



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DINÂMICA DE APLICAÇÕES SIMPLES: PROPOSTA DE
ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

CARLOS FELIPE DA SILVA SARMENTO

Recife - PE
AGOSTO DE 2015

DINÂMICA DE APLICAÇÕES SIMPLES: PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

CARLOS FELIPE DA SILVA SARMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFRPE como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Márcia Pragana
Dantas.

Recife - PE
Agosto de 2015

DINÂMICA DE APLICAÇÕES SIMPLES: PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

CARLOS FELIPE DA SILVA SARMENTO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRPE como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:

Prof^a Dr^a Márcia Pragana Dantas (Orientadora)
UFRPE

Prof^a Dr^a Maité Kulesza
UFRPE

Prof^a Dr^a Verônica Gitirana
UFPE

*Dedico este trabalho à minha mãe que,
com o suor da labuta diária,
conquistou a leveza do lápis em minha
mão.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me auxiliar na conclusão desta etapa tão importante da vida, à minha mãe Inês, à minha esposa Sheyla e ao meu filho “Bebêbis” Rafael pela compreensão e contínuo apoio, à minha orientadora, Prof. Dr. Márcia Pragana, pelas retificações e ensinamentos que tanto enriqueceram este trabalho, ao Prof. Dr. Almir Olimpo Alves (*in memoriam*), por me mostrar a importância da continuidade da formação matemática, aos meus comandantes que verificam neste curso um nítido crescimento pedagógico, aos professores integrantes do PROFMAT, pela dedicação, postura profissional e respeito aos alunos, aos colegas de turma, com os quais construí estreito laço não apenas profissional como também afetivo, em especial aos amigos Cícero Raimundo, Eduardo, Jaildo Bezerra, Aliomar e Raul Bueno pelo incentivo e os famigerados dias de estudo na “Casa do Jajá”.

*"Força nenhuma no mundo interfere
sobre o poder da criação."*

João Nogueira

Resumo

Este trabalho tem por finalidade elaborar uma proposta de sequência didática relacionando o estudo dos sistemas dinâmicos discretos e a composição de funções a partir da análise do modelo logístico de Vershult, considerando uma população com uma taxa de natalidade constante e uma taxa de mortalidade diretamente proporcional à população.

Os conceitos preliminares do estudo da dinâmica discreta, tais como os conceitos de iteração e pontos fixos, repulsores, atratores, periódicos, dentre outros, são apresentados seguidos dos resultados clássicos. Alguns problemas motivadores que auxiliam na compreensão da importância do estudo dos sistemas dinâmicos discretos são exibidos. Mostram-se também a dinâmica em intervalos definidos e o comportamento gráfico da família quadrática, culminando com a aplicação dos resultados anteriores à evolução do modelo logístico.

Por fim, apresentamos uma proposta de sequência didática, cujo objetivo é, a partir de uma situação-problema dada usando valores definidos que são as condições iniciais, verificar o comportamento final, quando possível, de uma população P conhecida a população inicial P_0 .

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Composição de Funções, Iteração, Modelo logístico.

Abstract

This research aim to design a teaching sequence to relate the study of discrete dynamical systems and the composition functions from the logistic analysis model of Verhulst, considering a population with a constant birth rate and a mortality rate directly proportional to that population.

Preliminary concepts of discrete dynamical study are presented, such as the concepts of iterate and equilibrium points, repelling, attracting, periodic, among others, followed by the classical results. Some motivator problems that can help understanding the importance of discrete dynamical study are shown. It appears the dynamic in a defined interval and the graphic behavior of the quadratic family, culminating in the implementation of previous results in the logistic model evolution.

Finally, we present a proposed teaching sequence, whose aims is to verify, from a given situation-problem with defined values named initial conditions, the final evolution, where possible, of a population P known the initial population P_0 .

Keywords: Dynamical systems, Composition functions, Iterate, Logistic model.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Introdutórios	3
1.1 Princípio da indução finita	3
1.2 Sequências	4
1.3 Composição de funções	4
1.4 Teorema do Valor Intermediário	5
1.5 Derivada de uma função	7
1.6 Derivadas de funções polinomiais	9
1.7 Regra da cadeia	11
1.8 Teorema do Valor Médio	12
2 Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos	15
2.1 Sistemas dinâmicos discretos	15
2.2 Iteração de funções	15
2.3 Pontos fixos	18
2.4 Análise gráfica das órbitas	19
2.5 Ponto fixo atrator e repulsor	21
2.6 Pontos periódicos	22
3 Problemas Motivadores	25
3.1 Resolução de equações com uma variável	25
3.2 Cálculo de raízes quadradas por meio de adições, subtrações e multiplicações	26
3.3 Razão áurea e números de Fibonacci	28
4 A Família Quadrática	29
4.1 A primeira bifurcação	29
4.2 A segunda bifurcação	34
5 Evolução do Modelo Logístico	38
5.1 Crescimento e extinção de uma população	38

5.2	Equação logística ou equação de Verhulst	39
6	Sequência Didática	46
6.1	Preparando a sequência	46
6.1.1	Considerações iniciais	46
6.1.2	Público-alvo	46
6.1.3	Pré-requisitos	47
6.1.4	Recursos tecnológicos	47
6.1.5	Dificuldades previstas	47
6.1.6	Descrição geral	47
6.2	Aplicação da sequência	48
6.2.1	Considerações para o professor	48
6.2.2	Considerações do professor	49
	Referências Bibliográficas	51

Introdução

“La pensée n’est qu’un éclair au milieu d’une longue nuit. Mais c’est cet éclair qui est tout.”
Henri Poincaré

Os estudos e aplicações da teoria dos sistemas dinâmicos tiveram suas origens nos trabalhos de Johannes Kepler (1571 – 1628), em seus estudos sobre Mecânica Celeste, e Isaac Newton (1643 – 1727), a partir da formalização da mecânica clássica e consequente contribuição ao desenvolvimento da modelagem matemática, propiciando de sobremodo uma análise mais sofisticada e contínua do aparato matemático que modela fenômenos mecânicos, atingindo seu ápice nos trabalhos de Lagrange (1736 – 1813) e Hamilton (1805 – 1865), que interpretaram num contexto matemático a teoria da Mecânica Clássica.

Considerado um dos precursores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, o matemático Henri Poincaré (1854 – 1912) deparou-se com dificuldades analíticas intransitáveis na determinação exata das curvas contínuas, soluções das equações diferenciais ao estudar o problema dos três corpos e a estabilidade do sistema solar. Achou conveniente substituir o estudo das órbitas, fluxo contínuo no tempo, por órbitas discretas, no qual o tempo aumentava por saltos regulares, de onde surgiu esta nova teoria. Em sua obra *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, composta por três volumes e publicada entre 1892 e 1899, apresenta muitos avanços que vão incorporar o estudo dos sistemas dinâmicos. Como a confirmação de que as séries de Lindstedt são, na realidade, divergentes (conduzindo o matemático francês a descobrir o caos determinístico) e o estudo das propriedades assintóticas das soluções de uma equação diferencial tais como estabilidade e periodicidade.

