecem sobre a circunferência e pontos no exterior originam sequências que tendem ao infinito. De fato, como $f^k(z) = z^{2^k}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z^{2^k}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z|^{2^k}$, analisando o comportamento limite da órbita de pontos do plano complexo pertencentes a R_1 , R_2 e R_3 , obtemos:

Se $|z| < 1$, então $|(f^k)(z)| = |z|^{2^k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Se $|z| = 1$, então $|(f^k)(z)| = 1$ para todo k .

Se $|z| > 1$, então $|(f^k)(z)| = |z|^{2^k} \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Se restringirmos nossa atenção para pontos reais, ou seja, $z_0 \in \mathbb{R}$ e observarmos as iteradas $f^k(z_0)$, podemos analisar o comportamento da órbita através de um procedimento geométrico denominado *análise gráfica*.

Inicialmente devemos fazer em um mesmo plano cartesiano o gráfico de f e da função identidade $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(z) = z$ (figura 1.3). A partir do ponto $(z_0, 0)$ tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo das ordenadas intersectando o gráfico de f no ponto $(z_0, f(z_0))$. Com origem neste ponto, tracemos um segmento de reta paralelo ao eixo das abscissas até intersectar a reta $g(z) = z$ no ponto $(f(z_0), f(z_0))$. E a partir deste ponto tracemos uma reta paralela ao eixo das ordenadas até intersectar o gráfico de f no ponto $(f(z_0), f^2(z_0))$. Continuando este procedimento obtemos uma sequência de pontos sobre o gráfico de f

$$(z_0, f(z_0)), (f(z_0), f^2(z_0)), (f^2(z_0), f^3(z_0)), (f^3(z_0), f^4(z_0)), \dots$$

cuja projeção sobre o eixo das abscissas nos fornece elementos da órbita de z_0 .

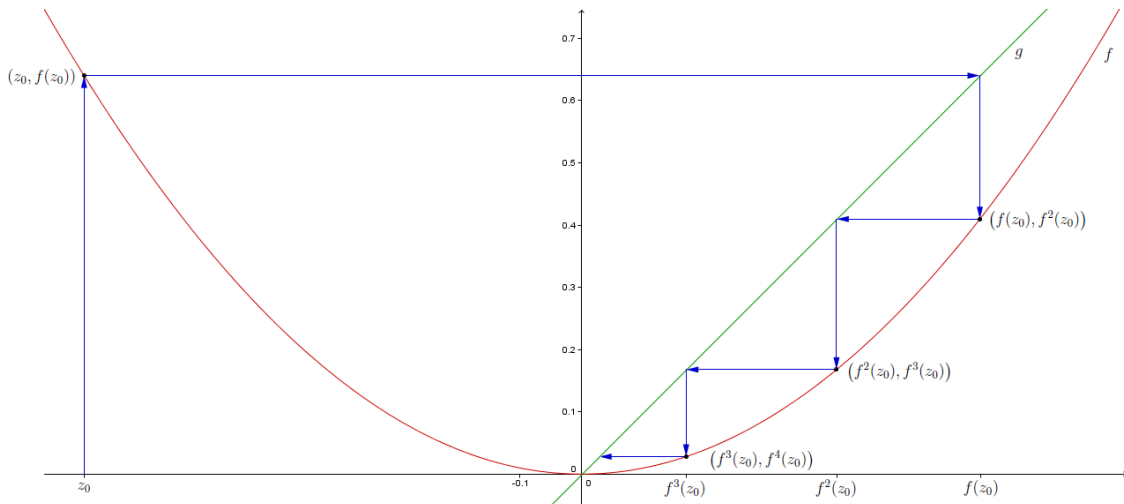


Figura 1.3: Análise gráfica da órbita de $z_0 \in \mathbb{R}$ pela função $f(z) = z^2$.

Na figura 1.3 podemos ver os quatro primeiros elementos da órbita de $z_0 = 0,8$. Observe que as figuras 1.3 e 1.4 nos ajudam a descrever o comportamento da órbita de pontos reais pela função $f(z) = z^2$. A órbita de pontos z_0 com $|z_0| < 1$ converge para a origem, enquanto a órbita de pontos com $|z_0| > 1$ escapa para o infinito. Os pontos 0 e 1 possuem órbitas constantes. Note que eles satisfazem $f(z) = z$.

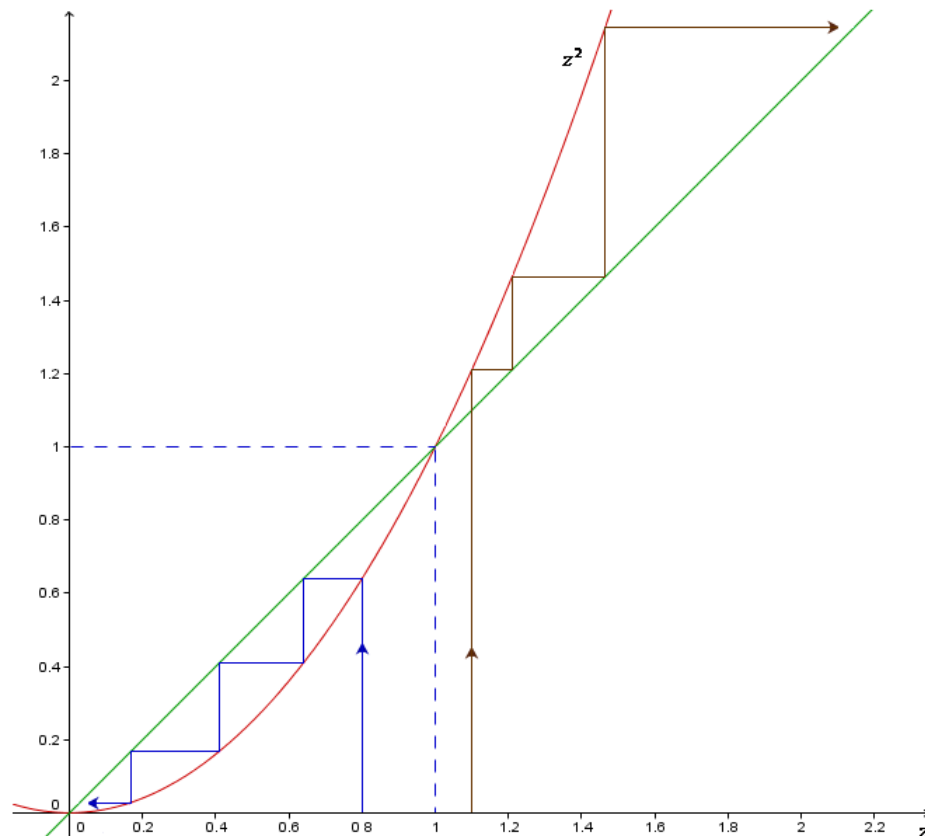


Figura 1.4: Análise gráfica da órbita de $z_0 \in \mathbb{R}$ pela função $f(z) = z^2$.

Definição 1.4 *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e f uma função polinomial complexa. Dizemos que*

- a) *z é um ponto de fixo de f se $f(z) = z$.*
- b) *z é um ponto periódico de f se existir um inteiro $p \geq 1$ tal que $f^p(z) = z$. O menor inteiro positivo p tal que $f^p(z) = z$ é chamado o período de z .*

Definição 1.5 *Sejam z um ponto periódico de f de período p e $\lambda = (f^p)'(z)$.*

O ponto z é denominado

<i>superatrator</i>	<i>se</i>	$\lambda = 0$;
<i>atrator</i>	<i>se</i>	$0 \leq \lambda < 1$;
<i>indiferente</i>	<i>se</i>	$ \lambda = 1$;
<i>repulsor</i>	<i>se</i>	$ \lambda > 1$.

Considerando a função do Exemplo 1.1, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, os pontos fixos finitos podem ser determinados resolvendo a equação $z^2 = z$, o que nos dá $z = 0$ e $z = 1$. De $f'(z) = 2z$, segue que $|f'(0)| = 0$ e $|f'(1)| = 2 > 1$. Logo, $z = 0$ é um ponto fixo atrator e $z = 1$ é um ponto fixo repulsor de f .

Como vimos no Exemplo 1.1, os pontos pertencentes ao interior da circunferência de centro na origem e raio 1 possuem órbitas cuja sequência de pontos converge para a origem. Podemos interpretar esta região como sendo uma bacia de atração com ponto atrator $z = 0$. Por outro lado, pontos no exterior da circunferência de centro na origem e raio 1 originam sequências que tendem ao infinito, sendo esta região a bacia de atração do infinito.

O infinito é também um ponto fixo de $f(z) = z^2$, e definimos $\lambda = \frac{1}{f'(\infty)} = 0$. Logo, o infinito é um ponto fixo atrator de f .

Definição 1.6 *Seja w um ponto fixo atrator de f . A **bacia de atração** de w , denotada por $A_f(w)$, é o conjunto de todos os pontos cujas órbitas tendem à w , ou seja, $A_f(w) = \{z \in \mathbb{C}; f^k(z) \rightarrow w \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$. A bacia de atração do infinito, $A_f(\infty)$, é definida do mesmo modo.*

Para a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, temos $A_f(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$.

O teorema seguinte será útil para mostrar que a bacia de tração é um conjunto aberto.

Teorema 1.1 (do ponto fixo atrator) *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e w um ponto fixo atrator da função $f : A \rightarrow A$. Então existe uma bola aberta de centro em w e raio δ na qual a seguinte condição é satisfeita: se $z \in B_\delta(w) \cap A$, então $f^k(z) \in B_\delta(w) \cap A$ e $f^k(z) \rightarrow w$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Como $|f'(w)| < 1$, tome $r = \frac{1 + |f'(w)|}{2}$. Desta forma, $|f'(w)| < r < 1$. Por definição, $f'(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$. Portanto,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - w| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| - |f'(w)| \leq \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon \text{ logo, } \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| < \varepsilon + |f'(w)|.$$

Tome $\varepsilon = r - |f'(w)| > 0$. Com isto,

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| < r \text{ para todo } z \in A \setminus \{w\} \text{ com } |z - w| < \delta.$$

Consequentemente, para $z \in A$ com $|z - w| < \delta$, temos

$$|f(z) - w| \leq r|z - w| < r\delta, \text{ onde } 0 < r < 1. \quad (1.1)$$

Isto significa que $f(z)$ está mais próximo de w do que z . Portanto, $f(z) \in B_\delta(w) \cap A$.

Observe que $f^2(z) = f(f(z))$, com $f(z) \in B_\delta(w) \cap A$. Aplicando a desigualdade 1.1 duas vezes, obtemos

$$|f^2(z) - w| = |f(f(z)) - w| \leq r|f(z) - w| \leq r.r|z - w| < r^2.\delta, \text{ onde } 0 < r < 1.$$

Logo, $f^2(z) \in B_\delta(w) \cap A$.

Por indução em k , para $z \in A$ com $|z - w| < \delta$, temos $|f^k(z) - w| < r^k \cdot \delta$, onde $0 < r < 1$. Portanto, $f^k(z) \in B_\delta(w) \cap A$. Quando $k \rightarrow \infty$, $r^k \rightarrow 0$ e consequentemente, $f^k(z) \rightarrow w$. ■

Teorema 1.2 (do ponto fixo repulsor) *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e w um ponto fixo repulsor da função $f : A \rightarrow A$. Então existe uma bola aberta de centro em w e raio δ na qual a seguinte condição é satisfeita: se $z \in B_\delta(w) \cap A$ e $z \neq w$, então existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^n(z) \notin B_\delta(w) \cap A$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração: Análoga a do teorema anterior. ■

Proposição 1.1 $A_f(w)$ é um conjunto aberto.

Demonstração: Como w é um ponto fixo atrator de f , pelo Teorema 1.1, existe um conjunto aberto V contendo w tal que $V \subset A_f(w)$ (se $w = \infty$, podemos tomar $\{z; |z| > r\}$, para r suficientemente grande). Isto implica que $A_f(w)$ é aberto. Com efeito, se $z \in A_f(w)$, então $f^k(z) \in V$ para algum k , logo $z \in f^{-k}(V)$, o qual é aberto. ■

1.2 Conjunto de Julia: definição e exemplo

Existem formas equivalentes de definir o conjunto de Julia de uma função f . Nesta seção definiremos o conjunto de Julia utilizando o conceito de bacia de atração. No capítulo 2 veremos outra definição e demonstraremos a equivalência entre elas.

Definição 1.7 *Sejam f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$ e w um ponto fixo atrator de f . O **conjunto de Julia** de f , denotado por $J(f)$, é a fronteira da bacia de atração de w . O complementar do conjunto de Julia é denominado **conjunto de Fatou**, $F(f)$.*

Para a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$, vimos que $A_f(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$. Portanto, $\partial A_f(0) = \partial A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Logo, o conjunto de Julia de f é a circunferência de centro em 0 e raio 1 e o conjunto de Fatou de f é a união disjunta entre o interior e o exterior desta circunferência.

Ainda considerando o Exemplo 1.1, observe que os pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| \leq 1$ possuem órbitas limitadas, também denominadas prisioneiras e os pontos tais que $|z| > 1$ possuem órbitas ilimitadas, ou seja, órbitas que escapam para o infinito. Desta forma, temos a seguinte definição:

Definição 1.8 *Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. O conjunto prisioneiro e o conjunto de escape para a função f são definidos, respectivamente, por*

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}, \text{ e}$$

$$E(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Observe que \mathbb{C} é a união disjunta entre $K(f)$ e $E(f)$. Isto nos leva a uma dicotomia: o plano complexo é dividido em dois subconjuntos cuja interseção é vazia.

Note que o conjunto $E(f) = A_f(\infty)$ e no Exemplo 1.1, $\text{Int}(K(f)) = A_f(0)$.

Na última seção deste capítulo utilizaremos métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada do conjunto definido a seguir.

Definição 1.9 *Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. O conjunto de Julia preenchido da função f é definido por*

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |f^k(z)| \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Observação 1.1 *Como $J(f) = \partial A_f(\infty) = \partial E(f) = \partial K(f)$, segue que o conjunto de Julia de f é a fronteira do conjunto de Julia preenchido.*

Afirmção 1.1 *O conjunto de Julia e o conjunto de Julia preenchido são fechados.*

Demonstração: O conjunto de Julia é fechado por ser fronteira de um conjunto. Pela Proposição 1.1, $A_f(\infty)$ é aberto. Como $A_f(\infty) = E(f)$ e $K(f)$ são complementares, segue que o conjunto de Julia preenchido é fechado. ■

Para a função complexa $f(z) = z^2$ temos, $J(f) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ e $K(f) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$.

Note que neste exemplo o conjunto de Julia é um objeto da geometria euclidiana, não sendo, portanto, um fractal. No entanto, este é um caso especial, pois a maioria dos conjuntos de Julia é um fractal.

Afirmção 1.2 *O conjunto de Julia é simétrico em relação à origem.*

Demonstração: Devemos mostrar que $z \in J(f)$ se, e somente se, $-z \in J(f)$. Seja $z \in \mathbb{C}$. De $f_c^k(z) = f_c^{k-1}(f_c(z)) = f_c^{k-1}(z^2 + c) = f_c^{k-1}((-z)^2 + c) = f_c^{k-1}(f_c(-z)) = f_c^k(-z)$, segue que $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ se, e somente se, $f_c^k(-z) \rightarrow \infty$. Logo, $z \in K(f_c)$ se, e somente se, $-z \in K(f_c)$. Portanto, o conjunto de Julia preenchido de f_c e consequentemente sua fronteira, $J(f)$, são simétricos em relação à origem. ■

1.3 Conjunto de Mandelbrot

Seja \mathcal{F} a família das funções quadráticas da forma $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa.

Veremos no próximo capítulo que “toda função quadrática é topologicamente conjugada a algum membro da família quadrática \mathcal{F} ” [Proposição 2.9]. Isto significa que ao estudarmos os conjuntos de Julia de f_c , com $c \in \mathbb{C}$, estudamos os conjuntos de Julia de todas as funções quadráticas.

Definição 1.10 *O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros c tais que o conjunto de Julia $J(f_c)$ é conexo, isto é*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; J(f_c) \text{ é conexo}\}.$$

A definição acima não é útil para fins computacionais. Com este objetivo vamos considerar uma definição equivalente (Teorema 2.3).

Definição 1.11 *O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é o conjunto dos parâmetros c tais que a órbita do ponto crítico de f_c é limitada.*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\}$$

Observação 1.2 *De acordo com a Afirmação 2.5, a órbita do ponto crítico ser limitada é equivalente à órbita do ponto crítico não tender ao infinito. Desta forma, temos a igualdade entre os seguintes conjuntos:*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\} = \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Os resultados seguintes serão úteis aos métodos computacionais da próxima seção.

Lema 1.1 *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa. Se $|z| \geq |c|$ e $|z| > 2$, então existe número real positivo ε tal que $|f_c^n(z)| \geq (1 + \varepsilon)^n |z|$.*

Demonstração: (Indução em n)

De $|z| > 2$, segue que existe número real positivo ε com $|z| = 2 + \varepsilon$.

Consequentemente, $|z| - 1 = 1 + \varepsilon$.

Para $n = 0$, $|f_c^0(z)| = |z| \geq (1 + \varepsilon)^0 |z|$.

Para $n = 1$, $|f_c^1(z)| = |z^2 + c|$.

Da desigualdade triangular, temos $|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |-c| = |z^2 + c| + |c|$.

Logo, $|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \varepsilon)|z|$.

Para $n = 2$, $|f_c^2(z)| = |f_c(f_c(z))|$.

De acordo com o caso anterior, $|f_c(z)| \geq (1 + \varepsilon)|z| > |z| = 2 + \varepsilon$.

Como $|z| \geq |c|$ e $|z| > 2$, segue que $|f_c(z)| \geq |c|$ e $|f_c(z)| > 2$. Portanto, podemos usar o caso anterior para o complexo $f_c(z)$.

$$|f_c^2(z)| = |f_c(f_c(z))| \geq (1 + \varepsilon)|f_c(z)| \geq (1 + \varepsilon) \cdot (1 + \varepsilon)|z| = (1 + \varepsilon)^2|z|.$$

Suponha que a afirmação é verdadeira para algum $n = k$. Ou seja, $|f_c^k(z)| \geq (1 + \varepsilon)^k|z|$.

Como $|f_c^k(z)| \geq c$ e $|f_c^k(z)| > 2$, podemos escrever

$$|f_c^{k+1}(z)| = |f_c(f_c^k(z))| \geq (1 + \varepsilon) \cdot |f_c^k(z)| \stackrel{H.I.}{\geq} (1 + \varepsilon) \cdot (1 + \varepsilon)^k|z| = (1 + \varepsilon)^{k+1}|z|.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.2 *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa. Se $|z| \geq |c|$ e $|z| > 2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \infty$ (ou seja, a órbita de z tende ao infinito).*

Demonstração: De acordo com o Lema 1.1, existe número real positivo ε tal que $|f_c^n(z)| \geq (1 + \varepsilon)^n|z|$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n = \infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n|z| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^n = \infty.$$

Portanto, a órbita de z tende ao infinito se $|z| \geq |c|$ e $|z| > 2$. ■

Corolário 1.1 *O conjunto de Julia de f_c está contido no círculo de centro 0 e raio $r_c = \max\{|c|, 2\}$.*

Demonstração: De acordo com a Definição 1.7, $J(f_c) = \partial A_f(\infty)$, onde $A_f(\infty)$ é aberto (Proposição 1.1). Logo, os pontos do plano complexo que são iterados para

o infinito não pertencem a $J(f_c)$. Desta forma, pela Proposição 1.2, o conjunto de Julia de f_c está contido no círculo de centro 0 e raio $r_c = \max\{|c|, 2\}$. ■

Corolário 1.2 *O conjunto de Julia preenchido de f_c está contido no círculo de centro 0 e raio $r_c = \max\{|c|, 2\}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.2, os pontos fora do círculo de centro 0 e raio r_c são iterados para o infinito, logo não pertencem a K_c . ■

Afirmção 1.3 *O conjunto de Julia preenchido de f_c é compacto.*

Demonstração: Pela proposição anterior, K_c é limitado e pela Afirmção 1.1, é fechado. ■

Corolário 1.3 *Sejam $z \in \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa e $r_c = \max\{|c|, 2\}$. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ for satisfeita a expressão $|f_c^n(z)| > r_c$, então a órbita de z tende para o infinito.*

Demonstração: Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_c^{n_0}(z)| > r_c$.

Como $r_c = \max\{|c|, 2\}$, segue que $r_c \geq |c|$ e $r_c \geq 2$. Portanto, $|f_c^{n_0}(z)| > |c|$ e $|f_c^{n_0}(z)| > 2$. Logo, $w = f_c^{n_0}(z)$ satisfaz as hipóteses da Proposição 1.2. Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(w)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(f_c^{n_0}(z))| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^{n+n_0}(z)| = \infty$.

Portanto, a órbita de w tende para o infinito. O mesmo acontece com a órbita de z , uma vez que a órbita de z contém a órbita de w . ■

Corolário 1.4 *O conjunto de Mandelbrot pertence ao círculo de raio 2.*

Demonstração: De acordo com a Observação 1.2,

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(0) \not\rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Tome $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| > 2$ e $z = 0$. Observe que $r_c = \max\{|c|, 2\} = |c|$.

Como $f_c(0) = 0^2 + c = c$, temos $|f_c(0)| = |c| = r_c$. Mas $f_c^2(0) = f_c(f_c(0)) = f(c) = c^2 + c$, e neste caso,

$$|f_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c^2| - |c| = |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) \stackrel{|c|>2}{>} |c| = r_c.$$

De acordo com o Corolário 1.3, a órbita de $z = 0$ tende para o infinito. ■

1.4 Métodos computacionais para visualizar uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido e do conjunto de Mandelbrot

Daremos continuidade ao estudo do conjunto de Julia das funções pertencentes a família \mathcal{F} , ou seja, funções da forma $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa.

Como veremos nesta seção, não é possível fazer uma representação gráfica do conjunto de Julia preenchido de f_c e nem do conjunto de Mandelbrot. Utilizaremos os softwares MatLab e GeoGebra para visualizar uma figura aproximada destes conjuntos.

Para plotar o conjunto de Julia preenchido de f_c utilizaremos o teste seguinte.

Teste para verificar se um ponto z pertence a K_c

Denotemos o círculo de centro 0 e raio $r_c = \max\{|c|, 2\}$ por $\overline{B_{r_c}(0)}$. De acordo com o Corolário 1.2, os pontos fora deste círculo não pertencem a K_c . Logo, precisamos apenas verificar quais pontos de $\overline{B_{r_c}(0)}$ pertencem ao conjunto de Julia preenchido. Para isto, utilizaremos o Corolário 1.3, da seguinte forma:

Escolhemos um ponto $z \in \overline{B_{r_c}(0)}$ e verificamos se para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|f_c^k(z)| > r_c$. Em caso afirmativo, a órbita de z tende para o infinito e consequentemente $z \notin K_c$.

No entanto, há um problema neste teste.

Sejam $z \in \overline{B_{r_c}(0)}$ e $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $|f_c^{k_0-1}(z)| \leq r_c$ e $|f_c^{k_0}(z)| > r_c$. Para valores grandes de k_0 não teremos como realizar as k_0 iterações para concluir que $z \notin K_c$.

Com 100 iterações por exemplo, teremos uma porcentagem de pontos classificados corretamente como não pertencentes a K_c , ou seja, pontos tais que $|f_c^{k_0-1}(z)| \leq r_c$ e $|f_c^{k_0}(z)| > r_c$, para algum $k_0 \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. No entanto, se após as 100 iterações $|f_c^k(z)| \leq r_c$ para todo $k \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, não teremos certeza se $z \in K_c$, pois pode ocorrer de $|f_c^{100+j}(z)| > r_c$ para algum $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quanto maior o número de iterações, maior será a porcentagem de pontos classificados corretamente. Para obter um resultado com todos os pontos classificados corretamente teríamos que realizar infinitas iterações, o que é computacionalmente impossível. Desta forma, teremos apenas uma figura aproximada do conjunto de Julia preenchido.

Teste para verificar se um ponto c pertence a \mathcal{M}

Denotemos o círculo de centro 0 e raio 2 por $\overline{B_2(0)}$. De acordo com o Corolário 1.4, os pontos fora deste círculo não pertencem a \mathcal{M} . Logo, precisamos apenas verificar quais pontos de $\overline{B_2(0)}$ pertencem ao conjunto de Mandelbrot. Para isto, utilizaremos o Corolário 1.3, da seguinte forma:

Escolhemos um ponto $c \in \overline{B_2(0)}$ e verificamos se para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|f_c^k(0)| > 2$. Em caso afirmativo, a órbita de 0 tende para o infinito e conseqüentemente $c \notin \mathcal{M}$.

O teste acima apresenta o mesmo problema descrito no teste anterior.

1.4.1 Códigos do Matlab

Códigos utilizando os comandos for e if para plotar o conjunto de Julia preenchido de f_c

Inicialmente devemos definir:

- O valor da constante c .
- A quantidade q de iterações a serem realizadas.
- O intervalo da parte real, o intervalo da parte imaginária e o comprimento d das subdivisões desses intervalos. Por exemplo, $x = -2 : d : 2$ significa que serão considerados os seguintes valores de x : $-2, -2 + d, -2 + d + d = -2 + 2d, -2 + 3d, \dots, 2 - d, 2$. O número d deve ser escolhido de modo que o intervalo $[-2, 2]$ tenha uma quantidade inteira de subintervalos de comprimento d .
- Uma cor para os pontos pertencentes a K_c e outra para os pontos que não pertencem.

Conjunto de Julia preenchido de f_c , onde $c = 0,27334 - 0,00742i$

A figura 1.5 foi gerada através do código seguinte substituindo $q = 100$ iterações por 20. Uma melhor aproximação do conjunto de Julia preenchido é obtida com 100 iterações (figura 1.6). No entanto, o computador levará mais tempo para gerar a figura. O computador pode travar dependendo do número de iterações e da sua capacidade de processamento e memória.

```
hold on
q=100;
d=0.005;
c=0.27334-0.00742*i;
r=max(abs(c),2);
for x=-2:d:2;
    for y=-2:d:2;
        z=x+y*i;
        w=z;
        if abs(w)>r
            plot(x,y,'b.')
        else
            for cont=1:q
                w=w^2+c;
                if abs(w)>r
                    plot(x,y,'b.')
                    break;
                end
            end
        end
        if abs(w)<=r
            plot(x,y,'r.')
        end
    end
end
hold off
axis equal;
```

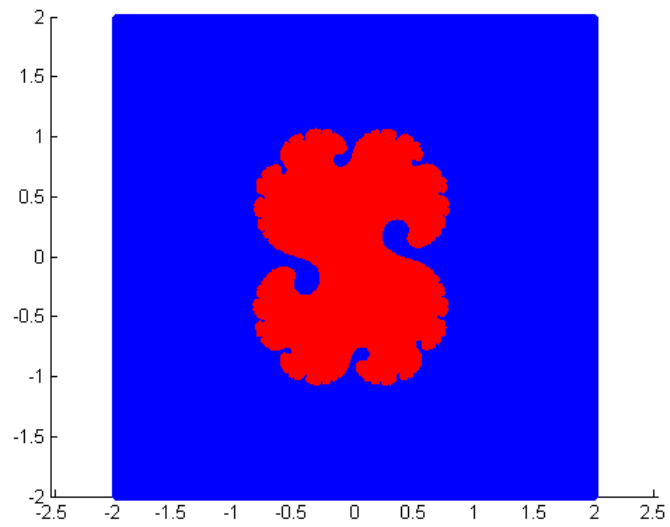



Figura 1.5: K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 20$ iterações.

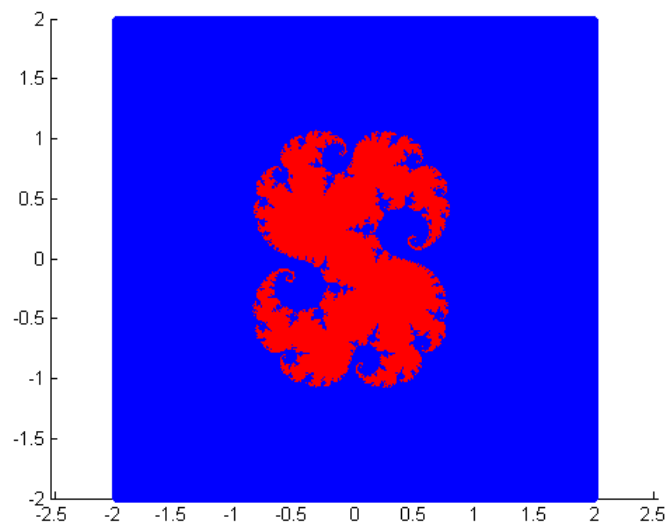


Figura 1.6: K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 100$ iterações.

Códigos utilizando os comandos `for` e `if` para plotar o conjunto de Mandelbrot

Inicialmente devemos definir:

- A quantidade q de iterações a serem realizadas.
- O intervalo da parte real, o intervalo da parte imaginária e o comprimento d das subdivisões desses intervalos. Por exemplo, $x = -2 : d : 2$ significa que serão considerados os seguintes valores de x : $-2, -2 + d, -2 + d + d = -2 + 2d, -2 + 3d, \dots, 2 - d, 2$. O número d deve ser escolhido de modo que o intervalo $[-2, 2]$ tenha uma quantidade inteira de subintervalos de comprimento d .
- Uma cor para os pontos pertencentes a M e outra para os pontos que não pertencem.

A figura 1.7 foi gerada através do código seguinte substituindo $q = 100$ iterações por 20. Uma melhor aproximação do conjunto de Mandelbrot é obtida com 100 iterações (figura 1.8).

```
hold on
q=100;
d=0.005;
z=0;
for x=-2:d:2;
    for y=-2:d:2;
        c=x+y*i;
        w=z;
        if abs(w)>2
            plot(x,y,'b.')
```

```
else
    for cont=1:q
        w=w^2+c;
        if abs(w)>2
            plot(x,y,'b. ')
            break;
        end
    end
end
end
if abs(w)<=2
    plot(x,y,'r. ')
end
end
end
hold off
axis equal;
```

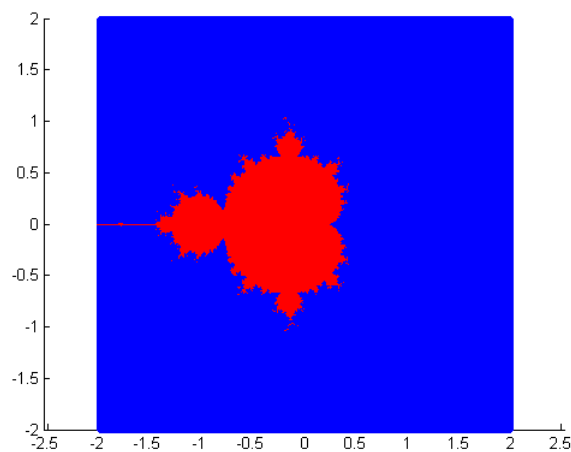


Figura 1.7: Conjunto de Mandelbrot, $q = 20$ iterações.

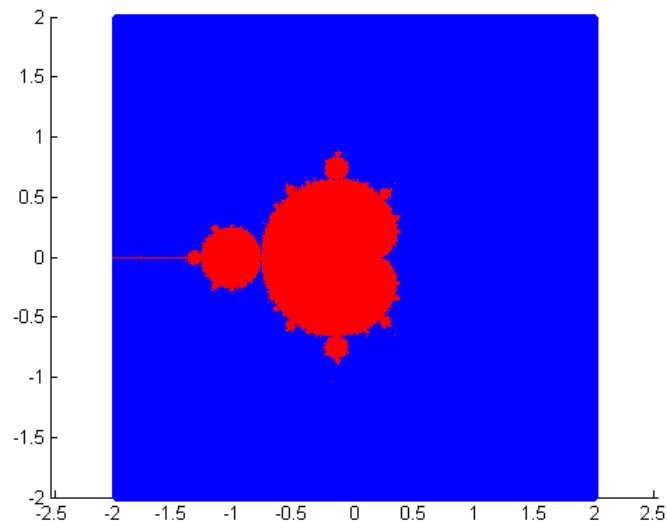


Figura 1.8: Conjunto de Mandelbrot, $q = 100$ iterações.

Códigos utilizando os comandos `for`, `while` e `if` para plotar o conjunto de Julia preenchido de f_c e o conjunto de Mandelbrot

As figuras obtidas com os códigos abaixo são muito parecidas com as figuras geradas pelos códigos anteriores com $q = 100$ iterações.

Conjunto de Julia preenchido de f_c , onde $c = 0,27334 - 0,00742i$

```
hold on
q=100;
d=0.005;
c=0.27334-0.00742*i;
r=max(abs(c),2);
for x=-2:d:2;
    for y=-2:d:2;
        z=x+i*y;
        w=z;
```

```
    cont=0;
    while (cont<q) & (abs(w)<=r)
        cont=cont+1;
        w=w^2+c;
    end
    if (cont==q) & (abs(w)<=r)
        plot(x,y,'r.')
    else
        plot(x,y,'b.')
    end
end
end
hold off
```

Conjunto de Mandelbrot

```
hold on
q=100;
d=0.005;
z=0;
for x=-2:d:2;
    for y=-2:d:2;
        c=x+i*y;
        w=z;
        cont=0;
        while (cont<q) & (abs(w)<=2)
            cont=cont+1;
            w=w^2+c;
```

```
        end
        if (cont==q) & (abs(w)<=2)
            plot(x,y,'r.')
        else
            plot(x,y,'b.')
        end
    end
end
end
hold off
```

Códigos utilizando comandos mais avançados para gerar o conjunto de Julia preenchido e o conjunto de Mandelbrot

Os códigos seguintes além de mais eficientes são mais rápidos em relação aos códigos anteriores.

Conjunto de Julia preenchido de f_c , onde $c = 0,27334 - 0,00742i$

As cores na figura 1.9 são obtidas através do número mínimo de iterações para a órbita de z tender para o infinito. Ampliações desta figura podem ser visualizadas nas figuras 1.10 e 1.11.

```
c = 0.27334 - 0.00742*i;
q = 150;
v = 1000;
r = max(abs(c), 2);
d = linspace(-r, r, v);

A = ones(v, 1)*d + i*(ones(v, 1)*d)';
```

```
W=A;
M = zeros(v,v);

[linhas,colunas] = size(A);

    for a = 1:linhas
        for b = 1:colunas
            for s = 1:q
                if(abs(A(a,b))>r)
                    break;
                else
                    M(a,b) = M(a,b)+(abs(A(a,b))<=r);
                end

                A(a,b) = A(a,b)*A(a,b)+c;
            end
        end
    end

end

s=pcolor(real(W),imag(W),M);
set(s,'edgecolor','none')
axis([-r r -r r])
set(gca,'xtick',[-2:0.5:2])
set(gca,'ytick',[-2:0.5:2])
xlabel('Re(z)')
ylabel('Im(z)')
```

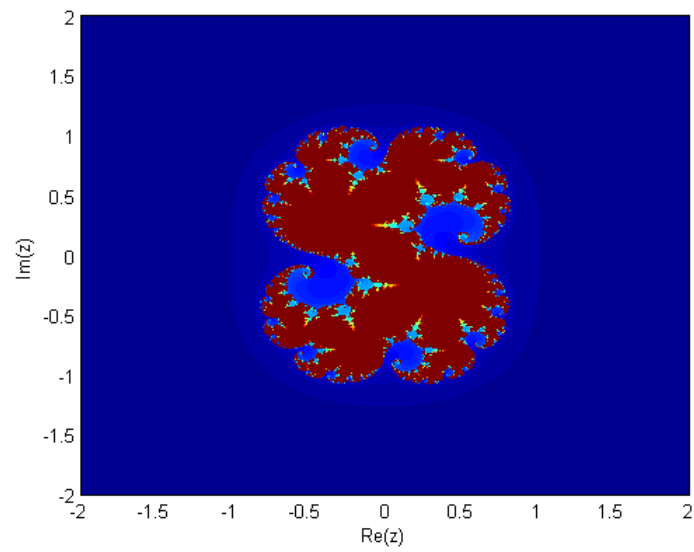


Figura 1.9: K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e $q = 150$ iterações.

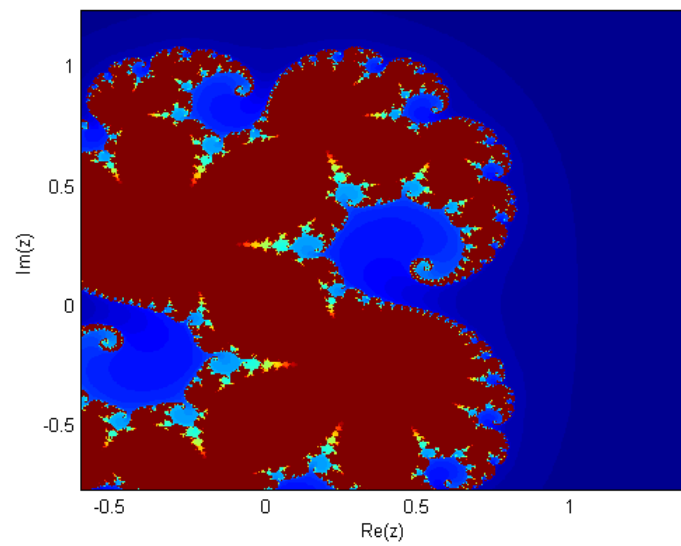


Figura 1.10: Ampliação da figura 1.9.

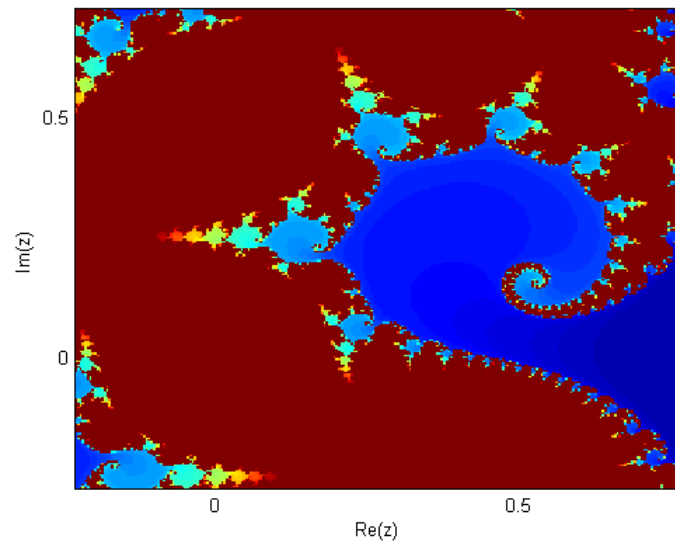


Figura 1.11: Ampliação da figura 1.10.