O desenvolvimento dos meios computacionais nas décadas de 1960 e 1970 marcou o renascimento do estudo dos sistemas dinâmicos. No entanto, a falta de rigor matemático nos resultados obtidos pela metodologia experimental computacional deu origem a agitas polêmicas no âmbito científico. Segundo Villate (2007):

Os pioneiros da nova área dos sistemas dinâmicos foram confrontados com rejeições de publicação em revistas de renome, e avaliações negativas. Mas, por outro lado, a sua atividade despertou um interesse que foi aumentando exponencialmente e foi uma lufada de ar fresco para a comunidade científica, já que os seus métodos adaptam-se facilmente à realidade atual do trabalho científico.

Apenas em 1927 surge o primeiro livro publicado na área de sistemas dinâmicos, a obra *Dynamical Systems*, escrita pelo matemático americano George Birkhoff.

As principais ideias deste trabalho são baseadas nos trabalhos de Robert Devaney [3] que em suas obras apresenta de forma muito simplificada e tangível aos alunos tópicos de uma matemática mais complexa e se ramifica encontrando nos trabalhos de Jaime Villate [12] e Lenarduzzi [5] pontos de vista que complementam significativamente na produção deste trabalho.

No primeiro capítulo do trabalho são apresentados os conceitos introdutórios necessários para o melhor entendimento da construção das principais ideias no estudo dos sistemas dinâmicos discretos. tais ideias verificamos sistematicamente no segundo capítulo, como por exemplo as noções de iteração, órbitas, ponto fixo, atrator, repulsor, pontos periódicos, dentre outras. Podemos então considerar estes dois primeiros capítulos como um alicerce teórico para as aplicações vistas mais a frente.

No terceiro capítulo encontramos três problemas que têm por finalidade motivar o leitor a verificar a importância do estudo dos sistemas dinâmicos a partir de situações simples e já conhecidas pelos que estudam matemática.

No quarto capítulo introduzimos o conceito intuitivo de bifurcação a partir dos estudos de caso do parâmetro c na família quadrática $F_c(x) = x^2 + c$.

No quinto capítulo estudamos a dinâmica simples do modelo logístico $F(x) = kx(1 - x)$ a partir da análise de intervalos definidos de k , introduzindo a partir de valores específicos para esse k o conceito intuitivo de caos que por sua vez é um dos mais importantes na teoria da dinâmica discreta.

Por fim, uma sequência didática é proposta. Nosso principal objetivo é aplicar, em uma sala do primeiro ano do ensino médio, os conceitos elementares dos sistemas dinâmicos discretos a partir da relação com um conteúdo pertencente à matriz curricular do referido ano: A composição de funções.

Capítulo 1

Conceitos Introdutórios

Neste capítulo veremos alguns conceitos que tanto são imprescindíveis para o melhor entendimento das propriedades e definições inerentes ao estudo dos sistemas dinâmicos discretos, como também servem de ferramentas matemáticas para as demonstrações dos principais teoremas que alavancam essa teoria mostrados aqui neste trabalho. As principais ideias deste capítulo podem ser encontradas nos trabalhos de LIMA ([7]) e GUIDO-RIZZI ([4]).

1.1 Princípio da indução finita

O princípio de indução finita ou princípio de indução matemática é uma das propriedades mais importantes dos números naturais. Trata-se de uma consequência imediata do último dos cinco postulados que o matemático Giuseppe Peano (1858-1932) utilizou na construção dos números naturais.

Definição 1.1.1 (Princípio da indução matemática). *Seja r um número natural, e $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural $n \geq r$. Suponhamos que*

1. $P(r)$ é verdadeira;
2. $P(k) \implies P(k+1)$ para todo número natural $k \geq r$.

então $P(n)$ é verdadeira, qualquer que seja $n \geq r$.

Exemplo 1.1.1. *Use o princípio da indução matemática para provar que $2^n < 2^{n+1}$ para todo n natural.*

Solução.

Para $n = 1$, $2^1 = 2 < 2^{1+1} = 2^2 = 4$, verdadeiro.

Por hipótese de indução, devemos considerar um k natural de modo que a desigualdade

$2^k < 2^{k+1}$ seja verdadeira. Deve-se provar que $2^{k+1} < 2^{(k+1)+1}$. De fato, por hipótese, tem-se que $2^k < 2^{k+1}$. Multiplicando ambos os termos da desigualdade por 2,

$$2(2^k) < 2(2^{k+1}) \implies 2^{k+1} < 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}.$$

Segue que a desigualdade é válida para todo k natural. ■

1.2 Sequências

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto \mathbb{N} dos números naturais. Neste trabalho consideramos apenas sequências de números reais, ou seja, funções de \mathbb{N} em \mathbb{R} .

Comumente uma sequência é representada pela notação usual $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Abreviadamente : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n) .

Intuitivamente, dizer que um número a é limite da sequência (x_n) significa afirmar que, para valores muito grandes de n , os termos (x_n) tornam-se e se mantém tão próximos de a quanto se deseje. Ou seja, admitindo um "erro" através de um número real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos x_n da sequência que têm índice n maior do que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε . O índice n_0 depende de ε e, para valores cada vez menores de ε , n_0 deverá assumir um valor cada vez maior

Definição 1.2.1. *Diz-se que um número real a é limite de uma sequência (x_n) de números reais quando para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Simbolicamente, temos,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso, escreve-se $\lim x_n = a$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Assim, $\lim x_n = a$ significa que, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que a partir de n_0 , x_n pertence ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

1.3 Composição de funções

Sejam $F : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow C$ funções de modo que a imagem de F está contida no domínio de G .

Pode-se definir neste caso a função composta $G \circ F : A \mapsto C$, que consiste em aplicar F em x e depois G em $F(x)$, ou seja,

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)),$$

para todo $x \in A$.

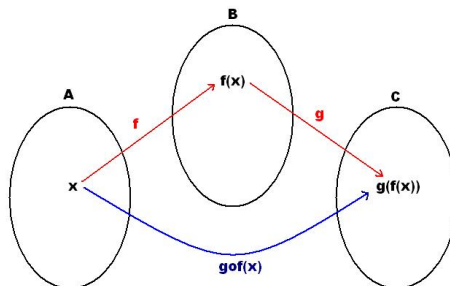


Figura 1.1: Representação da composição de funções $F \circ G$.