Conjunto de Mandelbrot

As cores na figura 1.12 são obtidas através do número mínimo de iterações para a órbita de 0 tender para o infinito.

```
q = 150;  
v = 1000;  
d = linspace(-2,2,v);  
C = ones(v,1)*d+i*(ones(v,1)*d)';  
Z = zeros(v,v);  
M = zeros(v,v);  
  
[linhas,colunas] = size(Z);  
  
for a = 1:linhas  
    for b = 1:colunas
```

```
        for s = 1:q
            if(abs(Z(a,b))>2)
                break;
            else
                M(a,b) = M(a,b)+(abs(Z(a,b))<=2);
            end
            Z(a,b) = Z(a,b)*Z(a,b)+ C(a,b);
        end
    end
end

s=pcolor(real(C), imag(C),M);

set(s,'edgecolor','none')

axis([-2 2 -2 2])
set(gca,'xtick',[-2:0.5:2])
set(gca,'ytick',[-2:0.5:2])
xlabel('Re(z)')
ylabel('Im(z)')
```

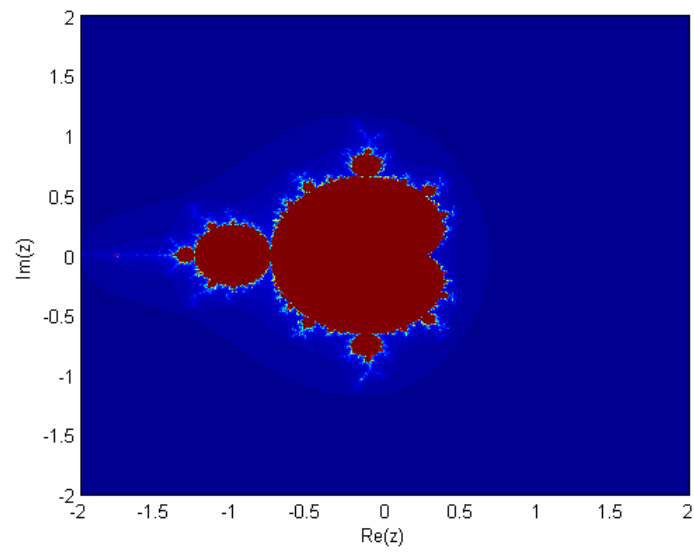


Figura 1.12: Conjunto de Mandelbrot, $q = 150$ iterações.

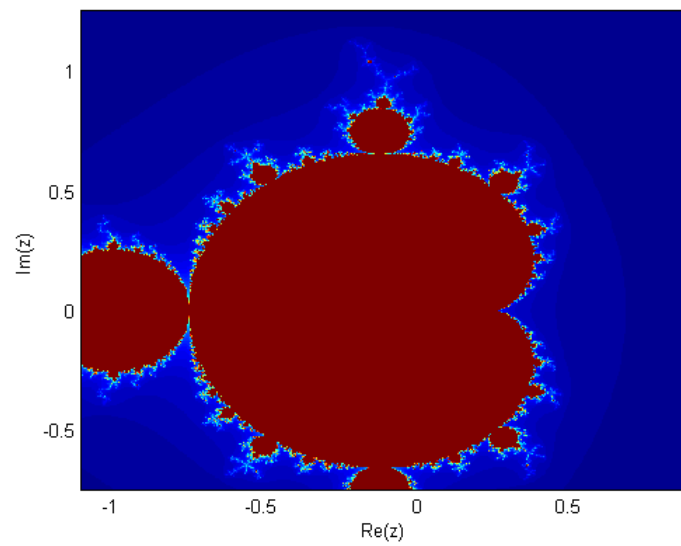


Figura 1.13: Ampliação da figura 1.12.

1.4.2 Utilizando o GeoGebra para plotar o conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia preenchido de f_c

O GeoGebra é um software de matemática que reuni Geometria, Álgebra, Cálculo, Probabilidade e Estatística. Além de ser livre é multi-plataforma, ou seja, funciona em qualquer sistema operacional. Utilizamos a versão 4.4, obtida em www.geogebra.org.

As atividades desta subseção foram adaptadas de [19] e [20].

Conjunto de Mandelbrot

Inicialmente devemos exibir a planilha de cálculo do GeoGebra. Para isto, devemos clicar no menu “Exibir” e escolher a opção “Planilha” (figura 1.14).

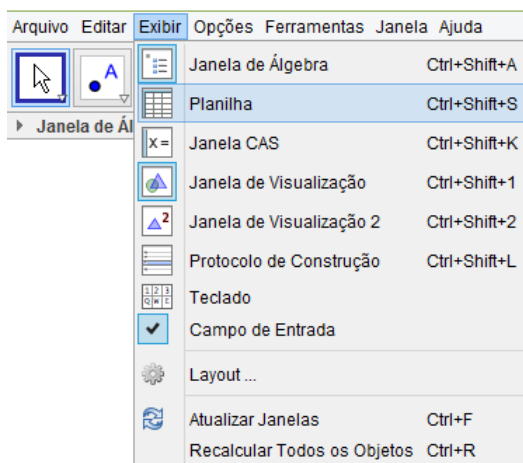


Figura 1.14: Menu “Exibir” do GeoGebra.

Ao digitar um número complexo em uma célula da planilha obtemos o ponto correspondente na janela gráfica, o qual terá rótulo de acordo com a célula. Por exemplo, o ponto referente ao número complexo da célula A1 terá rótulo A1.

Na janela gráfica, ao clicar sobre o ponto A1 é possível arrastá-lo, obtendo outro número complexo na célula A1.

Devemos digitar um número complexo na célula A1 da planilha que possa ser visualizado na janela gráfica, por exemplo $=1+i$. Este número corresponde a constante complexa c da função $f_c(z) = z^2 + c$.

Para este exemplo, determinaremos cem elementos da órbita do zero e colocaremos na coluna A, ou seja

$$\begin{aligned} A1 &= f_c(0) = 0^2 + c = c \\ A2 &= f_c^2(0) = f_c(f_c(0)) = f_c(c) = c^2 + c = (A1)^2 + A1 \\ A3 &= f_c^3(0) = f_c(f_c^2(0)) = f_c(c^2 + c) = (c^2 + c)^2 + c = (A2)^2 + A1 \\ A4 &= f_c^4(0) = f_c(f_c^3(0)) = f_c((c^2 + c)^2 + c) = [(c^2 + c)^2 + c]^2 + c = (A3)^2 + A1 \\ &\vdots \\ A100 &= f_c^{100}(0) = (A99)^2 + A1 \end{aligned}$$

Na célula A2 devemos digitar $=A1^2+A\$1$. O símbolo \$, neste caso, tem a função de fixar o valor da célula A1 para cálculos em outras células.

Podemos obter outros elementos da órbita do zero copiando o conteúdo de A2 nas células A3 até A100.

Quando o número complexo de uma célula possui parte real e parte imaginária muito grande, o GeoGebra coloca o símbolo $?+?i$.

Devemos atribuir uma cor ao ponto A1 conforme ele pertença ou não ao conjunto de Mandelbrot. Os pontos A2, A3, ..., A100 servem para nos auxiliar nesta tarefa, não sendo necessária a exibição dos mesmos, uma vez que utilizaremos apenas o módulo de A100 para concluir se A1 pertence ou não ao conjunto de Mandelbrot.

Para desabilitar a exibição dos números correspondentes às células A2 até A100 devemos selecioná-las, clicar com o botão direito do mouse sobre a seleção, escolher a opção "Propriedades", clicar na aba "Básico", retirar a seleção de "Exibir objeto" e clicar no botão "Fechar".

Usando também a opção “Propriedades” podemos clicar na aba “Básico” e habilitar a função “Exibir rastro” para o ponto A1. Além disto, podemos clicar na aba “Estilo” e mudar o “Tamanho do Ponto” para “1”.

Para atribuir uma cor ao ponto A1 devemos clicar na célula A1 com o botão direito do mouse, escolher a opção “Propriedade”, clicar na aba “Avançado” e digitar na região referente às “Cores Dinâmicas” os seguintes dados:

Vermelho: $\text{Se}[\text{abs}(A100) \leq 2, 0, 1]$
Verde: 0
Azul: 0

Com isto, se o valor absoluto do número complexo em A100 for menor ou igual a 2, então Vermelho receberá 0, se não, receberá 1. No caso da cor vermelha receber zero, o ponto A1 terá cor preta, indicando que pertence ao conjunto de Mandelbrot. Se receber 1, o ponto A1 não pertencerá a \mathcal{M} e o ponto terá cor vermelha.

Ao arrastar o ponto A1, o seu rastro pintará os pontos do plano complexo que pertencem ao conjunto de Mandelbrot de preto e os que não pertencem de vermelho.

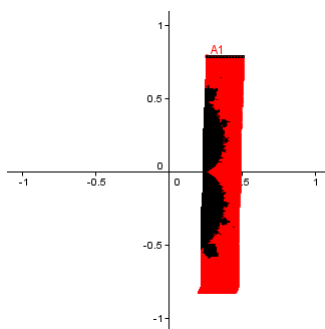


Figura 1.15: Pincel horizontal.

Para agilizar a pintura dos pontos do plano complexo vamos criar um “pincel horizontal” (figura 1.15) formado pelo ponto A1 e por pontos obtidos através de um

incremento na parte real de A1. Vamos digitar em B1, $=A1+0.01$, e seguir todo processo realizado anteriormente, obtendo os elementos B2, B3, B4,..., B100. Além disto, devemos retirar o rótulo de B1. Na célula C1 devemos digitar $=B1+0.01$ e seguir procedimento análogo até a coluna Z. Desta forma, teremos uma planilha com colunas de A a Z e 100 linhas (a figura 1.16 apresenta parte da planilha).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$1+i$	$1.01+i$	$1.02+i$	$1.03+i$	$1.04+i$	$1.05+i$	$1.06+i$	$1.07+i$	$1.08+i$	$1.09+i$	$1.1+i$	$1.11+i$	$1.12+i$	$1.13+i$
2	$1+3i$	$1.03+3...$	$1.06+3...$	$1.09+3...$	$1.12+3...$	$1.15+3.1i$	$1.18+3...$	$1.21+3...$	$1.25+3...$	$1.28+3...$	$1.31+3.2i$	$1.34+3...$	$1.37+3...$	$1.41+3...$
3	$-7+7i$	$-7.05+7...$	$-7.1+7.4...$	$-7.14+7...$	$-7.19+7...$	$-7.23+8...$	$-7.27+8...$	$-7.31+8...$	$-7.35+8...$	$-7.39+9...$	$-7.42+9...$	$-7.46+9...$	$-7.49+9...$	$-7.52+1...$
4	$1-97i$	$-1.45-1...$	$-4.07-1...$	$-6.87-1...$	$-9.84-1...$	$-13-116...$	$-16.36-...$	$-19.91-...$	$-23.67-...$	$-27.65-...$	$-31.85-...$	$-36.27-...$	$-40.93-...$	$-45.84-...$
5	$-9407-193i$	$-10161+...$	$-10946.2...$	$-11761.4...$	$-12605.0...$	$-13475.0...$	$-14369.0...$	$-15284.2...$	$-16217.2...$	$-17164.1...$	$-18120.4...$	$-19081.1...$	$-20040.3...$	$-20991.5...$
6	$88454401+3631103i$	$1031595...$	$1190910...$	$1361017...$	$1539626...$	$1723451...$	$1907994...$	$2087315...$	$2253766...$	$2397692...$	$2507103...$	$2567312...$	$2560533...$	$2465450...$
7	$7810996147272264+6423740...$	$1060626...$	$1383339...$	$1728996...$	$2057496...$	$2299782...$	$2346231...$	$2032323...$	$1121643...$	$-713357...$	$-391179...$	$-904402...$	$-168274...$	$-281331...$
8	$605990163519025200000000...$	$1109758...$	$1715475...$	$2075317...$	$1265913...$	$-267734...$	$-133412...$	$-363811...$	$-791563...$	$-148096...$	$-241082...$	$-330415...$	$-330084...$	$-403394...$
9	$357153628730397000000000...$	$1163303...$	$1426098...$	$-662374...$	$-486445...$	$-161367...$	$-236986...$	$6542807...$	$5861050...$	$2162993...$	$4242799...$	$-256912...$	$-585636...$	$-263181...$
10	$112766268297678440000000...$	$1017009...$	$-158206...$	$-144437...$	$2044201...$	$2120717...$	$-239279...$	$-311543...$	$2420966...$	$4413170...$	$-184821...$	$-582356...$	$4025053...$	$6909282...$
11	$516860956956344900000000...$	$-785931...$	$1050458...$	$-121857...$	$1130110...$	$-535872...$	$-911641...$	$3638260...$	$-807515...$	$1450987...$	$-228541...$	$3235896...$	$-413673...$	$4726327...$
12	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
13	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
14	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
15	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
16	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
17	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
18	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
19	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
20	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
21	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
22	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
23	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
24	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
25	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Figura 1.16: Planilha do GeoGebra.

Pode ocorrer do GeoGebra preencher algumas células da última linha com o número zero. Neste caso, devemos localizar nessa linha a última célula com número não nulo e copiá-la para a célula seguinte. A nova célula com número não nulo deve ser copiada para a seguinte e assim por diante.

Observe que na janela gráfica aparecem os pontos A1, B1, C1,..., Z1, mas apenas A1 possui rótulo.

Agora é só clicar no ponto A1 e arrastá-lo, pintando os pontos do plano complexo (figura 1.17).

Caso alguns pontos não sejam pintados, no menu “Opções” devemos selecionar a opção “Pontos sobre a malha” e posteriormente a opção “Desabilitar”.

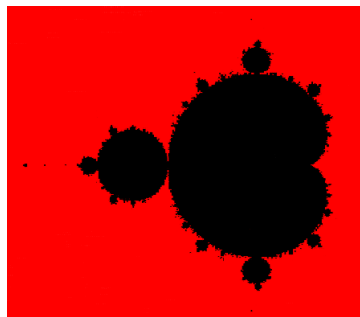


Figura 1.17: Conjunto de Mandelbrot no GeoGebra

Atribuindo cores aos pontos próximos do conjunto de Mandelbrot

Podemos atribuir cores aos pontos próximos do conjunto de Mandelbrot analisando a quantidade de iterações necessárias para obter o primeiro elemento da órbita do zero com módulo maior que 2.

Para o próximo exemplo, vamos obter 25 elementos da órbita do zero e contar quantos possuem módulo menor ou igual a 2. Se for 25, será atribuída ao ponto cor preta, indicando que pertence ao conjunto de Mandelbrot. Caso contrário, receberá cor de acordo com a quantidade de elementos que possuem módulo menor ou igual a 2. Com isto, se a quantidade for igual a 5, por exemplo, significa que após cinco iterações todos os elementos da órbita do zero possuem módulo menor ou igual a dois e que na sexta iteração obtemos um elemento com módulo maior que 2.

Vamos fazer uma planilha com 25 linhas e colunas de A a N, como no exemplo anterior, com exceção do conteúdo digitado em “Cores Dinâmicas”.

Devemos formar uma lista com os valores dos módulos de cada número complexo da coluna A. Para isto, devemos digitar na caixa de “Entrada”

Lista1={abs(A1), abs(A2), abs(A3), abs(A4), abs(A5), abs(A6), abs(A7), abs(A8), abs(A9), abs(A10), abs(A11), abs(A12), abs(A13), abs(A14), abs(A15), abs(A16), abs(A17), abs(A18), abs(A19), abs(A20), abs(A21), abs(A22), abs(A23), abs(A24), abs(A25)} e teclar *Enter*. Logo em seguida digitar também na caixa de “Entrada” $\text{ContarSe}[x \leq 2, \text{Lista1}]$. O GeoGebra irá nomear o resultado pela letra *a*.

Devemos realizar procedimento análogo com as colunas de B a N (figura 1.18).

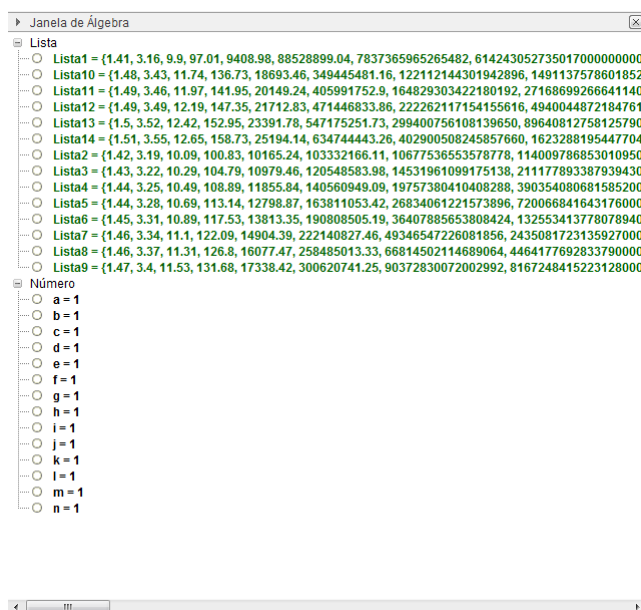


Figura 1.18: Listas no GeoGebra

Para a célula A1 vamos digitar em “Cores Dinâmicas” os seguintes dados:

Vermelho: $\text{Se}[a=25,0,e^{(a^2)}]$

Verde: $\text{Se}[a=25,0,e+e^a]$

Azul: $\text{Se}[a=25,0,e^a]$

Para as outras células da primeira linha devemos digitar em “Cores Dinâmicas” dados análogos, substituindo “a” de acordo com a coluna correspondente.

Ao clicarmos em A1 e arrastá-lo obtemos a figura 1.19.

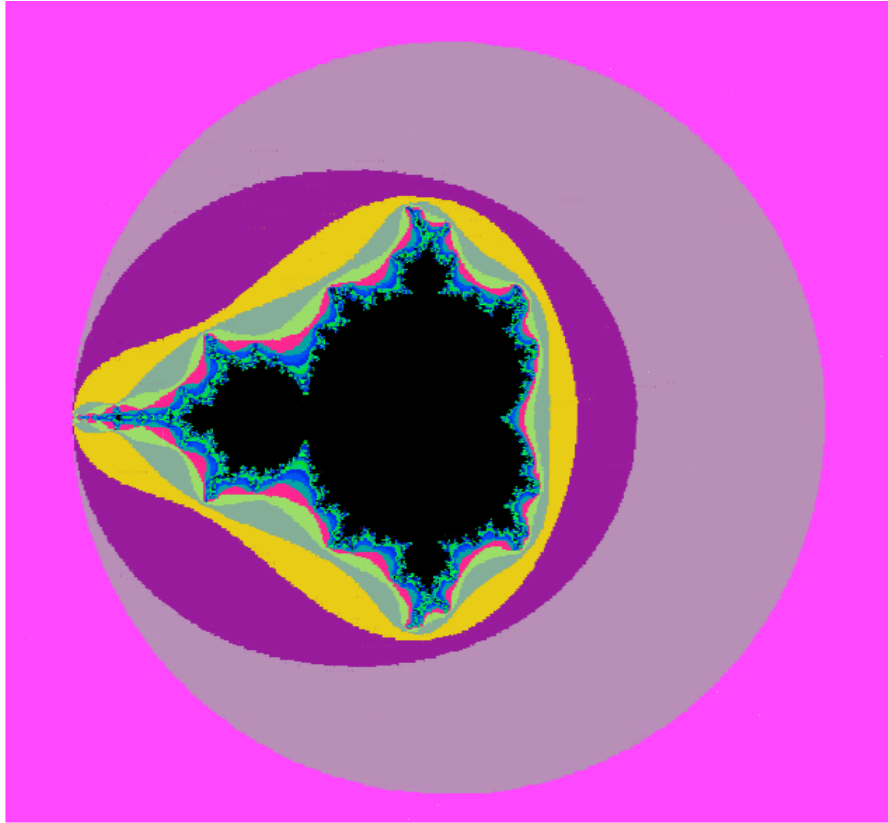


Figura 1.19: Conjunto de Mandelbrot no GeoGebra, nº2

Podemos obter uma ampliação da figura 1.19 criando um “pincel horizontal” com pontos mais próximos utilizando um incremento de 0.001 ao invés de 0.01. Em seguida, devemos ampliar a visualização dos eixos na janela gráfica de modo que os pontos do “pincel horizontal” não apresentem espaços visíveis entre eles. Na figura 1.20 temos uma ampliação de uma parte da figura anterior.

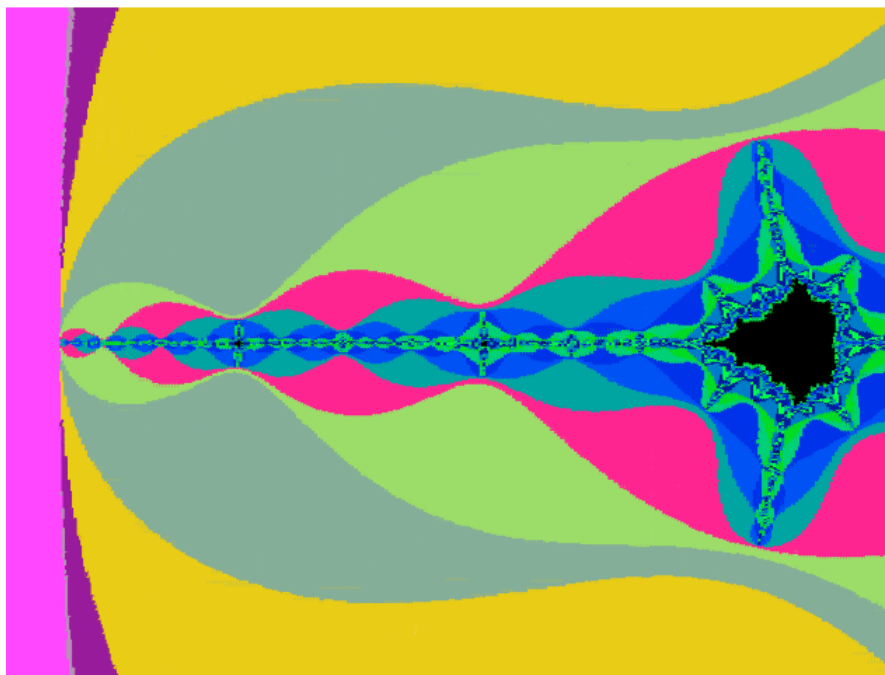


Figura 1.20: Ampliação do conjunto de Mandelbrot no GeoGebra

Conjunto de Julia preenchido de f_c

Inicialmente devemos digitar na caixa de “Entrada” a constante complexa c da função $f_c(z) = z^2 + c$. Na janela gráfica teremos o ponto c correspondente, para o qual devemos desabilitar a opção “Exibir objeto”.

Na célula A1 da planilha devemos digitar um número complexo que possa ser visualizado na janela gráfica, por exemplo $=1+i$.

Para este exemplo (figura 1.21), determinaremos os cem primeiros elementos da órbita do número complexo da célula A1 e colocaremos na coluna A, ou seja

$$A1$$

$$A2 = f_c(A1) = (A1)^2 + c$$

$$A3 = f_c^2(A1) = f_c(f_c(A1)) = f_c(A2) = (A2)^2 + c$$

$$\begin{aligned}
 A4 &= f_c^3(A1) = f_c(f_c^2(A1)) = f_c(A3) = (A3)^2 + c \\
 &\vdots \\
 A100 &= f_c^{99}(A1) = (A99)^2 + c
 \end{aligned}$$

Os procedimentos seguintes são análogos aos citados para plotar o conjunto de Mandelbrot.

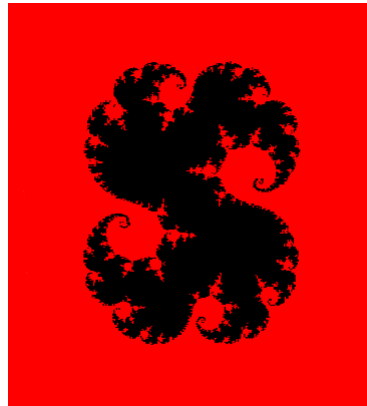


Figura 1.21: K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e 99 iterações no GeoGebra

Podemos atribuir cores aos pontos próximos do conjunto de Julia preenchido (figura 1.22).

Na figura 1.23 podemos ver, para diferentes valores de c , a localização do número complexo c em relação ao conjunto de Mandelbrot e o conjunto de Julia preenchido correspondente. Observe que para $c \in \mathcal{M}$, J_c é conexo e para $c \notin \mathcal{M}$, J_c é desconexo. Em particular, o conjunto conexo K_c , com $c = -0,122 + 0,745i$, é chamado coelho de Douady, em homenagem ao matemático francês Adrien Douady.

O software MatLab foi utilizado para gerar figuras aproximadas dos conjuntos de Julia preenchido em 1.23.

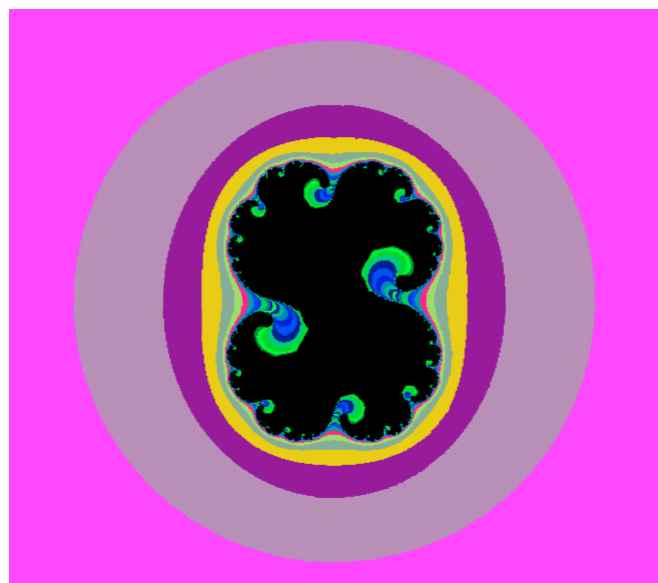


Figura 1.22: K_c , com $c = 0,27334 - 0,00742i$ e 99 iterações no GeoGebra, nº 2

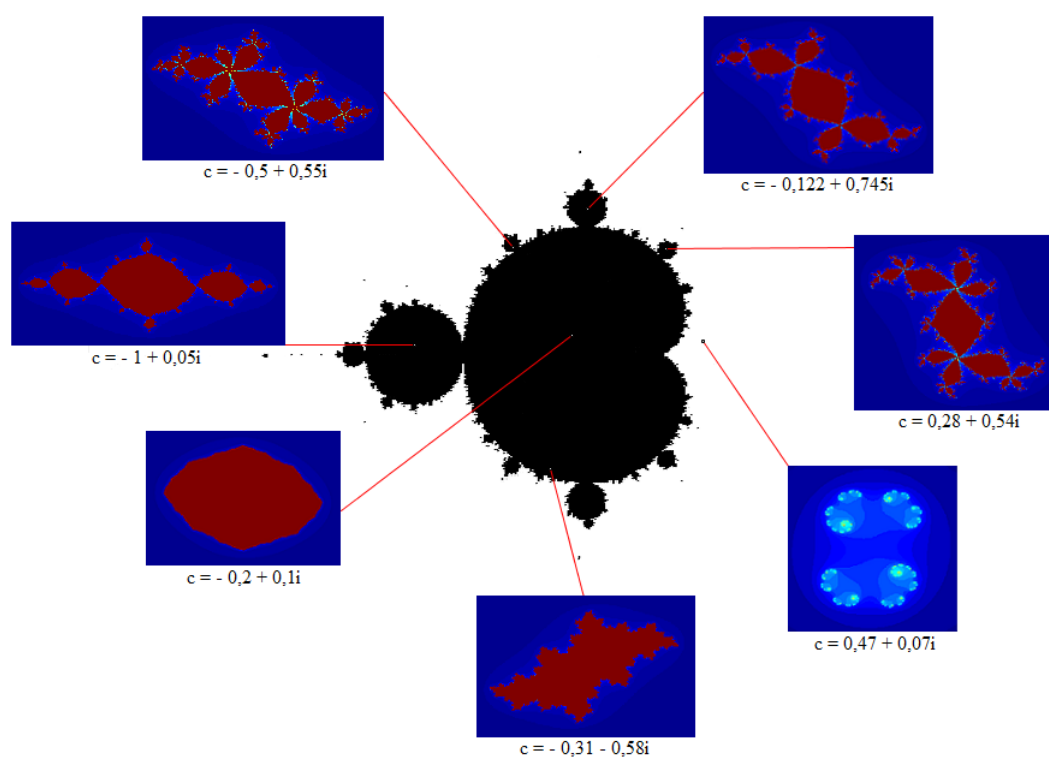


Figura 1.23: Conjuntos de Julia preenchido para diferentes valores de c e a posição de c em relação ao conjunto de Mandelbrot.

Capítulo 2

Algumas propriedades topológicas do conjunto de Julia

Apresentaremos neste capítulo outra definição para o conjunto de Julia de uma função polinomial complexa de grau maior ou igual a 2 e mostraremos a equivalência com a definição adotada no capítulo 1. Algumas propriedades topológicas serão estudadas. Na última seção nosso estudo será voltado às funções da forma $f_c(z) = z^2 + c$ e mostraremos que a Definição 1.10 do conjunto de Mandelbrot é equivalente à órbita do ponto crítico de f_c ser limitada.

A referência principal deste capítulo é o livro do matemático K. J. Falconer [4].

2.1 Propriedades topológicas

Existem formas equivalentes de definir o conjunto de Julia de uma função f . Neste capítulo adotaremos a seguinte:

Definição 2.1 *O conjunto de Julia $J(f)$ é o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de f . O complementar do conjunto de Julia é denominado conjunto de Fatou $F(f)$.*

Exemplo 2.1 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$. Logo, $f^k(z) = z^{2^k}$ e $|(f^k)'(z)| = 2^k |z|^{2^k - 1}$.*

Os pontos periódicos de f satisfazem $f^p(z) = z$, ou seja, $z^{2^p} = z$ com $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se $z = 0$, então $|(f^p)'(0)| = 2^p \cdot 0 = 0$ e $f(0) = 0$. Logo, $z = 0$ é um ponto fixo atrator, conseqüentemente não pertence ao conjunto de Julia (conforme Proposição 2.7).

Se $z \neq 0$, podemos escrever $z^{2^p - 1} = 1$, de onde segue que z é uma raiz da unidade e os pontos periódicos não nulos de f são $\left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{2^p - 1}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{2^p - 1}\right); 0 \leq k \leq 2^p - 2 \right\} = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{2^p - 1}}; 0 \leq k \leq 2^p - 2 \right\}$. Como $|z| = 1$, temos $|(f^p)'(z)| = 2^p > 1$. Logo, as $(2^p - 1)$ raízes da unidade são pontos periódicos repulsivos de f . Quando $p \rightarrow \infty$, obtemos um conjunto denso de pontos periódicos repulsivos em $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Tomando-se o fecho, temos a circunferência de centro 0 e raio 1 como conjunto de Julia de f . O complementar de $J(f)$ é o conjunto $F(f) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1 \text{ ou } |z| > 1\}$.

Para simplificar a notação, representaremos $J(f)$ por J , quando a função é clara.

Neste exemplo tem-se $f(J) = J$ e $f^{-1}(J) = J$, ou seja, $J = f(J) = f^{-1}(J)$. Veremos mais adiante que isto significa, de acordo com a Definição 2.4, que o conjunto de Julia de f é completamente invariante por f .

Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. Mostraremos que o conjunto de Julia de f possui as seguintes propriedades topológicas:

- a) $J(f)$ é um conjunto compacto;
- b) $J(f)$ é um conjunto não vazio;
- c) $J(f)$ é um conjunto completamente invariante por f ;
- d) $J(f^p) = J(f)$, para todo inteiro positivo p ;

- e) Se $z \in J(f)$, então $J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$;
- f) $J(f)$ tem interior vazio;
- g) $J(f)$ é um conjunto perfeito.

Para estabelecer as propriedades básicas dos conjuntos de Julia utilizaremos a definição de família normal de funções analíticas e o Teorema de Montel¹, abordado na teoria de funções complexas.

Nesta seção, quando não especificado, f representará uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$.

Definição 2.2 *Seja U um conjunto aberto em \mathbb{C} , e seja $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma família de funções analíticas complexas. Dizemos que a família $\{g_k\}$ é normal em U se toda sequência de funções selecionadas de $\{g_k\}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U , ou para uma função analítica limitada ou para ∞ . A família $\{g_k\}$ é normal no ponto w de U se existe algum subconjunto aberto V de U contendo w tal que $\{g_k\}$ é uma família normal em V .*

Observação 2.1 *Seja U um conjunto aberto em \mathbb{C} , e seja $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma família de funções analíticas complexas. A família $\{g_k\}$ não é normal em U se existe uma sequência de funções selecionadas de $\{g_k\}$ que não possui subsequência que converge uniformemente em todos os subconjuntos compactos de U . A família $\{g_k\}$ não é normal no ponto w de U se para todo subconjunto aberto V de U contendo w , $\{g_k\}$ não é uma família normal em V .*

¹Paul Antoine Aristide Montel (1876 – 1975), matemático francês.

Há mais de uma versão do Teorema de Montel. Utilizaremos a mais adequada para demonstrar as propriedades básicas do conjunto de Julia. A demonstração deste teorema será omitida por não fazer parte do escopo desta dissertação.

Teorema 2.1 (Teorema de Montel) *Seja $\{g_k\}$ uma família de funções analíticas complexas num domínio aberto U . Se $\{g_k\}$ não é uma família normal, então para todo $w \in \mathbb{C}$, com no máximo uma exceção, temos $g_k(z) = w$ para algum $z \in U$ e algum k .*

Demonstração: Consulte [21]. ■

Definição 2.3 *Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. Definamos*

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C}; \text{ a família } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ não é normal em } z\}. \quad (2.1)$$

Usaremos o Teorema de Montel para mostrar que $J_0(f)$ é igual ao fecho dos pontos periódicos repulsores de f , ou seja, $J_0(f) = J(f)$. Em alguns textos 2.1 é tomado como definição do conjunto de Julia.

Representaremos o complementar de $J_0(f)$ por $F_0(f)$. Observe que

$$\begin{aligned} F_0(f) &\equiv \mathbb{C} \setminus J_0(f) \\ &= \{z \in \mathbb{C}; \text{ existe um conjunto aberto } V \text{ com } z \in V \text{ e } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ normal em } z\}. \end{aligned}$$

Afirmção 2.1 *$F_0(f)$ é aberto.*

Demonstração: Seja $z \in F_0(f)$. Logo, existe $V \subset \mathbb{C}$ tal que $z \in V$ e $\{f^k\}$ é normal em V . Note que $V \subset F_0(f)$. Com efeito, seja $w \in V$. Como $\{f^k\}$ é normal em V , segue que $w \in F_0(f)$. ■

Lema 2.1 *Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, tal que para algum r , $|z| > r$ implica $|f(z)| > 2|z|$. Então $|f^k(z)| > 2^k|r|$, onde k é inteiro positivo.*

Demonstração: (Indução em k)

Por hipótese, para $k = 1$ a afirmação é verdadeira. Suponha que vale para $k = n$, ou seja, $|f^n(z)| > 2^n|z|$.

Podemos escrever $|f^{n+1}(z)| = |f(f^n(z))| \stackrel{H.I.}{>} 2 \cdot |f^n(z)| \stackrel{H.I.}{>} 2 \cdot 2^n \cdot r = 2^{n+1} \cdot r$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmação é verdadeira para todo inteiro $k \geq 1$. ■

Proposição 2.1 *Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, então $J_0(f)$ é compacto.*

Demonstração: Pela Afirmação 2.1, $\mathbb{C} \setminus J_0(f) = F_0(f)$ é um conjunto aberto, logo o seu complementar, $J_0(f)$, é um conjunto fechado.

Seja

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0.$$

Para $z \neq 0$,

$$f(z) = a_n z^n + z^n \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Tome

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{|a_n|} (|a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|) \\ &= \frac{2|a_n|}{|a_n|} + \frac{2}{|a_n|} \underbrace{(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|)}_S \\ &= 2 + \frac{2}{|a_n|} S \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{e } r = \max \left\{ s, \left(\frac{4}{|a_n|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\}.$$

Para $|z| > r$, temos $|z| > s$ e conseqüentemente

$$1 > \frac{s}{|z|} = \frac{2|a_n| + 2S}{|a_n||z|} > \frac{2S}{|a_n||z|}.$$

De onde segue

$$\frac{|a_n|}{2} > \frac{S}{|z|}. \quad (2.2)$$

Como $n \geq 2$ e $|z| > r \geq 2$, então

$$|z|^n > |z|. \quad (2.3)$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| &\leq && \text{pela desig. triang.} \\ \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{z^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_2}{z^{n-2}} \right| + \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| &< && \text{por 2.3} \\ \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_2|}{|z|} + \frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_0|}{|z|} &= && \\ \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_2| + |a_1| + |a_0|}{|z|} = \frac{S}{|z|} &< \frac{|a_n|}{2}. && \text{por 2.2} \end{aligned}$$

Utilizando o resultado anterior e a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| a_n z^n + z^n \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| \geq \\ &= |a_n||z|^n - |z|^n \underbrace{\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}_{< \frac{|a_n|}{2}} > \end{aligned}$$

$$|a_n||z|^n - |z|^n \cdot \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}|z|^n$$

Como $|z| > r \geq \left(\frac{4}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, temos $|z|^{n-1} > \frac{4}{|a_n|}$.

Multiplicando a desigualdade anterior por $|z|$,

$$|z|^n > \frac{2 \cdot 2}{|a_n|} \cdot |z|, \text{ de onde segue que } \frac{|a_n|}{2}|z|^n > 2|z|.$$

Portanto, para $|z| > r$ temos $|f(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n > 2|z|$.

Pelo lema 2.1, $|f^k(z)| > 2^k|z|$, onde k é inteiro positivo. Desta forma, $f^k(z) \rightarrow \infty$ uniformemente no conjunto aberto $V = \{z; |z| > r\}$. Portanto, f^k é normal em V . Consequentemente, $V \subset F_0(f)$. Então, pela Teoria dos Conjuntos, $(F_0(f))^c \subset V^c$, ou seja, $J_0(f) \subset \mathbb{C} \setminus V = \{z; |z| \leq r\}$. Logo, $J_0(f)$ é limitado. Como já vimos que $J_0(f)$ é fechado, segue que é compacto. ■

Lema 2.2 *Se $F_0(f) = \mathbb{C}$, então $\forall r > 0$, $\{f^k\}$ é normal em $B_r(O)$.*

Demonstração: Seja $r > 0$. $\overline{B_r(O)}$ é compacto e $F_0(f) = \mathbb{C}$, logo existe uma cobertura finita de abertos V_i com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, tal que $\{f^k\}$ é normal em V_i .

Seja $\{f^{k_j}\}$ uma sequência de funções escolhidas de $\{f^k\}$, logo possui uma subsequência $\{f^{k_{j_1}}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de V_1 . Considere em V_2 a sequência $\{f^{k_{j_1}}\}$. Por hipótese, esta sequência possui uma subsequência $\{f^{k_{j_1,2}}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de V_2 . Considere, em V_3 , a sequência $\{f^{k_{j_1,2}}\}$ que, por hipótese, possui uma subsequência $\{f^{k_{j_1,2,3}}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de V_3 . Continuando o processo até V_m , teremos a subsequência $\{f^{k_{j_1,2,3,\dots,m}}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de V_m .