Proposição 1.3.1 (Associatividade na composição de funções). *A composição de funções é associativa. Isto é, dadas $F : A \mapsto B$, $G : B \mapsto C$, e $H : C \mapsto D$, tem-se que $(G \circ H) \circ F = H \circ (G \circ F)$.*

De fato, para todo x real temos,

$$(H \circ (G \circ F))(x) = (H \circ G)(F(x)) = H[G(F(x))] = H[(G \circ F)(x)] = [H \circ (G \circ F)](x).$$

Exemplo 1.3.1. *Dadas as funções reais F e G definidas por $F(x) = \sin x + x$ e $G(x) = x^2 - 1$ determine $(F \circ G)(x)$ e $(G \circ F)(x)$*

1. $(F \circ G)(x)$.

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = \sin(G(x)) + G(x) = \sin(x^2 - 1) + x^2 - 1.$$

2. $(G \circ F)(x)$. $(G \circ F)(x) = G(F(x)) = (F(x))^2 - 1 = (\sin x + x)^2 - 1$.

1.4 Teorema do Valor Intermediário

Definição 1.4.1. *Diz que a função F é contínua no ponto $x = a$ se existir o limite de $F(x)$ com x tendendo a a e esse limite for igual a $F(a)$; Diz-se que F é contínua em seu domínio, ou contínua, simplesmente, se ela for contínua em todos os pontos desse domínio.*

Teorema 1.4.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Se F for contínua em $[a, b]$ e se γ for um número real compreendido entre $F(a)$ e $F(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $F(c) = \gamma$.*

Este teorema é bastante intuitivo e afirma que se uma função é contínua e definida em "a" e "b", então ela tem por imagem qualquer valor entre $F(a)$ e $F(b)$.

Exemplo 1.4.1. *Dada a função $F(x) = x^2 + x + 3$, temos*

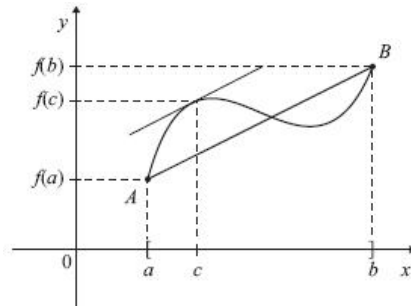


Figura 1.2: Representação geométrica do Teorema do Valor Intermediário.

$$F(0) = 0^2 + 0 + 3 = 3$$

$$F(2) = 2^2 + 2 + 3 = 9.$$

Assim, para qualquer valor γ entre 3 e 9 existe um c no intervalo $[0, 2]$ tal que $F(c) = \gamma$.

Vejamos alguns casos.

$$\text{Para } \gamma = 5, c = 1$$

$$\text{Para } \gamma = 6, c = 1,30278$$

$$\text{Para } \gamma = 7,5, c = 1,679$$

Exemplo 1.4.2. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma solução da equação $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ no intervalo $[0, 1]$.

Solução.

Nota-se que a equação $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ é equivalente à equação $\sqrt[3]{x} + x - 1 = 0$. encontrar os valores de x no intervalo que tornam a equação anterior uma sentença verdadeira no intervalo $(0, 1)$ é o mesmo que obter as raízes de $F(x) = \sqrt[3]{x} + x - 1$ nesse intervalo. Como F é uma soma de funções contínuas, então F é contínua. Analisando os valores de F nos extremos do intervalo $(0, 1)$, teremos,

$$F(0) = \sqrt[3]{0} + 0 - 1 = -1$$

$$F(1) = \sqrt[3]{1} + 1 - 1 = 1$$

Como F é contínua, então F assumirá todos os valores entre -1 e 1, ou seja, existe um valor $x_0 \in \mathbb{R}$ no intervalo $[0, 1]$ tal que $F(x_0) = 0$, já que 0 está nesse intervalo. ■

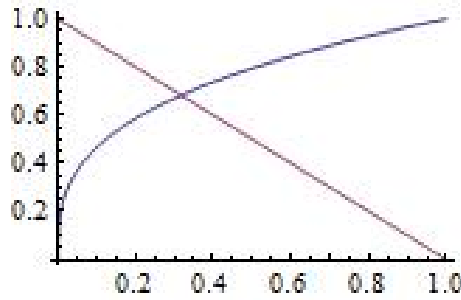


Figura 1.3: Interseção entre $\sqrt[3]{x}$ e $1 - x$.

1.5 Derivada de uma função

Nesta seção vamos dar a definição de derivada a partir do limite, bem como a interpretação geométrica dessa derivada.

Definição 1.5.1. A derivada de uma função $y = F(x)$ definida em um intervalo aberto I em um ponto x_0 pertencente a I é dada por,

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h},$$

caso esse limite exista. Se o limite existir a função F é dita derivável em x_0 .

Definição 1.5.2. Seja F uma função definida em um intervalo aberto I . Se F é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $F' : I \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $F'(x)$ que por sua vez é a função derivada de F .

Exemplo 1.5.1. Seja a função $F(x) = x^2$. Calcular sua derivada em $x = x_0$.

Solução. Como $F(x) = x^2$, temos

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0h + h^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x_0h + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

portanto, a derivada de F no ponto x_0 é $F'(x_0) = 2x_0$. ■

A derivada tem uma interpretação geométrica muito interessante associada ao conceito de reta tangente a uma curva. Seja F uma função e considere $x = x_0$ um ponto de seu domínio. Seja $x_1 = x_0 + h$, onde h é um número real. Na Figura abaixo,

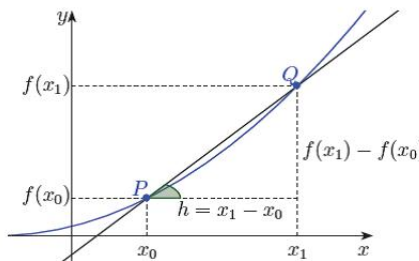


Figura 1.4: Reta secante interceptando o gráfico de F nos pontos P e Q .

observamos o gráfico de uma função F , onde traçamos a reta secante que passa pelos pontos $P = (x_0, F(x_0))$ e $Q = (x_1, F(x_1))$ supondo que $h > 0$.

O coeficiente angular ou inclinação da reta secante à curva passando pelos pontos P e Q é dado por,

$$\frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtemos retas secantes que cortam a curva em dois pontos P e Q_i cada vez mais próximos como verificamos na Figura abaixo:

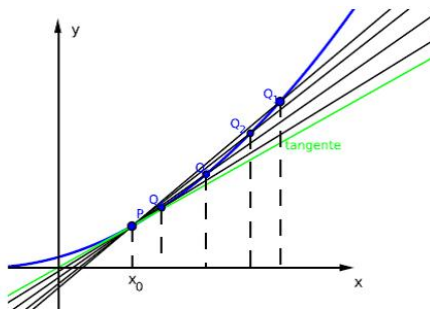


Figura 1.5: Retas secantes se aproximando da tangente no ponto P à medida que h se torna cada vez mais próximo de zero.