Seja K um subconjunto compacto de $B_r(O)$. Então $K_i = K \cap V_i$ é compacto em V_i .

Como $\{f^{k_{j_1,2,3,\dots,m}}\} \subset \{f^{k_{j_1,2,3,\dots,m-1}}\} \subset \{f^{k_{j_1,2,3,\dots,m-2}}\} \subset \dots \subset \{f^{k_{j_1,2,3}}\} \subset \{f^{k_{j_1,2}}\} \subset \{f^{k_{j_1}}\} \subset \{f^{k_j}\} \subset \{f^k\}$, a subsequência $\{f^{k_{j_1,2,3,\dots,m}}\}$ converge uniformemente em $\bigcup_{i=1}^m K_i \subset K$. Portanto, $\{f^k\}$ é normal em $B_r(O)$. ■

Proposição 2.2 *Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, então $J_0(f) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponha $J_0(f) = \emptyset$. Logo, $F_0(f) = \mathbb{C}$. De acordo com o Lema 2.2, para todo $r > 0$, a família $\{f^k\}$ é normal em $B_r(O)$. Como f é uma função polinomial de grau $n \geq 2$, podemos tomar r suficientemente grande de modo que $B_r(O)$ contém um ponto z tal que $|f^k(z)| \rightarrow \infty$ (pela demonstração da Proposição 2.1).

Seja w um ponto fixo de f , ou seja, $f(w) = w$ (a existência de w é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra). Logo, $f^k(w) = w$ para todo k .

Considere $R > \max\{r, |w|\}$. Desta forma, z e w pertencem a bola aberta $B_R(O)$. Seja $K = \{z\} \cup \{w\}$ subconjunto compacto de $B_R(O)$. Quando $k \rightarrow \infty$, $f^k(z) \rightarrow \infty$ e $f^k(w) \rightarrow w$, portanto não existe subsequência de $\{f^k\}$ que convirja uniformemente para uma função analítica ou para infinito nesse compacto, contradizendo a normalidade de $\{f^k\}$ em $B_R(O)$. Logo, $J_0(f) \neq \emptyset$. ■

Definição 2.4 *Sejam $E \subset X \subset \mathbb{C}$ e uma função $g : X \rightarrow \mathbb{C}$. O conjunto E é completamente invariante por g se $g(E) = E$ e $g^{-1}(E) = E$.*

Afirmção 2.2 *Sejam $E \subset X \subset \mathbb{C}$ e uma função $g : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se g é sobrejetiva e $g^{-1}(E) = E$, então E é completamente invariante por g .*

Demonstração: Pelo item (e) da Afirmção A.1, $g(g^{-1}(E)) \subset E$. Como $g^{-1}(E) = E$, então $g(E) \subset E$.

Se $q \in E$, então pela sobrejetividade de g , existe $p \in g^{-1}(E)$ tal que $g(p) = q$. Como $g^{-1}(E) = E$, temos que existe $p \in E$ para o qual $g(p) = q$. Consequentemente, $q \in g(E)$, de onde segue $E \subset g(E)$. ■

Proposição 2.3 *Os conjuntos $J_0(f)$ e $F_0(f)$ são completamente invariantes por f .*

Demonstração: Para simplificar a notação, representaremos $J_0(f)$ por J_0 e $F_0(f)$ por F_0 .

Pela afirmação anterior, é suficiente provar que $f^{-1}(J_0) = J_0$ e $f^{-1}(F_0) = F_0$. Sendo $J_0 = \mathbb{C} \setminus F_0$, de acordo com o item (b) da Afirmação A.1 se provarmos que $f^{-1}(F_0) = F_0$, segue que $f^{-1}(J_0) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus F_0) = \mathbb{C} \setminus f^{-1}(F_0) = \mathbb{C} \setminus F_0 = J_0$. Assim, basta mostrar que $f^{-1}(F_0) = F_0$.

Seja $p \in F_0$. Logo, existe um conjunto aberto V contendo p e $\{f^k\}$ é normal em V . Seja $\{f^{k_i}\}$ uma subsequência de $\{f^k\}$. Por hipótese, $\{f^{k_i}\}$ possui uma subsequência $\{f^{k'_i+1}\}$ que é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto de V .

Como f é uma função aberta, $f(V)$ é aberto. Seja D compacto contido em $f(V)$. Pela Proposição A.6 f é uma função própria, logo $f^{-1}(D)$ é compacto em V , pela Proposição A.7. Seja $f(z) \in D$, logo $z \in f^{-1}(D)$.

Observe que $f^{k'_i}(f(z)) = f^{k'_i+1}(z)$. Como para todo z pertencente ao subconjunto compacto $f^{-1}(D)$ de V , $\{f^{k'_i+1}\}$ converge uniformemente, segue que $\{f^{k'_i}\}$ converge uniformemente em D . Com isto, $\{f^k\}$ é normal em $f(V)$. Desta forma, $f(p) \in F_0$. Logo, $f(F_0) \subset F_0$. Pelo item (d) da Afirmação A.1, $F_0 \subset f^{-1}(f(F_0)) \subset f^{-1}(F_0)$. Ou seja, $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$.

Resta mostrar que $f^{-1}(F_0) \subset F_0$.

Sejam $q \in F_0$ e escolha $\tilde{q} \in f^{-1}(q)$. Logo, existe um conjunto aberto W contendo q e $\{f^k\}$ é normal em W . Seja $\{f^{k_j}\}$ uma subsequência de $\{f^k\}$, logo possui uma subsequência $\{f^{k'_j-1}\}$ que converge uniformemente nas partes compactas de W .

Como f é uma função contínua, $f^{-1}(W)$ é aberto e $f(D)$ é compacto em W para cada compacto D contido em $f^{-1}(W)$.

Para todo $w \in f(D) \subset W$, existe $\tilde{w} \in D$ tal que $w = f(\tilde{w})$. Observe que $f^{k'_j-1}(w)$ converge uniformemente, mas podemos escrever $f^{k'_j-1}(w) = f^{k'_j-1}(f(\tilde{w})) = f^{k'_j}(\tilde{w})$. Logo, para todo $\tilde{w} \in D$, $f^{k'_j}(\tilde{w})$ converge uniformemente. Portanto, $\{f^{k'_j}\}$ converge uniformemente em D . Com isto, $\{f^k\}$ é normal em $f^{-1}(W)$. Desta forma, $f^{-1}(q) \subset F_0$. Logo, $f^{-1}(F_0) \subset F_0$. ■

Proposição 2.4 $J_0(f^p) = J_0(f)$ para todo inteiro positivo p .

Demonstração: Como $F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f)$, segue que $J_0(f^p) = J_0(f)$ se e somente se $F_0(f^p) = F_0(f)$. Portanto, é suficiente mostrar a última igualdade.

Seja $z \in F_0(f)$. Logo, existe um aberto V contendo z e $\{f^k\}$ é normal em V . Portanto, toda subsequência de $\{f^k\}$ possui uma subsequência uniformemente convergente em V .

Seja $\{f^{p k'}\}$ uma subsequência de $\{f^{p k}\} \subset \{f^k\}$. Logo, $\{f^{p k'}\}$ possui uma subsequência uniformemente convergente em V . Consequentemente, $\{f^{p k}\}$ é normal em V . Portanto, $z \in F_0(f^p)$. Disto segue que $F_0(f) \subset F_0(f^p)$.

Se K é um conjunto compacto e $\{g_k\}$ uma família de funções uniformemente convergentes em K para uma função analítica ou para infinito, então pelo Corolário A.1 o mesmo é verdade para a família $\{h \circ g_k\}$, onde h é uma função polinomial (consequentemente contínua) qualquer de K em \mathbb{C} .

Seja $w \in F_0(f^p)$. Logo, existe um aberto W contendo w e $\{f^{p k}\}_{k \geq 1}$ é normal em W , então também é normal a família $\{f^r \circ f^{p k}\}_{k \geq 1} = \{f^{p k+r}\}_{k \geq 1}$ onde $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Desta forma, qualquer subsequência $\{f^{k_i}\}_{k_i \in A}$ de $\{f^k\}_{k \geq 1}$ deve conter uma subsequência infinita de $\{f^{p k+r}\}_{k \geq 1}$ para algum inteiro $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$. De fato, como A é um conjunto de índices contido em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cada elemento de A ao ser dividido por p deixa resto r pertencente ao

conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$, logo podemos escrever $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{p-1}$ onde os elementos de A_r são os números de A que deixam resto r ao serem divididos por p . Portanto, $A = \bigcup_{r=0}^{p-1} A_r$. Como A é infinito e igual a uma união finita de conjuntos, A_s deve ser infinito para algum $s \in \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Seja $A_{s'} = A_s \setminus B$ onde B é o conjunto formado pelos elementos de A_s que são menores que p .

Esta subsequência contém uma subsequência uniformemente convergente para uma função limitada ou para infinito em subconjuntos compactos de W . Assim, $\{f^k\}$ é normal em W . Consequentemente, $w \in F_0(f)$. Portanto, $F_0(f^p) \subset F_0(f)$. ■

Lema 2.3 *Sejam $v \in \mathbb{C}$ e f uma função polinomial de grau $n \geq 2$ tal que a única solução da equação $f(z) - v = 0$ é v . Então $v \notin J_0(f)$.*

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $f(z) - v = c(z - v)^n$ para alguma constante não nula $c \in \mathbb{C}$.

Defina $V = \left\{ z; |z - v| < (2|c|)^{\frac{-1}{n-1}} \right\}$. Logo,

$$\begin{aligned} |f^k(z) - v| &= |f(f^{k-1}(z)) - v| = |c(f^{k-1}(z) - v)^n| = \\ &|c(f(f^{k-2}(z)) - v)^n| = |c(c(f^{k-2}(z) - v)^n)^n| = \\ &|c.c^n(f^{k-2}(z) - v)^{n^2}| = |c.c^n(f(f^{k-3}(z)) - v)^{n^2}| = \\ &|c.c^n(c(f^{k-3}(z) - v)^n)^{n^2}| = |c.c^n.c^{n^2}(f^{k-3}(z) - v)^{n^3}| = \dots = \\ &|c.c^n.c^{n^2} \dots .c^{n^{k-1}}(f^{k-k}(z) - v)^{n^k}| = \left| c^{\frac{n^k-1}{n-1}}(z - v)^{n^k} \right| = \\ &|c|^{\frac{n^k-1}{n-1}} |z - v|^{n^k} < |c|^{\frac{n^k-1}{n-1}} (2|c|)^{\frac{-1}{n-1}n^k} = \\ &|c|^{\frac{n^k-1-n^k}{n-1}} \cdot \left(2^{\frac{-n^k}{n-1}} \right) = |c|^{\frac{-1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{n^k}{n-1}}} \right) \end{aligned}$$

Assim, se $z \in V$, então $f^k(z) - v \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e a convergência é uniforme. Portanto, $\{f^k\}$ é normal em v . Consequentemente, $v \notin J_0(f)$. ■

A proposição seguinte nos diz que as vizinhanças dos pontos em J_0 são dispersadas em todo o plano complexo pelos iterados de f .

Proposição 2.5 *Sejam f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, $w \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de w . Então $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ é todo \mathbb{C} , exceto possivelmente um único ponto. Tal ponto excepcional não está em $J_0(f)$ e não depende de w e U .*

Demonstração: Como f é uma função polinomial, segue que f é analítica. De $w \in J_0(f)$ segue que a família $\{f^k\}_{k \geq 0}$ não é normal em w , logo para todo subconjunto aberto V de U contendo w , $\{f^k\}$ não é uma família normal em V . Em particular, se $V = U$, podemos concluir que $\{f^k\}$ não é uma família normal em U . Pelo Teorema de Montel, para todo $z \in \mathbb{C}$, com no máximo uma exceção, temos $f^k(u) = z$ para algum $u \in U$ e algum k . Logo, $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ é todo \mathbb{C} , com no máximo uma exceção.

Se há essa exceção, seja $v \in \mathbb{C} \setminus W$.

Sendo f uma função aberta, W é união infinita de conjuntos abertos. Pela Proposição A.1, W é aberto. Como f é sobrejetiva, existe $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ com $f(\tilde{z}) = v$. Então $\tilde{z} \notin W$, pois $f(W) \subset W$.

Como $\mathbb{C} \setminus W$ consiste de no máximo um ponto, segue que $\tilde{z} = v$. Desta forma, f é um polinômio de grau n tal que a única solução de $f(z) - v = 0$ é v . Pelo Lema 2.3, segue que $v \notin J_0(f)$.

Desde que $v \in \mathbb{C} \setminus W$, v não depende de U e nem de w . ■

Corolário 2.1 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $n \geq 2$.*

- a) *Se U é um conjunto aberto que intersecta $J_0(f)$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$ com no máximo uma exceção, $f^{-k}(z)$ intersecta U para infinitos valores de k .*

b) Para todo $z \in \mathbb{C}$ com no máximo uma exceção, $J_0(f) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.

c) Se $z \in J_0(f)$, então $J_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.

Demonstração:

a) Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que z não é o ponto excepcional da Proposição 2.5, então existe k_1 tal que $z \in f^{k_1}(U)$ e portanto $f^{-k_1}(z)$ intersecta U . Seja $k > k_1$. De $J_0(f) = J_0(f^k)$, resulta $U \cap J_0(f^k) \neq \emptyset$. Então existe a_1 inteiro maior ou igual a 1 tal que $z \in (f^k)^{a_1}(U) = f^{ka_1}(U)$. Considere $k_2 = ka_1 > k_1$. Seja $k > k_2$. De $J_0(f) = J_0(f^k)$, resulta $U \cap J_0(f^k) \neq \emptyset$. Então existe a_2 inteiro maior ou igual a 1 tal que $z \in (f^k)^{a_2}(U) = f^{ka_2}(U)$. Considere $k_3 = ka_2 > k_2$. Usando este processo repetidas vezes obtemos uma sequência infinita $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ com $f^{-k_i}(z)$ intersectando U para todo i .

b) Seja $w \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de w tão pequena quanto se queira. Então pelo item (a), $f^{-k}(z)$ intersecta U para algum k . Portanto, w é ponto de aderência de $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$. Logo, $J_0(f) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.

c) Como $z \in J_0(f)$, z não é o ponto excepcional da Proposição 2.5. Então, pelo item (b), $J_0(f) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.

Por outro lado, como $J_0(f)$ é completamente invariante, pela Proposição 2.3, $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$ e conseqüentemente, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset J_0(f)$. Como $J_0(f)$ é um conjunto fechado (Proposição 2.1), segue que $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset J_0(f)$.

■

Corolário 2.2 *Se f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, então $J_0(f)$ tem interior vazio.*

Demonstração: Seja $w \in J_0(f)$. Suponha que exista uma vizinhança aberta U de w contida em $J_0(f)$. Como $J_0(f)$ é completamente invariante (pela Proposição 2.3), segue que $f^k(U) \subset J_0(f)$ para todo k . Logo, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$. Pela Proposição 2.5 $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ é todo \mathbb{C} , exceto possivelmente um único ponto. Assim W é ilimitado e conseqüentemente $J_0(f)$ por conter W , o que contradiz a propriedade de $J_0(f)$ ser limitado (Proposição 2.1). ■

Proposição 2.6 *$J_0(f)$ é um conjunto perfeito.*

Demonstração: Pela Proposição 2.1, $J_0(f)$ é compacto, conseqüentemente é fechado. Resta mostrar que $J_0(f)$ não possui pontos isolados.

Seja $v \in J_0(f)$ e U uma vizinhança aberta de v . Devemos mostrar que existe $w \in J_0(f) \cap U$ e $w \neq v$. Observe que w não pode ser o ponto excepcional.

Consideremos três casos:

i) v não é ponto periódico de f .

Pelo Corolário 2.1 item (a), $f^{-k}(v)$ intersecta U para algum $k \geq 1$. Seja $w \in f^{-k}(v) \cap U$. Pela Proposição 2.3, $f^{-k}(v) \subset J_0(f)$. Logo, $w \in J_0(f) \cap U$. Além disso, $w \neq v$, pois v não é ponto periódico de f . Com efeito, se $w = v$, como $w \in f^{-k}(v)$, então $f^k(v) = f^k(w) = v$, o que contradiz o fato de v não ser ponto periódico de f .

ii) v é ponto fixo de f , ou seja $f(v) = v$.

Se $f(z) = v$ não tem outra solução exceto v , então pelo Lema 2.3, $v \notin J_0(f)$. Logo, existe $w \neq v$ tal que $f(w) = v$. Conseqüentemente, $w \in f^{-1}(v)$. E pela Proposição 2.3, $w \in J_0(f)$. Portanto, w também não é o ponto excepcional da

Proposição 2.5.

Pelo Corolário 2.1, item (a), existe $u \in f^{-k}(w) \cap U$ para algum $k \geq 1$, e pela Proposição 2.3, $u \in J_0(f)$ (pois $f^{-k}(w) \subset J_0(f)$). Além disso, $u \neq v$. De fato, se $u = v$, como $u \in f^{-k}(w)$, $f^k(v) = f^k(u) = w \neq v$, o que contradiz $f^k(v) = v$.

iii) $f^p(v) = v$ para algum $p > 1$.

Pela Proposição 2.4, $J_0(f^p) = J_0(f)$, assim aplicando o item (ii) para f^p observamos que U contém algum ponto de $J_0(f^p) = J_0(f)$ e este ponto é diferente de v .

■

Teorema 2.2 *Seja f uma função polinomial de grau $n \geq 2$, então $J(f) = J_0(f)$.*

Demonstração: Seja w um ponto periódico repulsor de f de período p . Desta forma, w é um ponto fixo repulsor de $g = f^p$. Suponha que $\{g^k\}$ é normal em w , então w tem uma vizinhança aberta V na qual a subsequência $\{g^{k_i}\}$ converge para uma função analítica g_0 (não pode convergir para ∞ , pois $g^k(w) = w$ para todo k).

Por um resultado de análise complexa, a derivada também converge, $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ se $z \in V$.

Usando a regra da cadeia e o fato de w ser ponto fixo repulsor de g ,

$$\begin{aligned} |(g^{k_i}(w))'| &= |(g(g^{k_i-1}(w)))'| = |g'(g^{k_i-1}(w)) (g^{k_i-1}(w))'| = \\ &= |g'(w) (g(g^{k_i-2}(w)))'| = |g'(w) g'(g^{k_i-2}(w)) (g^{k_i-2}(w))'| = \\ &= |g'(w) g'(w) (g^{k_i-2}(w))'| = \cdots = \underbrace{|g'(w) \cdot g'(w) \cdot \cdots \cdot g'(w)|}_{k_i \text{ fatores}} = |(g'(w))^{k_i}|. \end{aligned}$$

Como $|g'(w)| > 1$, $|(g^{k_i}(w))'| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$. Isto contradiz a finitude de $g_0'(w)$, assim $\{g^k\}$ não pode ser normal em w . Portanto, $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$,

pela Proposição 2.4.

Desde que $J_0(f)$ é fechado, segue que $J(f) \subset J_0(f)$.

Seja $K = \{w \in J_0(f); \text{ existe } z \neq w \text{ com } f(z) = w \text{ e } f'(z) \neq 0\}$. Suponha que $w \in K$ e seja $z \neq w$ tal que $f(z) = w$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança aberta W de z na qual f é um difeomorfismo. Seja $V \subset f(W)$ uma vizinhança aberta de w tal que $f^{-1}(V) \cap V = \emptyset$. É possível obter tal vizinhança, pois $z \neq w$. Assim podemos encontrar uma inversa analítica local $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ tal que $f(f^{-1}(z)) = z$, para todo $z \in V$.