Intuitivamente, percebe-se que quando $x_0 + h$ se aproxima de x_0 então os pontos $F(x_0 + h)$ e $F(x_0)$ onde a reta secante corta a curva ficam cada vez mais próximos e assim estas curvas secantes se aproximam cada vez mais da tangente em x_0 . Quando h se aproxima de zero, se o quociente,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h},$$

se aproxima de um determinado valor, esse, intuitivamente, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente. Isto é,

Definição 1.5.3. A reta tangente a uma curva que é gráfico de $y = F(x)$ em um ponto $P = (x_0, F(x_0))$ é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

se o limite existir.

Conclui-se então que, geometricamente, a derivada de uma função $y = F(x)$ definida em um intervalo aberto I em um ponto x_0 é numericamente igual ao coeficiente angular da reta que passa por $P = (x_0, F(x_0))$ e que é tangente à curva $y = F(x)$.

1.6 Derivadas de funções polinomiais

Resultados importantes da dinâmica discreta que dizem respeito ao comportamento de um conjunto de pontos em relação a um ponto fixo dependem da derivada de uma função polinomial. Portanto, é de interesse do trabalho vermos a derivada dessas funções, que são do tipo,

$$F(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

onde $F(x)$ é uma função de x , com x real. Os termos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ são os *coeficientes* do polinômio e se $a_n \neq 0$, n é o *grau* de $F(x)$.

Para isso, precisamos de algumas propriedades da derivada que veremos a seguir.

Teorema 1.6.1 (Derivada da soma de duas funções). *Sejam F e G funções deriváveis em p . Então, a soma $F + G$ também é derivável e,*

$$(F + G)'(p) = F'(p) + G'(p),$$

ou seja, para duas funções, a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} (F + G)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{[F(x) + G(x)] - [F(p) + G(p)]}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{F(x) - F(p)}{x - p} + \frac{G(x) - G(p)}{x - p} \right] = F'(p) + G'(p). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6.2 (Derivada da soma de n funções). *Se F_1, F_2, \dots, F_n são funções deriváveis em p , com $n \geq 2$, então $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ é derivável em p e*

$$(F_1 + F_2 + \dots + F_n)'(p) = (F_1)'(p) + (F_2)'(p) + \dots + (F_n)'(p)$$

Demonstração. Por indução, para $n = 2$, recaímos no Teorema 1.6.1. Por hipótese de indução, devemos supor que a propriedade é válida para um dado k natural maior que 2, ou seja,

$$(F_1 + F_2 + \dots + F_k)'(p) = (F_1)'(p) + (F_2)'(p) + \dots + (F_k)'(p).$$

Admitindo $n = k + 1$, temos,

$$(F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1})'(p) = (F_1)'(p) + (F_2)'(p) + \dots + (F_k)'(p) + (F_{k+1})'(p),$$

que por sua vez pode ser escrito na forma,

$$((F_1 + F_2 + \dots + F_k) + F_{k+1})'(p) = [(F_1)'(p) + (F_2)'(p) + \dots + (F_k)'(p)] + (F_{k+1})'(p).$$

Segue que se a afirmação é verdadeira para $n = k$ também o será para $n = k + 1$. Logo pelo Principio da Indução Finita, vale para todo natural $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 1.6.3 (Derivada da potência). *Seja $n \neq 0$ um número natural. É válida a seguinte fórmula de derivação*

$$F(x) = x^n \implies F'(x) = nx^{n-1}$$

Demonstração. Sabe-se que,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Fazendo $x+h = t$ (isto é, $t \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$) então,

$$F'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x}.$$

A partir da propriedade distributiva podemos concluir que,

$$(t-x)[t^{n-1} + t^{n-2}.x + t^{n-3}.x^2 + \dots + x^{n-1}] = t^n - x^n$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x) \cdot \overbrace{[t^{n-1} + t^{n-2}.x + t^{n-3}.x^2 + \dots + x^{n-1}]} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} [t^{n-1} + t^{n-2}.x + t^{n-3}.x^2 + \dots + x^{n-1}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Como $t \in x$,

$$\lim_{t \rightarrow x} [t^{n-1} + t^{n-2}.x + t^{n-3}.x^2 + \dots + x^{n-1}] = x^{n-1} + x^{n-2}.x + x^{n-3}.x^2 + \dots + x^{n-1},$$

onde verificamos n parcelas iguais a x^{n-1} . Portanto, $F'(x) = n.x^{n-1}$. \square

Baseado nos teoremas vistos anteriormente, podemos obter a derivada da função polinomial.

Proposição 1.6.1 (Derivada de uma função Polinomial). *Dada a função polinomial*

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

em que $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_0$ são funções deriváveis, então a função polinomial,

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

é derivável e sua derivada se escreve como,

$$F'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) a_{n-2} x^{n-3} + \dots + a_1,$$

ou ainda,

$$F'(x) = \sum_{i=0}^n (n-i) a_{n-i} x^{(n-i-1)}.$$

Exemplo 1.6.1. *Calcule a derivada de $F(x) = 3x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 6x^2 + x + 2$*

Solução.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(3x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 6x^2 + x + 2 \right)' \\ &= (3x^4)' - \left(\frac{1}{4}x^3 \right)' + (6x^2)' + (x)' + (2)' \\ &= 4 \cdot 3x^{4-1} + 3 \left(\frac{-1}{4}x^{3-1} \right) + 2 \cdot 6 \cdot x^{2-1} + 1x^{1-1} + 0 \end{aligned}$$

portanto, $F'(x) = 12x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 12x + 1$. ■

1.7 Regra da cadeia

Nesta seção vamos ver a derivada da função obtida a partir da composição de funções e conhecida como Regra da Cadeia. visando unicamente a aplicação direta numa propriedade do capítulo 2, a demonstração dessa regra não será apresentada.

Teorema 1.7.1 (Regra da cadeia). *Sejam $y = F(x)$ e $x = G(t)$ duas funções deriváveis com a imagem de G contida no domínio de F . Portanto, $H(t) = F(G(t))$ é derivável e vale*

$$H'(t) = F'(G(t)) \cdot G'(t),$$

com t pertencente ao domínio de G .