Definamos a família de funções analíticas $\{h_k\}$ em V por

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

Seja U uma vizinhança aberta de w com $U \subset V$. Desde que $w \in J_0(f)$, a família $\{f^k\}$ e conseqüentemente, por definição, a família $\{h_k\}$ não são normais em U . Pelo Teorema de Montel, $h_k(z)$ assume o valor zero ou assume o valor 1 para algum k e algum $z \in U$. No primeiro caso, $f^k(z) = z$ para algum $z \in U$; no segundo caso, $f^k(z) = f^{-1}(z)$, portanto $f^{k+1}(z) = z$ para algum $z \in U$. Logo, U contém um ponto periódico de f de período k ou $k+1$. Desta forma, w é limite de uma seqüência de pontos periódicos de f . Como o número de pontos periódicos não repulsores é finito (consulte [1]), w é limite de uma seqüência de pontos periódicos repulsores. Conseqüentemente, $w \in J(f)$. Logo, $K \subset J(f)$. Tomando fechos, $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. Porém K contém todo $J_0(f)$ exceto um número finito de pontos. Com efeito, a derivada de f tem grau $n-1$ e a equação $f'(z) = 0$ tem no máximo $n-1$ soluções distintas. Desde que $J_0(f)$ não possui pontos isolados (pela Proposição 2.6), $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$. ■

Os resultados seguintes serão úteis para demonstrar a equivalência entre as Definições 1.7 e 2.1.

Proposição 2.7 *Se w é ponto fixo atrator de f , então $w \in F_0(f)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.1, existe uma bola aberta de centro em w e raio δ na qual a seguinte condição é satisfeita: se $z \in B_\delta(w)$, então $f^k(z) \in B_\delta(w)$ e $f^k(z) \rightarrow w$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, a família $\{f^k\}$ é normal em w . Logo, $w \notin J_0(f) = J(f)$ e conseqüentemente $w \in F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f)$. ■

Lema 2.4 *Se $z_0 \in J(f)$, então $f^k(z_0)$ não pode convergir para um ponto fixo atrator de f .*

Demonstração: Seja w ponto fixo atrator de f . Suponha que $f^k(z_0) \rightarrow w$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $z_0 \in J(f)$, então pela Proposição 2.4 $f^k(z_0) \in J(f)$ para todo inteiro positivo k . Desta forma, para cada k , $f^k(z_0)$ é limite de uma seqüência $\{x_n^k\}$ de pontos periódicos repulsores de f .

Considere a seqüência $\{y_j\}$ onde $y_j = x_j^j$, com $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$|y_j - w| = |x_j^j - w| = |x_j^j - f^j(z_0) + f^j(z_0) - w| \leq$$

$$|x_j^j - f^j(z_0)| + |f^j(z_0) - w| < \tilde{\varepsilon}_j + \varepsilon_j < \varepsilon, \text{ onde } \varepsilon = 2 \cdot \max\{\tilde{\varepsilon}_j, \varepsilon_j\}.$$

Logo, $y_j \rightarrow w$. Disto segue que w é limite de uma seqüência de pontos periódicos repulsores de f . Conseqüentemente, $w \in J(f)$. Mas isto é absurdo, pois $w \notin J_0(f) = J(f)$ pela Proposição 2.7. ■

A próxima proposição demonstra a equivalência entre as Definições 1.7 e 2.1.

Proposição 2.8 *Seja w um ponto fixo atrator de f . Então $\partial A_f(w) = J(f)$. O mesmo é verdade se $w = \infty$.*

Demonstração: Seja $z_0 \in J(f)$. Pelo Lema 2.4, $f^k(z_0)$ não pode convergir para w . Conseqüentemente, $z_0 \notin A_f(w)$. Porém, se U é uma vizinhança de z_0 , o conjunto

$f^k(U)$ contém pontos de $A_f(w)$ para algum k , pela Proposição 2.5. Com isto, há pontos arbitrariamente próximos de z_0 os quais são iterados até w . Com efeito, seja r um inteiro positivo tal que $f^r(U)$ contém pontos de $A_f(w)$. Seja $f^r(z_1)$ um desses pontos. Então $f^{k+r}(z_1) = f^k(f^r(z_1)) \rightarrow w$ quando $k \rightarrow \infty$. Consequentemente, $f^k(z_1) \rightarrow w$. Logo, $z_1 \in A_f(w)$. Desta forma, $z_1 \in U$ e $f^k(z_1) \rightarrow w$. Portanto, $z_0 \in \overline{A_f(w)}$ e como $z_0 \notin A_f(w)$, segue que $z_0 \in \partial A_f(w)$. Logo, $J(f) \subset \partial A_f(w)$.

Suponha que um ponto $z_0 \in \partial A_f(w)$ não pertença a $J(f) = J_0(f)$. Então z_0 tem uma vizinhança aberta V na qual a família $\{f^k\}$ é normal. Sejam $U \subset V$ uma vizinhança aberta e conexa de z_0 , e $A = U \cap A_f(w)$. O conjunto A é não vazio. Com efeito, como $z_0 \in \partial A_f(w)$, toda vizinhança de z_0 intersecta $A_f(w)$. Além disto, o conjunto A é aberto por ser interseção de dois abertos.

A sequência $\{f^k\}$ possui uma subsequência $\{f^{k'}\}$ que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U para uma função analítica ou para ∞ . Em particular esta subsequência converge para w em cada subconjunto compacto de A , logo converge para w em A . Desta forma, $\{f^{k'}\}$ não pode convergir para ∞ em U . Considere g a função analítica para a qual $\{f^{k'}\}$ converge em U .

Afirmamos que $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ é a função constante $g(z) = w$. Com efeito, seja $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(z) = w$, para todo $z \in U$. Observe que g e h são duas funções analíticas em U , o qual é aberto e conexo, e além disso, $g|_A = h|_A$. Como A é aberto, todo ponto de A é ponto de acumulação. Então, pelo Corolário A.3, $g \equiv h$ em U . Com isto, todos os pontos de U são aplicadas em $A_f(w)$ por iterados de f . Consequentemente, $U \subset A_f(w)$. No entanto, isto contradiz o fato de z_0 pertencer à fronteira do conjunto aberto $A_f(w)$. Portanto, $\partial A_f(w) \subset J(f)$. ■

2.2 Funções quadráticas e o conjunto de Mandelbrot

Seja \mathcal{F} a família das funções quadráticas da forma $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa.

De acordo com a proposição seguinte, ao estudarmos os conjuntos de Julia de f_c , com $c \in \mathbb{C}$, estudamos os conjuntos de Julia de todas as funções quadráticas.

Proposição 2.9 *Toda função quadrática é topologicamente conjugada a algum membro da família quadrática \mathcal{F} .*

Demonstração: Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função quadrática com coeficientes complexos dada por $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, com $a_2 \neq 0$. Seja $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{C}$. Observe que h é uma bijeção contínua, com função inversa $h^{-1}(z) = \frac{z - \beta}{\alpha}$. Então,

$$\begin{aligned} h^{-1}(f_c(h(z))) &= h^{-1}(f_c(\alpha z + \beta)) = h^{-1}((\alpha z + \beta)^2 + c) \\ &= h^{-1}(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c) \\ &= \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \alpha z^2 + 2\beta z + \frac{\beta^2 + c - \beta}{\alpha} \quad (2.4)$$

Escolhendo valores apropriados de α , β e c , podemos transformar a expressão 2.4 em uma função quadrática arbitrária f .

Igualando 2.4 a $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = a_2 \\ 2\beta = a_1 \\ \frac{\beta^2 + c - \beta}{\alpha} = a_0 \end{array} \right.$$

De onde segue

$$\alpha = a_2$$

$$\beta = \frac{a_1}{2}$$

$$c = -\beta^2 + \beta + \alpha a_0 = -\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_2 a_0.$$

Portanto, a função $f(z) = a_2 z + a_1 z + a_0$ é topologicamente conjugada a

$$f_c(z) = z^2 + \left(-\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1}{2} + a_0\right).$$

E a função $h(z) = \alpha z + \beta = a_2 z + \frac{a_1}{2}$

é a conjugação topológica entre f e f_c . ■

Proposição 2.10 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau dois com coeficientes complexos e $f_c \in \mathcal{F}$ tal que f é topologicamente conjugada a f_c pelo homeomorfismo h . Então*

- a) *A sequência dos iterados $\{f^k(z)\}$ de um ponto z por f é a imagem por h^{-1} da sequência dos iterados $\{f_c^k(h(z))\}$ do ponto $h(z)$ por f_c .*
- b) *z é ponto p -periódico de f se, e somente se, $h(z)$ é ponto p -periódico de f_c .*

Demonstração:

- a) Por hipótese, $h \circ f = f_c \circ h$ e pela Proposição A.13, $h \circ f^k = f_c^k \circ h$. Desde que h é invertível, $h^{-1}(h \circ f) = h^{-1}(f_c \circ h)$, ou seja, $f = h^{-1} \circ f_c \circ h$. E além disto, $h^{-1}(h \circ f^k) = h^{-1}(f_c^k \circ h)$, isto é, $f^k = h^{-1} \circ f_c^k \circ h$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consequentemente, $f^k(z) = h^{-1}(f_c^k(h(z)))$ e o resultado segue.

b) Se z é ponto p -periódico de f , então $f^p(z) = z$. Pela Proposição A.13, $f_c^p(h(z)) = h(f^p(z))$. Como $f^p(z) = z$, segue que $f_c^p(h(z)) = h(z)$. Portanto, $h(z)$ é ponto p -periódico de f_c .

Por outro lado, se $h(z)$ é ponto p -periódico de f_c , então $f_c^p(h(z)) = h(z)$. Pela Proposição A.13, $f_c^p(h(z)) = h(f^p(z))$. Logo, $h(f^p(z)) = h(z)$. Como h é invertível, $h^{-1}(h(f^p(z))) = h^{-1}(h(z))$. De onde resulta $f^p(z) = z$.

■

De acordo com a proposição acima, o conjunto de Julia de f é a imagem por h^{-1} do conjunto de Julia de f_c .

Como o homeomorfismo h é uma transformação de similaridade, o conjunto de Julia de toda função quadrática é geometricamente similar ao de f_c , para algum $c \in \mathbb{C}$.

Os resultados seguintes serão úteis na obtenção de uma caracterização alternativa do conjunto de Mandelbrot em termos dos iterados de f_c .

Afirmção 2.3 *Seja $C = \{w \in \mathbb{C}; |w| = a\}$. Se $a > \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}$, então $f_c^{-1}(C)$ é interior à C .*

Demonstração: Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $f_c(z) = w \in C$. Logo, $z \in f^{-1}(w) \subset f^{-1}(C)$. De $z^2 + c = w$, segue que $|z|^2 = |z^2| = |w - c|$ e $z = \pm\sqrt{w - c}$. Com isto, $f^{-1}(w) = \{\sqrt{w - c}, -\sqrt{w - c}\}$.

Afirmamos que $|w|^2 > |w| + |c|$. Com efeito,

$$|w|^2 - |w| - |c| = a^2 - a - |c| = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - |c| = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 + 4|c|}{4}\right).$$

Por hipótese, $a > \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}$, ou seja, $a - \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{1 + 4|c|}}{2} > 0$. Elevando ao quadrado a primeira desigualdade da última expressão, obtemos

$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1+4|c|}{4}$. Com isto, $|w|^2 - |w| - |c| > 0$. E conseqüentemente,

$$|w|^2 > |w| + |c|.$$

Da desigualdade triangular temos que $|w - c| \leq |w| + |c|$, e utilizando o resultado anterior, podemos escrever $|w - c| < |w|^2$. Logo, $|z|^2 < |w|^2$ e conseqüentemente $|z| < |w|$. Desta forma, $|f^{-1}(w)| < |w|$. Concluimos que $f^{-1}(C)$ é interior a C . ■

Observação 2.2 Seja $r > \max\left\{2, |c|, \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}\right\}$ e $x = |c| \geq 0$.

- Se $x = 2$, então $\frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2} = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$. Neste caso,

$$r > \max\left\{2, |c|, \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}\right\} \text{ é o mesmo que } r > 2.$$

- Se $0 \leq x < 2$, então $0 < 1 + 4x < 1 + 4 \cdot 2 = 9$ e $\sqrt{1 + 4x} < 3$. De

onde segue que $1 + \sqrt{1 + 4x} < 4$, ou seja, $\frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} < 2$. Neste caso,

$$r > \max\left\{2, |c|, \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}\right\} \text{ é o mesmo que } r > 2.$$

- Se $x > 2$, então $4x \cdot (x - 2) > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 4x + 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x + 1} > 1 \Leftrightarrow (f(x))^2 > 1 \text{ onde } f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{1 + 4x}} > 0 \text{ para } x > 2.$$

De onde segue que $f(x) > 1$. Com isto, $\frac{2x - 1}{\sqrt{1 + 4x}} > 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > \sqrt{1 + 4x} \Leftrightarrow$

$x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$. Neste caso, $r > \max \left\{ 2, |c|, \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2} \right\}$ é o mesmo que $r > |c|$.

Afirmção 2.4 *Seja p o menor natural tal que $|f_c^p(0)| > \max\{2, |c|\}$. Então,*

- a) $|f_c^k(0)| > |f_c^p(0)|$ para todo $k > p$.
- b) $|f_c^k(0)| < |f_c^p(0)|$ para todo $k < p$.

Demonstração:

- a) Seja $k = p + r$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$|f_c^k(0)| = |f_c^{p+r}(0)| = |f^r(f_c^p(0))|$. Como $|f_c^p(0)| > \max\{2, |c|\}$, pelo Lema 1.1, existe um número real positivo ε tal que $|f^r(f_c^p(0))| \geq (1 + \varepsilon)^r |f_c^p(0)| > |f_c^p(0)|$.

- b) Suponha que exista $k_0 < p$ tal que $|f_c^{k_0}(0)| > |f_c^p(0)|$. Seja $p = k_0 + r$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Podemos escrever $|f_c^{k_0}(0)| > |f_c^p(0)| = |f_c^{k_0+r}(0)| = |f_c^r(f_c^{k_0}(0))|$. Como $|f_c^{k_0}(0)| > |f_c^p(0)| > \max\{2, |c|\}$, pelo Lema 1.1, existe um número real positivo $\tilde{\varepsilon}$ tal que $|f_c^r(f_c^{k_0}(0))| \geq (1 + \tilde{\varepsilon})^r |f_c^{k_0}(0)| > |f_c^{k_0}(0)|$, o que é absurdo. ■

Com o objetivo de obter uma caracterização alternativa do conjunto de Mandelbrot em termos dos iterados de f_c , precisamos saber o efeito da transformação f_c em curvas suaves.

Definição 2.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Uma curva em \mathbb{C} é a imagem de uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. A função γ é designada por parametrização da curva (de parâmetro real t) e*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

por equação paramétrica da curva.

Dada uma curva parametrizada por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, e $t_0 \in [a, b]$, o vetor

$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

é denominado vetor tangente à curva no ponto $t = t_0$.

Observe que γ é uma aplicação de variável real. Portanto, a existência de $\gamma'(t)$ implica que existam as derivadas das funções reais de variável real $x(t)$ e $y(t)$.

Quando não houver perigo de ambiguidade, iremos nos referir à curva γ para mencionar a curva parametrizada por γ .

Podemos também utilizar a notação $\gamma(t) = r(t)(\cos t + isen t)$, onde $(r(t)) \cos t = x(t)$ e $(r(t)) \sen t = y(t)$.

Definição 2.6 *Uma curva γ é denominada suave (ou regular) quando as funções $x(t)$ e $y(t)$ têm derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$ e o vetor $\gamma'(t)$ não se anula em $[a, b]$.*

Uma curva γ contínua no intervalo $[a, b]$ é denominada seccionalmente suave (ou seccionalmente regular) se existir uma partição do intervalo $[a, b]$, ou seja, um número finito de valores reais a_0, a_1, \dots, a_n , com $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$, tal que as restrições $\gamma_j = \gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$, com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, são curvas suaves. Neste caso, γ é a união de um número finito de curvas suaves.

Definição 2.7 *A curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é denominada*

- a) *fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$;*
- b) *simples se não possui ponto de auto-interseção, isto é, se $\gamma(t) \neq \gamma(\tilde{t})$ sempre que $t \neq \tilde{t}$, com $t, \tilde{t} \in [a, b]$;*
- c) *simples e fechada se é fechada e $\gamma(t) = \gamma(\tilde{t})$ para $t \neq \tilde{t}$ apenas no caso $\{t, \tilde{t}\} = \{a, b\}$;*

d) fechada suave se $\exists \bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\bar{\gamma}$ é periódica de período $b - a$ (ou seja, $\bar{\gamma}(t + b - a) \equiv \bar{\gamma}(t)$), $\bar{\gamma}'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\bar{\gamma}|_{[a, b]} = \gamma$.

Definição 2.8 Denominaremos *laço* uma curva suave, fechada, simples no plano complexo. Vamos nos referir as partes de \mathbb{C} dentro e fora dessa curva como o interior e o exterior do laço. Uma figura de oito é uma curva fechada seccionalmente suave com um único ponto de auto-intersecção.

A partir de agora, os laços considerados são parametrizados por uma ou mais funções do tipo $\gamma : \left[0, \frac{2\pi}{a}\right] \rightarrow \mathbb{C}$, onde

$$\gamma(t) = r(t)(\cos(at) + i \operatorname{sen}(at)), \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como podemos reparametrizar γ por $\gamma \circ h$, onde $h : [0, 2\pi] \rightarrow \left[0, \frac{2\pi}{a}\right]$ dada por $h(t) = \frac{t}{a}$, sem perda de generalidade, iremos considerar

$$\gamma(t) = r(t)(\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Para o próximo lema, precisaremos da seguinte observação:

Observação 2.3 A imagem inversa da função $f_0(z) = z^2$ é a função plurívoca $f_0^{-1}(z) = \sqrt{z}$. Escrevendo o número complexo z na forma polar, $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, tem-se

$$f_0^{-1}(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi.k}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi.k}{2} \right) \quad \text{com } k \in \{0, 1\}.$$

Para $k = 0$, obtemos $\sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$

$$\begin{aligned}
& e \text{ para } k = 1, \text{ obtemos } \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi}{2} \right) = \\
& \sqrt{r} \left[\left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \pi - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \pi \right) + i \left(\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \pi + \operatorname{sen} \pi \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] = \\
& -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, a função plurívoca $f_0^{-1}(z) = \sqrt{z}$ possui dois ramos

$$F_0(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad e$$

$$G_0(z) = -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right).$$

Lema 2.5 *Seja C um laço no plano complexo.*

- a) *Se c está dentro de C , então $f_c^{-1}(C)$ é um laço e a imagem inversa do interior de C é o interior de $f_c^{-1}(C)$.*
- b) *Se c está sobre C , então $f_c^{-1}(C)$ é uma figura de oito e f_c aplica o interior de cada metade da figura de oito no interior de C .*

Demonstração: Note que $f_c^{-1}(z) = (z - c)^{\frac{1}{2}}$ é derivável e não nulo se $z \neq c$, com derivada $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-\frac{1}{2}}$.

a) Afirmamos que se escolhermos um dos dois ramos de f_c^{-1} , o conjunto $f_c^{-1}(C)$ é localmente uma curva suave, sempre que $c \notin C$. De fato, por hipótese C é uma curva suave, fechada, simples no plano complexo, logo existe $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\bar{\gamma}$ é periódica de período $(2\pi - 0)$, $\bar{\gamma}'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\bar{\gamma}|_{[0, 2\pi]} = \gamma$ onde $\gamma(t) = r(t)(\cos t + i \operatorname{sen} t)$.

Observe que $\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t + 2\pi)$ e $\bar{\gamma}'(t) = \bar{\gamma}'(t + 2\pi)$.