Exemplo 1.7.1. *Calcule $F'(x)$, sendo $F(x) = (3x^2 + 1)^3$.*

Solução. Considerando $F(x) = u^3$, onde $u = 3x^2 + 1$, temos $F'(x) = (u^3)'(u)' = 3(3x^2 + 1)^2(6x)$ ou seja, $F'(x) = 18x(3x^2 + 1)^2$. ■

Exemplo 1.7.2. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $G(x) = F(\cos x)$. Calcule $G'(\frac{\pi}{3})$ supondo $F'(\frac{1}{2}) = 4$.

Solução.

Pela regra da cadeia,

$$G'(x) = F'(x) \cdot (\cos x)' \implies G'(\frac{\pi}{3}) = F'(\cos \frac{\pi}{3}) \cdot (\cos \frac{\pi}{3})',$$

ou seja,

$$G'(\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot (\cos \frac{\pi}{3})'.$$

Então,

$$G'(\frac{\pi}{3}) = -(\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot F'(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{3}$$

.

■

1.8 Teorema do Valor Médio

Lema 1.8.1 (Teorema de Rolle). *Se uma função F for contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $F(a) = F(b)$, então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que $F'(c) = 0$.*

Teorema 1.8.1 (Teorema do Valor Médio). *Se F for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá um c em (a, b) de modo que,*

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a)$$

Demonstração. Seja F uma função definida em $[a, b]$. Consideremos a função S dada por

$$S(x) = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a).$$

O gráfico de S é a reta passando pelos pontos $(a, F(a))$ e $(b, F(b))$. Considere agora uma função G dada por

$$G(x) = F(x) - S(x), \text{ com } x \in [a, b]$$

com $x \in [a, b]$. Como G é contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e $G(a) = G(b)$, pelo lema 1.8.1 existe c em (a, b) tal que $G'(c) = 0$. temos

$$G'(x) = F'(x) - S'(x)$$

Como $S'(x) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$, segue que

$$G'(x) = F'(x) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

e

$$G'(c) = F'(c) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Sendo $G'(c) = 0$,

$$0 = F'(c) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

E portanto $F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a)$. □

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio afirma que existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, F(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, F(a))$ e $(b, F(b))$ como indica a figura a seguir

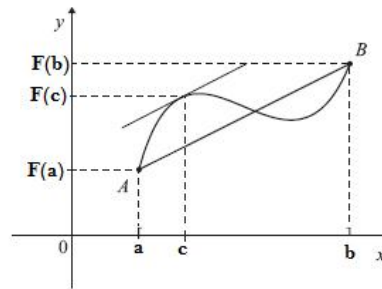


Figura 1.6: Representação gráfica do Teorema do Valor Médio

Exemplo 1.8.1. Seja $F(x) = x^2$ definida no intervalo $[-1, 3]$. Calcular o valor de c que o Teorema do Valor Médio garante existir.

Solução.

Neste caso, $a = -1$ e $b = 3$. Calculando $F(-1)$ e $F(3)$,

$$F(a) = F(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$F(b) = F(3) = 3^2 = 9,$$

Como F é derivável para todo x , $F'(x) = 2x$, existe um c no intervalo $-1 < x < 3$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) \iff$$

$$9 - 1 = 2c \cdot (3 - (-1))$$

$8 = 2c \cdot 4$, de onde concluimos que $c = 1$

Isto é, o valor de c que o Teorema do Valor Médio garante existir em $[-1, 3]$ é 1. ■

Capítulo 2

Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Os principais conceitos deste capítulo são encontrados nos trabalhos de DEVANEY([3]), VILLATE([12]), CIPOLLI([2]) e LENARDUZZI([5]).

2.1 Sistemas dinâmicos discretos

Em diversas áreas do conhecimento humano, observamos que o estado de um sistema apenas muda nos instantes t_0, t_1, t_2, \dots . No intervalo de tempo entre esses dois instantes, o estado permanece constante (VILLATE - 2007). Isto é, a variável tempo não flui continuamente mas se apresenta de maneira discreta onde as grandezas envolvidas são medidas em instantes isolados (de hora em hora, dia em dia, etc.) e formam uma sequência de valores que descrevem a evolução do fenômeno em estudo (MESQUITA - 2013). Sistemas dinâmicos que se comportam dessa forma são chamados sistemas dinâmicos discretos. Apresentaremos nesse capítulo os conceitos preliminares que alicerçam o estudo desses sistemas usando sistemas dinâmicos obtidos da composição de funções simples.

Usaremos o termo função suave para dizer que a função tem o grau de diferenciabilidade confortável, ou seja, aquele desejável.

2.2 Iteração de funções

Considere uma função F . A composição de F com ela mesma nos fornece $F(F(x)) = F^2(x)$. A composição de $F^2(x)$ com $F(x)$ por sua vez é $F^2(F(x)) = F^3(x)$. A análise sucessiva dessas composições de modo que o resultado de uma composição depende do resultado anterior é chamada *iteração da função F* , onde F^2 é a segunda iterada, F^3 é a

terceira iterada e assim por diante.

Seja F uma função suave. Com o objetivo de descrever a dinâmica de F , é de interesse analisar o comportamento dos pontos sob iteração de F .

Definição 2.2.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$, vamos denotar a n -ésima iterada de $F(x)$ por $F^n(x)$, onde $F^n(x)$ representa $F(F(\dots(F(x)\dots)))$. isto é, F composta com ela mesma "n" vezes. Assim,*

$$F^2 = F \circ F \quad ; \quad F^3 = F \circ F \circ F$$

e assim por diante. Sendo $x_0 \in \mathbb{R}$, a sequência de pontos

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^n(x_0), \dots$$

ou ainda $F^n(x_0)$, $\forall n > 0$ é chamada de órbita de x_0 . Ou seja,

$$O(x_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(x_0)$$

e $F^n(x_0)$ é a n -ésima iterada de x_0 .

Exemplo 2.2.1. *Seja $F(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 625$, então a órbita de x_0 é*

$$x_0 = 625 \ ; \ x_1 = \sqrt{625} = 25 \ ; \ x_2 = \sqrt{25} = 5 \ ; \ x_3 = \sqrt{5} = 2,236\dots$$

Exemplo 2.2.2. *Dada a função $F(x) = x + 3$, encontre $F^2(x)$, $F^3(x)$ e $F^n(x)$.*

Solução.

$$F^2(x) = F(F(x)) = F(x) + 3 = (x + 3) + 3 = x + 6$$

$$F^3(x) = F(F(F(x))) = F^2(x) + 3 = (x + 6) + 3 = x + 9.$$

Continuando dessa forma, observa-se que $F^n(x) = x + 3n$, para n natural, que pode ser demonstrado usando o princípio de indução (ver a definição 1.1.1).

De fato, por indução temos para $n = 1$, $F^1(x) = x + 3$. Supondo que a sentença seja verdadeira para um dado $n = k$ natural, admite-se então que $F^k(x) = x + 3k$. Para $n = k + 1$, tem-se

$$F^{k+1}(x) = F^k(F(x)) = F(x) + 3k \quad (\text{Por hipótese de indução})$$

e como $F(x) = x + 3$, segue que,

$$F^k(F(x)) = (x + 3) + 3k = x + 3.(k + 1),$$

concluindo a demonstração. ■

Uma das questões fundamentais da dinâmica discreta é se podemos prever o destino de todas as órbitas de F , ou seja, o que pode ser dito sobre o comportamento de $F^n(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Será visto mais adiante que até mesmo para mapas de funções quadráticas simples, a resposta a essa pergunta é difícil, todavia muito interessante.

Apresenta-se agora um exemplo de um sistema dinâmico bem simples com aplicação na matemática financeira.

Exemplo 2.2.3. *Um cliente deposita 400 reais em um banco. Sabe-se que os juros são de 20% ao ano. Se o cliente deixa o dinheiro em sua conta em n anos, quanto o cliente terá de montante na conta ao final desse período?*

Solução.

Ao término do primeiro ano, percebe-se um aumento de 20% ao capital inicial A_0 . O cliente obtém, então, o montante A_1 , onde

$$A_1 = A_0 + 0,2A_0 = 1,2A_0$$

e assim $A_1 = 480$ reais. Ao final de cada ano efetuamos a mesma operação

$$A_2 = 1,2A_1; A_3 = 1,2A_2; \dots; A_n = 1,2A_{n-1}$$

Precisamos então ter conhecimento do resultado anterior para encontrarmos o próximo termo na relação de recorrência $A_n = 1,2A_{n-1}$. Definindo uma função $F(x) = 1,2x$ escrevemos

$$A_1 = F(A_0); A_2 = F(A_1); A_3 = F(A_2), \dots$$

e dessa maneira

$$\begin{aligned} A_2 &= F(F(A_0)) = (1,2)^2 \cdot A_0 \\ A_3 &= F(F(F(A_0))) = (1,2)^3 \cdot A_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

podemos assim concluir que a n -ésima iteração é dada por

$$A_n = F \circ \dots \circ F(A_0) = (1,2)^n \cdot A_0$$

ou seja, ao calcularmos $(1,2)^n$ e multiplicarmos o resultado pelo capital inicial de 400 reais obtemos A_n . ■

No exemplo anterior, verifica-se que o montante submetido a um juro cumulativo numa determinada aplicação possui um crescimento discreto. As equações que representam relações entre as mudanças discretas das variáveis, isto é, mudanças das variáveis em intervalos determinados, são chamadas de equações discretas ou relações de recorrência.

Observa-se ainda no exemplo que o valor da n -ésima primeira geração x_{n+1} é uma função F da n -ésima geração x_n , ou seja,

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (2.1)$$

que por sua vez é denominada *equação de diferenças*, onde F é uma função definida em $A \subset \mathbb{R}$. Deve-se observar que a equação 2.1 pode ser obtida a partir de iterações

$$\begin{aligned} x_0 &= F^0(x_0) \\ x_1 &= F^1(x_0) = F(x_0) \\ x_2 &= F^2(x_0) = F(F(x_0)) \\ &\vdots \\ x_n &= F^n(x_0) = F(F^{n-1}(x_0)) \\ x_{n+1} &= F^{n+1}(x_0) = F(F^n(x_0)) = F(x_n) \end{aligned}$$

2.3 Pontos fixos

Definição 2.3.1. Quando sucessivas aplicações da função F não alteram o valor inicial, dizemos que existe um ponto x^* onde o estado do sistema permanece constante. esse ponto é um ponto fixo ou ponto de equilíbrio do sistema. Para isso acontecer, é condição necessária e suficiente que

$$F(x^*) = x^*.$$

Mais geralmente, $F^n(x^*) = x^*$ para todo n , uma vez que

$$F^n(x^*) = F^{n-1}(F(x^*)) = F^{n-1}(x^*) = \dots = F(x^*) = x^*$$

No gráfico das iteradas, os pontos fixos correspondem às abscissas de todos os pontos onde a curva $F(x)$ intersecta a reta $y = x$ no diagrama de degraus como pode ser observado no exemplo seguinte

Exemplo 2.3.1. Os pontos de equilíbrio da equação $x_{n+1} = 2x_n^2 + x_n - 2$ são $x^* = 1$ e $x^* = -1$ pois temos $F(x) = 2x^2 + x - 2$ e considerando x^* como sendo os possíveis pontos fixos, então

$$F(x^*) = x^* \iff 2(x^*)^2 + x^* - 2 = x^* \iff 2(x^*)^2 - 2 = 0$$

cujas soluções são $x^* = 1$ e $x^* = -1$.

Teorema 2.3.1 (Teorema do Ponto Fixo). Suponha que $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é contínua. Então existe um ponto fixo para F em $[a, b]$.

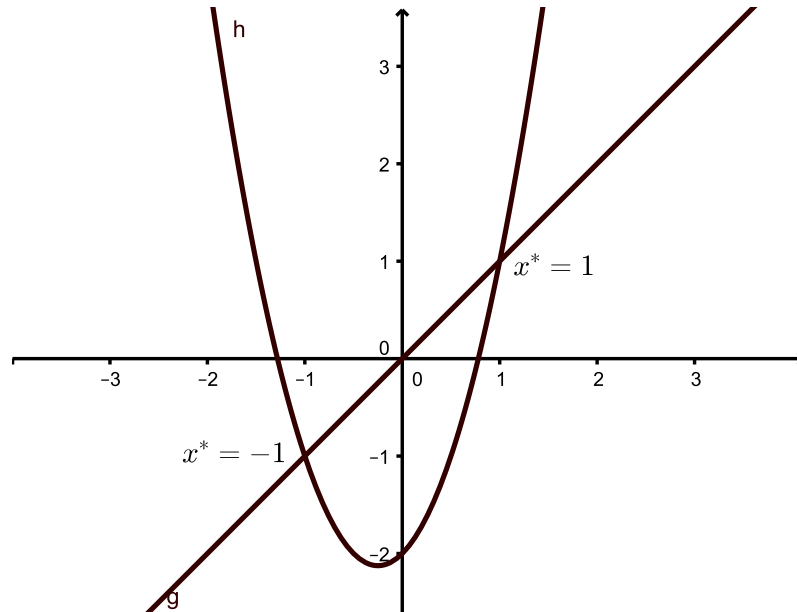


Figura 2.1: pontos fixos da equação $x_{n+1} = 2x_n^2 + x_n - 2$

Demonstração. Considere a função $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(x) = F(x) - x$. Como F é contínua, segue que H é contínua. além disso, H satisfaz

$$H(a) = F(a) - a \geq 0 \quad \text{e} \quad H(b) = F(b) - b \leq 0$$

e dessa forma, pelo Teorema 1.4.1, existe $c \in [a, b]$, com $H(c) = 0$. Assim, $H(c) = F(c) - c = 0$, o que implica que $F(c) = c$. Portanto, c é um ponto fixo. \square