Quando $t = 0$, $\gamma(0) = r(0).(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = r(0)$ e quando $t = 2\pi$, $\gamma(2\pi) = r(2\pi).(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = r(2\pi)$. Como C é uma curva fechada, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ e conseqüentemente, $r(0) = r(2\pi)$.

Seja $F_c|_C : C \rightarrow \mathbb{C}$, onde F_c é um dos ramos de f_c^{-1} . Observe que $F_c \circ \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma parametrização da curva $F_c(C)$. Como $(f_c^{-1})'(z) = \frac{1}{2}(z - c)^{-\frac{1}{2}}$ e $c \notin \mathbb{C}$, $F_c'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Com isto, $(F_c \circ \gamma)'(t) = [F_c'(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) \neq 0$. Disto resulta que $F_c(C)$ é uma curva suave, sempre que $c \notin C$.

Suponha que c está dentro de C .

Sem perda de generalidade, podemos tomar $c = 0$, pois $f_c(z) = z^2 + c$ é uma translação de $f_0(z) = z^2$.

Tomemos um ponto inicial $w = \gamma(0)$ em C e escolhamos um dos dois valores de $f_0^{-1}(w)$, por exemplo, $F_0(w)$, onde $F_0(z) = \sqrt{z}$.

Pelos cálculos acima, $F_0(\gamma(t))$ é uma curva contínua e suave.

Observe que $\gamma(t) = r(t).(\cos t + i \operatorname{sen} t)$ e $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Além disto,

$$F_0(\gamma(t)) = \sqrt{\gamma(t)} = \sqrt{r(t)} \left(\cos \frac{t}{2} + i \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

Quando t varia de 0 até 2π , $\frac{t}{2}$ varia de 0 até π . Com isto,

$$F_0(\gamma(0)) = \sqrt{\gamma(0)} = \sqrt{r(0)} \left(\cos \frac{0}{2} + i \operatorname{sen} \frac{0}{2} \right) = \sqrt{r(0)}.1 = \sqrt{r(0)} \quad (2.5)$$

$$F_0(\gamma(2\pi)) = \sqrt{\gamma(2\pi)} = \sqrt{r(2\pi)} \left(\cos \frac{2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} \right) = -\sqrt{r(2\pi)} \quad (2.6)$$

Considerando o outro ramo de $f_0^{-1}(z)$, $G_0(z) = -\sqrt{z}$, temos

$$G_0(\gamma(t)) = -\sqrt{\gamma(t)} = -\sqrt{r(t)} \left(\cos \frac{t}{2} + i \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right) \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

Logo,

$$G_0(\gamma(0)) = -\sqrt{r(0)}.1 = -\sqrt{r(0)} = -\sqrt{r(2\pi)} \quad (2.7)$$

$$G_0(\gamma(2\pi)) = -\sqrt{r(2\pi)}.(-1) = \sqrt{r(2\pi)} = \sqrt{r(0)} \quad (2.8)$$

Seja $\bar{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\bar{\beta}$ é periódica de período $(4\pi - 0)$, $\bar{\beta}'(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\bar{\beta}|_{[0, 4\pi]} = \beta$ onde

$$\beta(t) = \begin{cases} F_0(\gamma(t)) & \text{se } 0 \leq t < 2\pi \\ G_0(\gamma(t - 2\pi)) & \text{se } 2\pi \leq t \leq 4\pi \end{cases}$$

Observe que $\beta(t) = \beta(t + 2\pi)$ e $\beta'(t) = \beta'(t + 2\pi)$.

Fazendo $f_0^{-1}(z)$ variar continuamente quando z percorre C (com $0 \leq t < 2\pi$), $\beta(t)$ traça uma curva suave. No entanto, quando $t = 2\pi$, z retorna a w e $f_0^{-1}(w)$ toma seu segundo valor, $G_0(w)$, de acordo com as expressões 2.3 e 2.4. Quando $2\pi \leq t \leq 4\pi$, z atravessa novamente C e $\beta(t)$ traça seu caminho suave o qual fecha quando $t = 4\pi$ e conseqüentemente, z retorna a w pela segunda vez, de acordo com as expressões 2.2 e 2.5.

O mesmo ocorre para $f_c(z) = z^2 + c$, uma vez que $f_c(z)$ é uma translação de $f_0(z)$.

Por hipótese, $c \notin C$, então $0 \notin f_c^{-1}(C)$. Logo, $f_c'(z) \neq 0$ em $f_c^{-1}(C)$. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, f_c é localmente uma transformação bijetiva suave para pontos próximos em $f_c^{-1}(C)$. Em particular, a curva $f_c^{-1}(C)$ não possui ponto de auto-interseção, pois se $z \in f_c^{-1}(C)$ fosse um ponto desse tipo, $f_c(z)$ seria um ponto de auto-interseção de C , o que contradiz a hipótese de C ser um laço.

A função contínua f_c aplica o laço $f_c^{-1}(C)$, e nenhum outro ponto, no laço C , ou seja, $f_c|_{f_c^{-1}(C)} : f_c^{-1}(C) \rightarrow C$.

Note que f_c aplica o interior e o exterior de $f_c^{-1}(C)$ no interior e exterior de

C , respectivamente. Com efeito, f_c é uma aplicação aberta, logo $f_c(\text{Int}(f_c^{-1}(C)))$ e $f_c(\text{Ext}(f_c^{-1}(C)))$ são conjuntos abertos. Como f_c é contínua, aplica o conjunto compacto $B = [f_c^{-1}(C) \cup \text{Int}(f_c^{-1}(C))]$ no compacto $f_c(B) = (C \cup \text{Int}(C))$. Portanto, $f_c(\text{Int}(f_c^{-1}(C)))$ é o interior de C e $f_c(\text{Ext}(f_c^{-1}(C)))$ é o exterior de C . Com isto, f_c^{-1} aplica o interior e o exterior de C no interior e exterior de $f_c^{-1}(C)$, respectivamente.

b) Suponha que c está sobre C .

Usaremos um método análogo ao da parte (a).

Seja γ uma parametrização da curva C como descrita na parte (a), sendo $w = c$.

Seja $F_c \Big|_C : C \rightarrow \mathbb{C}$, onde F_c é um dos ramos de f_c^{-1} , sendo $f_c(z) = z^2 + c$. Observe que $F_c \circ \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma parametrização da curva $F_c(C)$ e como $c \in C$, F_c' existe e é diferente de zero para $z \neq c$. Com isto,

$$(F_c \circ \gamma)'(t) = [(F_c)'(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) \neq 0 \text{ para } t \neq 0.$$

Disto resulta que $F_c(C)$ é uma curva suave, sempre que $z \neq c$, o mesmo ocorre para $G_c(C)$. Logo, $f_c^{-1}(C)$ é uma curva seccionalmente suave.

Sendo c o ponto inicial em C , $c = \gamma(0)$, escolhamos um dos dois valores de $f_c^{-1}(w)$, por exemplo, $F_c(w)$, onde $F_c(z) = \sqrt{z - c}$.

Observe que $\gamma(t) = r(t) \cdot (\cos t + i \sin t)$ e $c = \gamma(0) = \gamma(2\pi)$. E

$$F_c(\gamma(t)) = \sqrt{\gamma(t) - c},$$

$$G_c(\gamma(t)) = -\sqrt{\gamma(t) - c}, \text{ onde } G_c \text{ é o outro ramo de } f_c^{-1}.$$

Observe que

$$F_c(\gamma(0)) = \sqrt{\gamma(0) - c} = \sqrt{c - c} = 0 \text{ e } F_c(\gamma(2\pi)) = \sqrt{\gamma(2\pi) - c} = \sqrt{c - c} = 0.$$

Portanto, $F_c(C) = D_1$ é uma curva fechada. O mesmo se verifica para $G_c(C) = D_2$, pois $G_c(\gamma(0)) = -\sqrt{\gamma(0) - c} = \sqrt{c - c} = 0$ e $G_c(\gamma(2\pi)) = -\sqrt{\gamma(2\pi) - c} = -\sqrt{c - c} = 0$.

Sejam $\beta_1, \beta_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por $\beta_1(t) = F_c(\gamma(t))$ e $\beta_2(t) = G_c(\gamma(t))$.

Observe que $f_c^{-1}(C)$ possui um único ponto de auto-interseção no zero. Temos assim a figura de oito (ver figura 2.1).

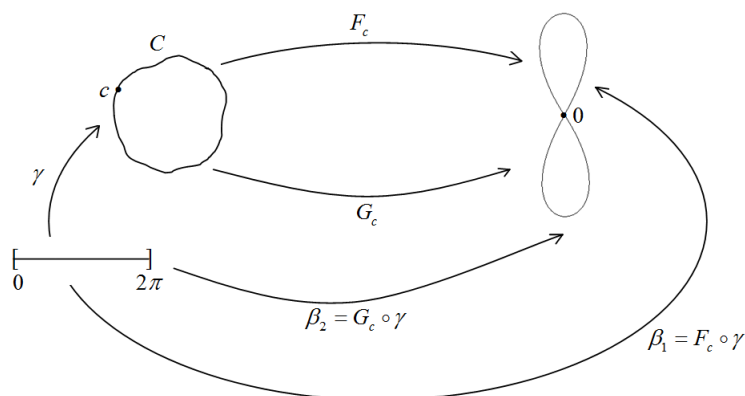


Figura 2.1: Figura de oito $f_c^{-1}(C)$

A função contínua f_c aplica a figura de oito $f_c^{-1}(C)$, e nenhum outro ponto, no laço C , ou seja, $f_c|_{f_c^{-1}(C)} : f_c^{-1}(C) \rightarrow C$.

Por argumentos análogos aos descritos na parte (a), f_c aplica o interior de D_1 no interior de C e aplica o interior de D_2 no interior de C . ■

Afirmção 2.5 $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitado $\Leftrightarrow f_c^k(z) \nrightarrow \infty$.

Demonstração: Se $f_c^k(z) \rightarrow \infty$, então $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é ilimitado. Isto prova que: se $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitado, então $f_c^k(z) \nrightarrow \infty$.

Se $\{f_c^k(z)\}$ for ilimitado, então para todo $r > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $|f_c^{k_0}(z)| > r$. Logo,

$$|f_c^{k_0+1}(z)| = |f_c(f_c^{k_0}(z))|, \text{ onde } |f_c^{k_0}(z)| > r.$$

Pelo Lema 2.1, segue que

$$|f_c(f_c^{k_0}(z))| > 2|f_c^{k_0}(z)| > 2r.$$

Além disto,

$$|f_c^{k_0+2}(z)| = |f_c(\underbrace{f_c^{k_0+1}(z)}_{>2r})| > 2 \cdot |f_c^{k_0+1}(z)| > 2 \cdot 2r = 2^2 r.$$

Por indução, temos $|f_c^{k_0+p}(z)| > 2^p r$. Quando $p \rightarrow \infty$, $2^p r \rightarrow \infty$. Portanto, $f_c^k(z) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Isto prova que: se $f_c^k(z) \not\rightarrow \infty$, então $\{f_c^k(z)\}_{k \geq 1}$ é limitado. ■

A afirmação anterior demonstra a igualdade entre os conjuntos

$$\{c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\} = \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(0) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$$

que aparecem no enunciado do próximo teorema.

Teorema 2.3

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; \{f_c^k(0)\}_{k \geq 1} \text{ é limitado}\} = \{c \in \mathbb{C}; f_c^k(0) \rightarrow \infty \text{ quando } k \rightarrow \infty\}.$$

Demonstração: a) Vamos mostrar inicialmente que se $\{f_c^k(0)\}$ é limitado, então $J(f_c)$ é conexo.

Como $\{f_c^k(0)\}$ é limitado, existe $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $|f_c^k(0)| \leq M$.

Seja C um círculo em \mathbb{C} de centro na origem e raio r tal que:

- i) Todos os pontos $f_c^k(0)$ estejam dentro de C .
- ii) $f_c^{-1}(C)$ é interior a C .
- iii) Os pontos fora de C sejam iterados por f_c^k para ∞ .

Vamos determinar r de modo que as condições acima sejam satisfeitas.

Se $r > M + 1$, o item (i) segue.

Se $r > \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2}$, pela Afirmação 2.3 o item (ii) é satisfeito.

Se $r > \max\{2, |c|\}$, pela Proposição 1.2 o item (iii) é satisfeito.

Pela Observação 2.2, podemos tomar $r > \max\{M + 1, 2, |c|\}$.

Note que $f_c^1(0) = 0^2 + c = c$. Logo, pela condição (i) acima, $c = f_c(0)$ está dentro de C .

Pelo Lema 2.5, segue que $f^{-1}(C)$ é um laço e a imagem inversa do interior de C é o interior de $f_c^{-1}(C)$.

Da maneira como C foi definida, $f^{-1}(C)$ está contido no interior de C . Além disso, como $f_c^2(0) = f_c(f_c(0)) = f_c(c)$, segue que $f_c(c)$ está no interior de C e pela segunda parte do item (a) do Lema 2.5, sua imagem inversa está no interior de $f_c^{-1}(C)$, ou seja, $f_c^{-1}(f_c(c)) \ni c$ está no interior de $f_c^{-1}(C)$. Então, pelo item (a) do Lema 2.5, $f_c^{-1}(f_c^{-1}(C)) = f_c^{-2}(C)$ é um laço e a imagem inversa do interior de $f_c^{-1}(C)$ é o interior de $f_c^{-2}(C)$.

Afirmamos que $f_c^{-2}(C)$ está no interior de $f_c^{-1}(C)$. Com efeito, seja $z \in C$. Existe w tal que $f_c(w) = z$, ou seja, $w \in f_c^{-1}(z) \subset f_c^{-1}(C)$. Desta forma, $w \in \text{Int}(C)$. Então $f_c^{-1}(w) \in \text{Int}(f_c^{-1}(C))$. Observe que $f_c^{-1}(w) \in f_c^{-2}(z) \subset f_c^{-2}(C)$. Logo, $f_c^{-2}(C)$ está no interior de $f_c^{-1}(C)$.

Continuando desta maneira, temos que $\{f_c^{-k}(C)\}$ consiste de uma sequência de laços, contendo cada um o seguinte no seu interior (ver figura 2.2, obtida com $c = -0,3 + 0,3i$) e com $c \in \text{Int}(f_c^{-k}(C))$ para todo k .

Denote $B_k(C)$ o conjunto fechado formado pelos pontos que estão sobre ou dentro do laço $f_c^{-k}(C)$.

Seja $K = \bigcap_{k \geq 1} B_k(C)$. Observe que $K \neq \emptyset$, pois $c \in K$.

Se $z \in \mathbb{C} \setminus K$, para algum $k_0 \geq 1$, $f_c^{k_0}(z)$ fica fora de C . Com efeito, suponha que $z \in \mathbb{C} \setminus K$, e para todo k , $f_c^k(z) \in (C \cup \text{Int}(C))$. Desta forma, $z \in f_c^{-k}(f_c^k(z)) \subset f_c^{-k}(C \cup \text{Int}(C)) = B_k(C)$ para todo k . Assim, $z \in K$, o que é absurdo. Logo, pela condição (iii), $f_c^k(z) \rightarrow \infty$. Com isto, segue que $\mathbb{C} \setminus K \subset A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; f_c^k(z) \rightarrow w \text{ quando } k \rightarrow \infty\}$.

Se $w \in A_f(\infty)$, então $w \notin K$. Com efeito, se $w \in K$, $f_c^k(w) \in (C \cup \text{Int}(C))$, para todo k , e conseqüentemente, $f_c^k(w)$ é limitado, o que contradiz o fato de $w \in A_f(\infty)$.

Portanto, $A_f(\infty) \subset \mathbb{C} \setminus K$.

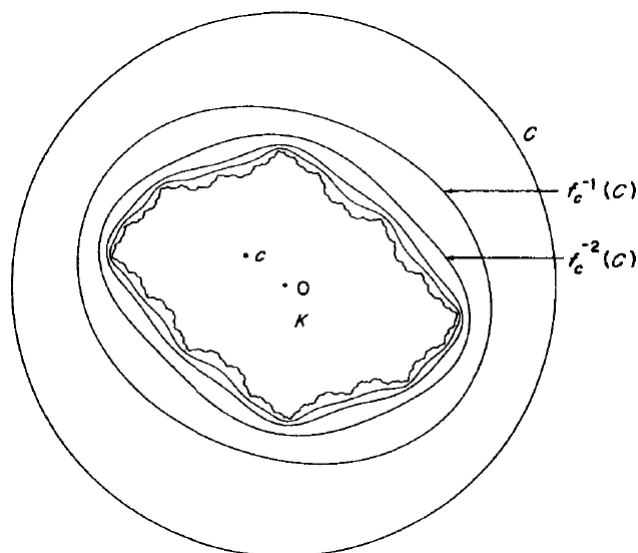


Figura 2.2: Iterados inversos de um círculo C por f_c , com $c = -0,3 + 0,3i$. Fonte [4]

Podemos escrever $A_f(\infty) = \mathbb{C} \setminus K$. Pela Proposição 2.8, $J(f_c)$ é a fronteira de $\mathbb{C} \setminus K$ o qual é, de fato, igual a fronteira de K . Mas K é a interseção de uma sequência decrescente de conjuntos fechados simplesmente conexos (isto é, conjuntos conexos que possuem complementar conexo). Logo, K é fechado e simplesmente conexo, portanto tem fronteira conexa. Conseqüentemente, a fronteira de $\mathbb{C} \setminus K$ é conexa. Logo, $J(f_c)$ é conexo.

b) Seja c tal que $\{f_c^k(0)\}$ é ilimitado. Vamos mostrar que $J(f_c)$ não é conexo.

Seja C um círculo de centro na origem e raio $r > \max \left\{ 2, |c|, \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2} \right\}$. Pela Observação 2.2, podemos tomar $r > \max\{2, |c|\}$. Desta forma, todos os pontos fora de C são iterados para ∞ e $f_c^{-1}(C)$ está dentro de C . Além disso, este círculo C deve satisfazer a seguinte condição: para algum p , o ponto

$f_c^{p-1}(c) = f_c^{p-1}(f_c(0)) = f_c^p(0) \in C$, onde $f_c^k(0)$ fica dentro ou fora de C , segundo k seja menor ou maior que p . De acordo com a Afirmação 2.4, basta escolher p o menor natural tal que $|f_c^p(0)| > \max\{2, |c|\}$.

Assim, como na primeira parte da demonstração, construímos uma série de laços $\{f_c^{-k}(C)\}$, contendo cada um o seguinte no seu interior (ver figura 2.3, obtida com $c = -0,9 + 0,5i$).

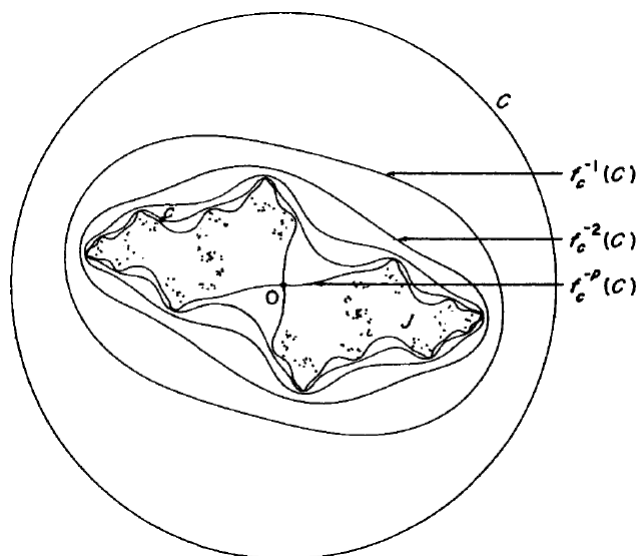


Figura 2.3: Iterados inversos de um círculo C por f_c , com $c = -0,9 + 0,5i$. Fonte [4]

De $f_c^{p-1}(c) = f_c^{p-1}(f_c(0)) = f_c^p(0) \in C$, segue que $c \in f_c^{-(p-1)}(f_c^{p-1}(c)) \subset f_c^{-(p-1)}(C)$. Portanto, o argumento falha quando obtemos o laço $f_c^{-(p-1)}(C) = f_c^{1-p}(C)$, pois $c \in f_c^{1-p}(C)$ e não se aplica o item (a) do Lema 2.5. Mas, pela primeira parte do item (b) do lema citado, temos que $E \equiv f^{-1}(f^{1-p}(C)) = f^{-p}(C)$ é uma figura de oito.

Observe que E está dentro do laço $f^{1-p}(C)$ que o antecede.

Note que se z está fora do interior dos laços de E , z é iterado para o infinito,

pois neste caso $f_c^p(z)$ estará fora do interior de C , daí $|f_c^p(z)| > \max\{2, |c|, M+1\}$, o que implica, pelo Corolário 1.3, que z é iterado para o infinito. Logo, o conjunto de Julia está contido no interior dos laços de E , e este interior é desconexo.

Afirmamos que existem pontos do conjunto de Julia no interior de cada um dos laços de E . Com efeito, seja $z \in J(f_c)$, então $z \in \text{Int}(E) \subset C$. Como $J(f_c)$ é invariante por f_c^{-1} , segue que se $z \in J(f_c)$, então $f_c^{-1}(z) \in J(f_c)$. Pelo item (b) do Lema 2.5, f_c aplica cada metade do interior de E no interior de C , logo para $z \in J(f_c) \subset C$, $f_c^{-1}(z)$ tem elementos nas duas componentes conexas de E . Com isto, o conjunto de Julia está no interior dos dois laços de E , sendo portanto desconexo. ■

Exemplo 2.2 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2 - 2$. Vamos determinar o conjunto de Julia de f .*

Os pontos fixos de f satisfazem $f(z) = z$, ou seja, $z^2 - 2 = z$. Portanto, -1 e 2 são pontos fixos de f . Como $|f'(z)| = |2z| = 2|z|$, temos $|f'(2)| = 4 > 1$, assim 2 é ponto fixo repulsor de f . Por definição, $J(f)$ é o fecho dos pontos periódicos repulsores de f , disto segue que $2 \in J(f)$. Pelo item (c) do Corolário 2.1, $J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(2)}$. Se $z \in [-2, 2]$, então $f^{-1}(z) = \pm(z+2)^{\frac{1}{2}} \in [-2, 2]$.

Consequentemente, $f^{-k}(z) \in [-2, 2]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(2)}$ está contido no fecho de $[-2, 2]$. Logo, $J(f) \subset [-2, 2]$.

Para mostrar que $[-2, 2] \subset J(f)$, observe que $f(0) = -2$, $f^2(0) = f(f(0)) = f(-2) = 2$. Como 2 é ponto fixo de f , segue que $f^k(0) = 2$ para $k = 2, 3, 4, \dots$, de onde resulta $f^k(0) \rightarrow \infty$. Pelo Teorema 2.3, $-2 \in \mathcal{M}$ e $J(f)$ é conexo. Temos $2 \in J(f)$ e $-2 \in J(f)$, uma vez que $f^{-1}(2) = \{2, -2\}$, e sendo o $J(f)$ subconjunto conexo do intervalo $[-2, 2]$, segue que $J(f) = [-2, 2]$. Observe que o conjunto de Julia de f não é um fractal.

Apêndice A

Variáveis complexas

O objetivo deste apêndice é apresentar conceitos e resultados introdutórios sobre Variáveis Complexas. Utilizamos as seguintes referências bibliográficas: [1], [3], [4], [8], [9], [10], [11], [12], [14] e [18].

A.1 Limites de seqüências

Definição A.1 *Uma **seqüência** num conjunto U é uma função $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow U$, que associa a cada número natural não nulo n um número complexo z_n , chamado o n -ésimo termo da seqüência.*

A notação $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ é utilizada para designar a seqüência φ .

A noção de limite de uma seqüência de pontos em \mathbb{R}^2 se traduz naturalmente no caso de seqüência em \mathbb{C} a partir da identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 .

Definição A.2 *Diz-se que o número complexo z é **limite** da seqüência $(z_n)_{n \geq 1}$ quando, para todo número $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que todos os termos z_n com índice $n \geq n_0$ satisfazem a condição $|z_n - z| < \varepsilon$.*

Simbolicamente, escreve-se

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \equiv \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \quad n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon.$$

Se o limite de uma sequência existe, a sequência é denominada **convergente**.

Note que $|z_n - z| < \varepsilon$ significa que z_n pertence a bola aberta de centro z e raio ε , ou seja, $z_n \in B_\varepsilon(z)$.

Definição A.3 Dizemos que uma sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ em \mathbb{C} , é **limitada**, se existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \geq 1$.

Definição A.4 Dizemos que uma sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ em \mathbb{C} tem **limite infinito** se para todo $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $|z_n| > r$. Neste caso escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, $\lim z_n = \infty$, ou $z_n \rightarrow \infty$.

A.2 Algumas noções da topologia de \mathbb{C}

1) **Bola aberta** de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$ é, por definição, o conjunto

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}.$$

2) **Bola fechada** de centro z_0 e raio $r \geq 0$ é, por definição, o conjunto

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

3) **Interior de um conjunto**.

Dado $A \subset \mathbb{C}$, o interior de A é o conjunto

$$\text{Int}(A) = \{z \in \mathbb{C}; \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_r(z) \subset A\}.$$

4) Quando $z \in \text{Int}(A)$ diz-se que o conjunto A é uma **vizinhança** do ponto z .

5) Conjunto aberto

Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é aberto quando $A = \text{Int}(A)$.

6) Diz-se que um ponto z é **aderente** ao conjunto $A \subset \mathbb{C}$ quando z é limite de alguma sequência de pontos $z_n \in A$.

7) Chama-se **fecho** de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ ao conjunto \bar{A} formado por todos os pontos aderentes a A .

Pode-se demonstrar que $\bar{A} = \{z \in \mathbb{C}; \text{ para todo } r > 0 \text{ tem-se } B_r(z) \cap A \neq \emptyset\}$.

8) Conjunto fechado

Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é fechado se é igual ao seu fecho.

Pode-se demonstrar que A é fechado se, e somente se, o seu complementar é aberto.

9) A **fronteira** de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é o conjunto

$\partial A = \{z \in \mathbb{C}; \text{ para todo } r > 0 \text{ tem-se } B_r(z) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\}$.

10) Dizemos que um ponto $z \in \mathbb{C}$ é **ponto de acumulação** de $A \subset \mathbb{C}$ quando toda vizinhança V de z contém algum ponto de A diferente do próprio z .

Representa-se com A' o conjunto dos pontos de acumulação de A .

11) Se $z \in A \subset \mathbb{C}$ não é ponto de acumulação de A , diz-se que z é um **ponto isolado** de A .

12) Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é **perfeito** se é fechado e não possui pontos isolados.

13) Seja $M \subset \mathbb{C}$. Dizemos que $A \subset M$ é um **aberto relativo** de M (respec-

tivamente **fechado relativo** de M), se $A = U \cap M$, onde U é um aberto de \mathbb{C} (respectivamente fechado de \mathbb{C}).

14) Seja $A \subset \mathbb{C}$. Uma **cobertura** de A é uma família $\mathfrak{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ de subconjuntos de \mathbb{C} tal que $A \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{C}_\lambda$.

Quando cada conjunto \mathcal{C}_λ , $\lambda \in \mathcal{L}$, é aberto em \mathbb{C} , a cobertura $A \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{C}_\lambda$ é denominada aberta.

A cobertura $A \subset \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} \mathcal{C}_\lambda$ diz-se finita quando \mathcal{L} é um conjunto finito.

15) Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é **compacto** quando toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita.

Pode-se demonstrar que $A \subset \mathbb{C}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado. Consulte [11].

16) Uma **cisão** de um conjunto $M \subset \mathbb{C}$ é uma decomposição $M = A \cup B$ de M como união de dois subconjuntos abertos de M disjuntos A e B .

As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ equivalem a dizer que $A = M \setminus B$ e $B = M \setminus A$. Portanto, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A e B são abertos e fechados em M .

A cisão $M = A \cup B$ é dita trivial quando um dos abertos, A ou B é vazio.

17) Um conjunto $M \subset \mathbb{C}$ é **conexo** quando a única cisão possível em M é a cisão trivial.

Proposição A.1 *Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{C}$. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

A.3 Função, limite e continuidade

A.3.1 Função complexa de uma variável complexa

Seja A um subconjunto de \mathbb{C} . Uma **função complexa de uma variável complexa**, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, é uma correspondência que associa a cada elemento $z \in A$ um único elemento $w \in \mathbb{C}$, chamado imagem de z por f ou valor de f em z e denotado por $w = f(z)$. O conjunto A é denominado domínio de f e o conjunto de valores que f assume é denominado imagem de f .

Observe que a cada z corresponde apenas um único valor de w . Neste caso, o termo **função unívoca** é utilizado para designar função.

Se a cada z corresponde mais de um valor de w , dizemos que w é uma **função plurívoca** de z . Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, e cada uma delas é denominada um ramo da função plurívoca.

Nesta dissertação, a menos que se afirme o contrário, o termo função corresponde a função unívoca.

Definição A.5 (Função aberta) *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} . Uma função $f : M \rightarrow N$ chama-se aberta quando para cada aberto $A \subset M$, $f(A)$ é um subconjunto aberto de N .*

Analogamente, f é dita fechada se para cada fechado $B \subset M$, $f(B)$ é um subconjunto fechado de N .

Definição A.6 *Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma **transformação de similaridade** de raio ou escala $c > 0$ se $|f(x) - f(y)| = c|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{C}$.*

Uma similaridade transforma um conjunto de pontos em outro geometricamente similar com todos os comprimentos multiplicado pelo fator c .

A.3.2 Imagem inversa

Seja f uma função de X em Y e B um subconjunto de Y . A **imagem inversa** de B pela função f é o conjunto $f^{-1}(B)$, formado por todos os $x \in X$ tais que $f(x) \in B$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}.$$

Em alguns textos encontramos o termo *pré-imagem* para indicar imagem inversa.

Afirmção A.1 *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função, A e B subconjuntos de Y e C subconjunto de X . Então,*

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(Y \setminus B) = Y \setminus f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Y)$

d) $f^{-1}(f(C)) \supset C$

e) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Demonstração: Consulte [10]. ■

Proposição A.2 *Seja $f : X \rightarrow Y$ e $B \subset Y$. f é sobrejetiva $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset Y$.*

Demonstração: Consulte [10]. ■

A.3.3 Limites de funções

Definição A.7 *Sejam $X \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que w é limite de $f(z)$ quando z tende a z_0 , e escreve-se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(z) - w| < \varepsilon$ sempre que $z \in X$ e $0 < |z - z_0| < \delta$.*

Proposição A.3 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = L$, então $\lim_{z \rightarrow w} |f(z)| = |L|$.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

A.3.4 Função contínua

Definição A.8 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} . A função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $w \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*

Proposição A.4 *Se f é uma função polinomial complexa, então f é contínua.*

Demonstração: Consulte [12]. ■

Proposição A.5 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} , $K \subset M$ compacto e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. Então $f(K)$ é um conjunto compacto.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

Definição A.9 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. A função f é denominada **função própria** quando*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ em } M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty \text{ em } N.$$

Proposição A.6 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não constante. Então f é uma função própria.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

Proposição A.7 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} e $f : M \rightarrow N$ uma função própria. Então, para todo $K \subset N$ compacto, $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de M .*

Demonstração: Consulte [11]. ■

Teorema A.1 *Se K é um subconjunto compacto de \mathbb{C} , então toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

Proposição A.8 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} e $h : M \rightarrow N$ uniformemente contínua. Se a sequência de funções $f_n : X \rightarrow M$ converge uniformemente para $f : X \rightarrow M$, as funções $h \circ f_n : X \rightarrow N$ convergem uniformemente para $h \circ f : X \rightarrow N$.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

Corolário A.1 *Sejam M subconjunto compacto de \mathbb{C} , N subconjunto de \mathbb{C} e $h : M \rightarrow N$ contínua. Se a sequência de funções $f_n : X \rightarrow M$ converge uniformemente para $f : X \rightarrow M$, as funções $h \circ f_n : X \rightarrow N$ convergem uniformemente para $h \circ f : X \rightarrow N$.*

Demonstração: Consulte [11]. ■

A.4 Função analítica

Definição A.10 *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto U e seja $z_0 \in U$. Defini-se a **derivada de f em z_0** , e denota-se por $f'(z_0)$ como sendo o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*(caso exista). Se f tem derivada em z_0 , então f diz-se **derivável em z_0** .*

Escrevendo $h = z - z_0$, obtemos

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

A derivada $f'(z_0)$ algumas vezes é representada por $\left(\frac{df}{dz}\right)(z_0)$.

Proposição A.9 *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto U e seja $z_0 \in U$. Se f é derivável em z_0 , então f é contínua em z_0 .*

Demonstração: Consulte [14]. ■

Definição A.11 *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto U e seja $z_0 \in U$. A função f diz-se **analítica em z_0** se é derivável em z_0 e numa certa vizinhança de z_0 . Se f é analítica em todos os pontos de U , então diz-se **analítica em U** .*

Proposição A.10 *Sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Toda função polinomial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ é uma função analítica, com $f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + (n-2) a_{n-2} z^{n-3} + \dots + 2 a_2 z + a_1$.*

Demonstração: Consulte [14]. ■

Definição A.12 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $n \geq 1$. Um ponto $z \in \mathbb{C}$ é denominado **ponto crítico** de f se $f'(z) = 0$.*

Proposição A.11 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $n \geq 1$. Então f tem no máximo $d - 1$ pontos críticos em \mathbb{C} .*

Demonstração: Consulte [1]. ■

Proposição A.12 (Regra da Cadeia) *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas, onde A e B são subconjuntos abertos de \mathbb{C} e $f(A) \subset B$. Então, $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ é analítica e $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.*

Demonstração: Consulte [14]. ■

Teorema A.2 (Teorema da Função Inversa) *Sejam A um subconjunto aberto de \mathbb{C} e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ função analítica. Se f' é contínua e $f'(z_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança aberta U de z_0 e uma vizinhança aberta V de $f(z_0)$ tais que $f : U \rightarrow V$ é bijetiva e sua função inversa f^{-1} é analítica com derivada dada por $\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{\frac{d}{dz}f(z)}$, onde $w = f(z)$.*

Demonstração: Consulte [14]. ■

Teorema A.3 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Seja $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = 0$ e f não é identicamente nula em uma vizinhança de z_0 . Então z_0 é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$.*

Demonstração: Consulte [12]. ■

Corolário A.2 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, onde U é aberto e conexo. Se $f^{-1}(0)$ possui algum ponto de acumulação em U , então $f^{-1}(0) = U$, ou seja, $f \equiv 0$.*

Demonstração: Consulte [12]. ■

Corolário A.3 *Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções analíticas em U , onde U é aberto e conexo. Se f e g coincidem num subconjunto A de U com ponto de acumulação em U então $f \equiv g$ em U .*

Demonstração: Consulte [12]. ■

Definição A.13 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} . Uma função $f : M \rightarrow N$ é um **homeomorfismo** de M sobre N se f é bijetiva, contínua e possui inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.*

Definição A.14 *Sejam M e N subconjuntos de \mathbb{C} . Uma função $f : M \rightarrow N$ é um **difeomorfismo** de M sobre N se f é bijetiva, diferenciável e possui inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também diferenciável.*

Teorema A.4 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio complexo não constante possui pelo menos uma raiz.*

Demonstração: Consulte [12]. ■

Corolário A.4 *Seja $p(z)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$ e raízes $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ (não necessariamente todas distintas), então*

$$p(z) = c(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n),$$

onde c é uma constante complexa não nula.

Demonstração: Consulte [12]. ■

A.5 Conjugação topológica

Definição A.15 *Sejam as funções $f : M \rightarrow M$ e $g : N \rightarrow N$ onde M e N são subconjuntos de \mathbb{C} . Então f é topologicamente conjugada a g se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Neste caso, h é denominada conjugação topológica entre f e g .*

Podemos representar esta relação de conjugação topológica pelo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Observação A.1 Como h é invertível, $h^{-1}(h(f(z))) = f(z)$. Desde que $h \circ f = g \circ h$, podemos escrever $h^{-1}(g(h(z))) = f(z)$. Ou seja, $h^{-1} \circ g \circ h = f$.

Proposição A.13 Se a função f é topologicamente conjugada a g pelo homeomorfismo h , então f^n é conjugada a g^n pelo homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Demonstração: Consulte [3]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] BEARDON, Alan F., *Iteration of Rational Functions*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] CSIKÓS, Balázs, *Plane Curves*. Disponível em: <<http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif3.pdf>>. Acesso em: 05 abr. 2014.
- [3] DEVANEY, Robert L., *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison-Wesley, 1992.
- [4] FALCONER, Kenneth J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.
- [5] FREY, Sylvia, *Function Julia (c,k,v)*. Disponível em: <http://m2matlabdb.ma.tum.de/Julia.m?MP_ID=283>. Acesso em: 29 mar. 2014.
- [6] HANSELMAN, Duane; LITTLEFIELD, Bruce, *MATLAB 6: curso completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- [7] HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith, *Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2*. Tradução e adaptação António Ribeiro. 2009. Disponível em: <www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2013.

- [8] LAUREANO, Rosário; SOARES, Helena; MENDES, Diana, *Caderno: Análise Complexa*. Instituto Universitário de Lisboa, 2011. Disponível em: <http://home.iscte-iul.pt/~deam/html/AMII_AComplexa_2011.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2014.
- [9] LIMA, Elon L., *Análise Real, vol.1*. Rio de Janeiro: IMPA (Coleção Matemática Universitária), 8ª edição, 2006.
- [10] LIMA, Elon L., *Curso de Análise, vol.1*. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 9ª edição, 1999.
- [11] LIMA, Elon L., *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 4ª edição, 2007.
- [12] LINS NETO, Alcides, *Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 4ª edição, 1993.
- [13] LYNCH, Stephen, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*. Boston: Birkhäuser, 2004.
- [14] MARSDEN, Jerrold E.; HOFFMAN, Michael J., *Basic Complex Analysis*. New York: W. H. Freeman, third edition, 1999.
- [15] PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. New York: Springer-Verlag, second edition, 2004.
- [16] SCHEINERMAN, Edward R., *Invitation to Dynamical Systems*. Disponível em: <<http://www.ams.jhu.edu/~ers/invite/book.pdf>>. Acesso em: 29 maio 2014.
- [17] S.O.S. Mathematics CyberBoard. Problem with plotting a Julia set in Matlab. 2006 <<http://www.sosmath.com/CBB/viewtopic.php?t=25045>>. Acesso em: 23 fev. 2014.

- [18] SPIEGEL, Murray R., *Variáveis Complexas*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973.
- [19] STEMKOSKI, Lee, *Drawing the Mandelbrot Set with GeoGebra - part 1*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=954urFVfc_w>. Acesso em: 25 jan. 2014.
- [20] STEMKOSKI, Lee, *Drawing the Mandelbrot Set with GeoGebra - part 2*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=iyKLTlcpn9c>>. Acesso em: 25 jan. 2014.
- [21] UCEDA, Rafael A., *Propriedades Topológicas dos Conjuntos de Julia*. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Julio Mesquita Filho, 81f, 2008.