2.4 Análise gráfica das órbitas

Seja F uma função. Para se representar graficamente a órbita de um determinado ponto x_0 , iniciamos obtendo os pontos de intersecção da reta diagonal $y = x$ com o gráfico de F . Dessa forma, encontraremos os pontos fixos de F . O primeiro ponto na obtenção da órbitas tem coordenadas (x_0, x_0) e se encontra na reta $y = x$. A partir desse ponto, traça-se uma reta vertical que intercepta o gráfico de F no ponto $(x_0, F(x_0))$. Partindo desse ponto, traça-se a reta horizontal que intercepta este ponto, encontrando a reta diagonal $y = x$ no ponto $(F(x_0), F(x_0))$ e encontra o gráfico de F no ponto de coordenadas $(F(x_0), F^2(x_0))$. Traçamos a reta horizontal de modo a interceptar a reta $y = x$ no ponto de coordenadas $(F^2(x_0), F^2(x_0))$, e assim sucessivamente.

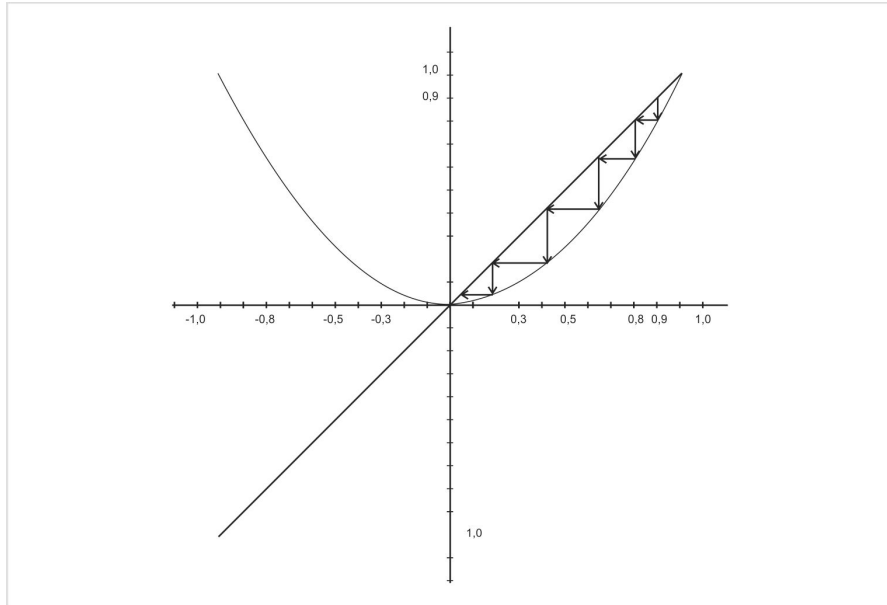


Figura 2.2: Representação gráfica da órbita do ponto $x_0 = 0,9$ em $F(x) = x^2$.

Exemplo 2.4.1. Dada a função $F(x) = x^3 - 3x$, obtemos os pontos fixos ao resolvermos a equação $F(x^*) = x^*$. isto é, $(x^*)^3 - 3x^* = x^*$, então

$$(x^*)^3 - 3x^* = x^* \iff (x^*)^3 - 4x^* = 0 \iff x^* \cdot ((x^*)^2 - 4) = 0 \iff x^* \cdot (x^* + 2) \cdot (x^* - 2) = 0$$

o que nos faz concluir que $x^* = 0$ ou $(x^* + 2) = 0$ ($x^* = -2$) ou $(x^* - 2) = 0$ ($x^* = 2$). Portanto, os pontos fixos são $-2, 0$ e 2 .

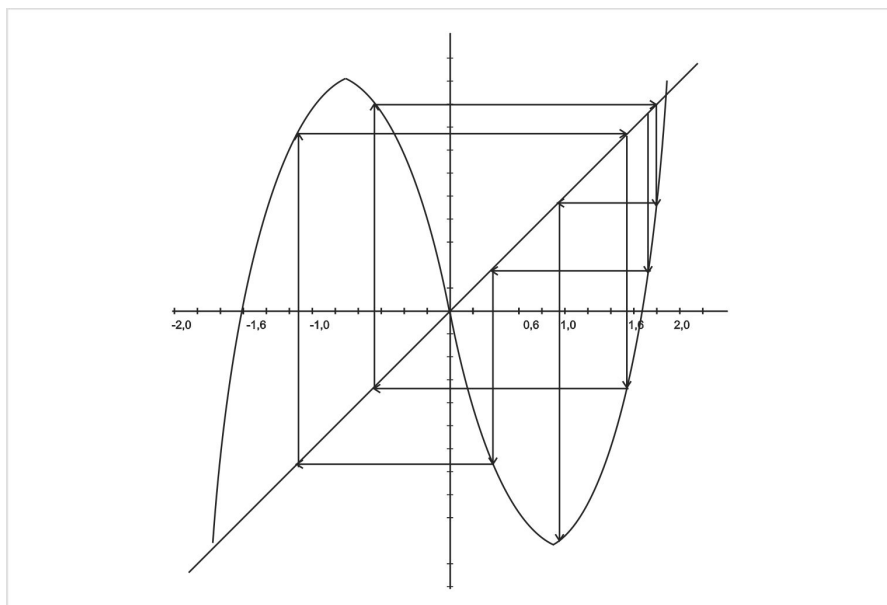


Figura 2.3: Representação gráfica da órbita do ponto $x_0 = 1,8$ em $F(x) = x^3 - 3x$.

2.5 Ponto fixo atrator e repulsor

Definição 2.5.1 (Ponto fixo atrator). *Seja x^* um ponto fixo de F , dizemos que x^* é um ponto fixo atrator de F se existe uma vizinhança U de x^* em \mathbb{R} de modo que, se y^* pertence a U , temos que $F^n(x) \in U$ para todo n e, além disso, $F^n(y^*) \rightarrow x^*$ com $n \rightarrow \infty$*

Definição 2.5.2 (Ponto fixo repulsor). *Seja x^* um ponto fixo de F , dizemos que x^* é um ponto fixo repulsor de F se toda órbita (exceto x^*) sair de U sob iteração de F .*

Se um ponto fixo não é nem atrator nem repulsor, ele é chamado de ponto fixo neutro.

Na proposição a seguir vemos as condições que determinam se um ponto fixo é atrator, repulsor ou se nada podemos afirmar sobre este ponto :

Proposição 2.5.1. *Sendo x^* um ponto fixo de uma função F diferenciável, então*

1. x^* é um ponto fixo atrator se $|F'(x^*)| < 1$;
2. x^* é um ponto fixo repulsor se $|F'(x^*)| > 1$;
3. Nada pode ser afirmado sobre x^* quando $|F'(x^*)| = 1$.

Demonstração. Provaremos inicialmente o caso (1). Suponha que $|F'(x^*)| = p < 1$. Escolhendo um k real tal que $p < k < 1$. Como F é contínua, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que $|F'(x)| < k$ para todo x no intervalo $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Pelo teorema 1.8.1, dado qualquer $x \in I$ temos

$$\frac{F(x) - x^*}{x - x^*} = \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*} = F'(c)$$

para algum valor de c entre x e x^* . Assim, temos

$$|F(x) - x^*| < k \cdot |x - x^*|.$$

Segue que $F(x)$ é mais próximo de x^* que x de modo que $F(x) \in I$. Aplicando este resultado novamente, temos

$$|F^2(x) - x^*| < k \cdot |F(x) - x^*| < k^2 \cdot |x - x^*|,$$

generalizando para n iterações, temos

$$|F^n(x) - x^*| < k^n |x - x^*|$$

de modo que $F^n(x) \rightarrow x^*$ em I , conforme necessário, uma vez que $0 < k < 1$. As demonstrações dos casos (2) e (3) são análogas. \square

Para a melhor compreensão do que pode ocorrer quando $|F(x^*)| = 1$, considere as seguintes funções :

1. $F(x) = x + x^3$
2. $G(x) = x - x^3$
3. $H(x) = x + x^2$

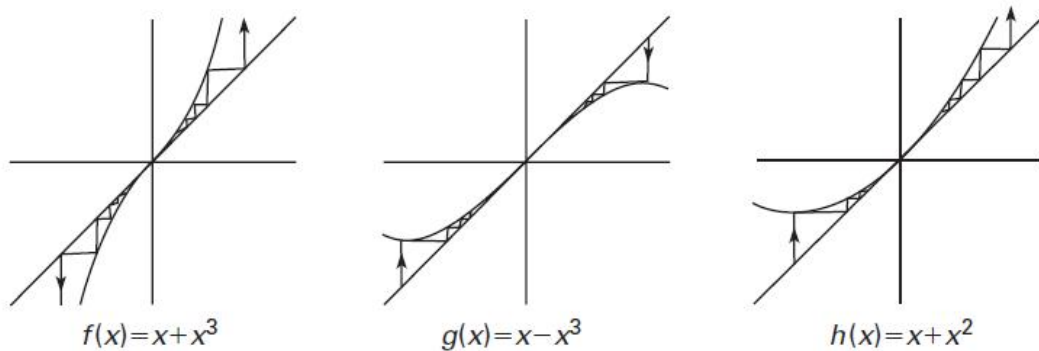


Figura 2.4: exemplos gráficos para $|F(x^*)| = 1$.

Todas apresentam em comum o ponto fixo $x^* = 0$. Para os três casos temos $|F(0)| = 1$, mas a representação geométrica da figura 2.4 mostra que em F o ponto fixo 0 é repulsor, em G o ponto fixo 0 é atrator e em H o ponto fixo 0 é atrator a esquerda e repulsor a direita.

2.6 Pontos periódicos

Vimos que qualquer elemento da sequência x_0, x_1, x_2, \dots pode ser obtido de x_0 a partir da relação de recorrência

$$x_n = F^n(x_0).$$

Um ponto x_0 faz parte de um ciclo de período m se $F^m(x_0) = x_0$ mas $F^j(x_0) \neq x_0$, para $j < m$. isto significa que uma solução será um ciclo de período m se for uma sequência formada pelos valores $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \dots$. Os pontos x_p , para $p = 0, 1, \dots, m - 1$, são denominados *pontos periódicos com período m* .

Observa-se que

$$\begin{aligned} F^m(x_1) &= F^{m+1}(x_0) = F(F^m(x_0)) = F(x_0) = x_1 \\ F^m(x_2) &= F^{m+1}(x_1) = F(F^m(x_1)) = F(x_1) = x_2 \\ &\vdots \\ F^m(x_{m-1}) &= F^{m+1}(x_{m-2}) = F(F^m(x_{m-2})) = F(x_{m-2}) = x_{m-1} \end{aligned}$$

Pode-se resumir as igualdades anteriores afirmando que os pontos x_p , para $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$, formam um ciclo de período m se forem pontos fixos da função $F^m(x)$ e como $F^j(x_0) \neq x_0$ para $j < m$, isto significa que os pontos x_p não podem ser pontos fixos de $F^j(x)$.

Para descobrir se um dado ciclo de pontos periódicos é atrator ou repulsor, utiliza-se o teorema a seguir

Teorema 2.6.1. *Considere os pontos x_p , para $p = 0, 1, 2, \dots, m-1$, dos m pontos periódicos do ciclo de $F^m(x_0)$, então*

1. *Se o valor absoluto do produto da derivada dos m pontos do ciclo for maior que 1, o ciclo será repulsivo.*
2. *Se o valor absoluto do produto da derivada dos m pontos do ciclo for menor que 1, o ciclo será atrativo.*

Demonstração. Inicialmente, deve-se demonstrar que a derivada de $F^m(x_0)$ é igual ao produto da derivada de F em todos os pontos do ciclo de pontos periódicos. Isto é

$$(F^m(x_0))' = F'(x_0).F'(x_1).F'(x_2)...F'(x_{m-1}).$$

De fato, pela teorema 1.7.1, temos

$$\begin{aligned} (F^m(x_0))' &= (F(F^{m-1}(x_0)))'.(F^{m-1}(x_0))' = (F(x_{m-1}))'.(F^{m-1}(x_0))' \\ (F^{m-1}(x_0))' &= (F(F^{m-2}(x_0)))'.(F^{m-2}(x_0))' = (F(x_{m-2}))'.(F^{m-2}(x_0))' \\ (F^{m-2}(x_0))' &= (F(F^{m-3}(x_0)))'.(F^{m-3}(x_0))' = (F(x_{m-3}))'.(F^{m-3}(x_0))' \\ &\dots \\ (F^2(x_0))' &= (F(F(x_0)))'.(F(x_0))' = (F(x_1))'.(F(x_0))'. \end{aligned}$$

Portanto, pode-se concluir que

$$(F^m(x_0))' = (F(x_{m-1}))'.(F(x_{m-2}))'.(F(x_{m-3}))' \dots (F(x_1))'.(F(x_0))' = \prod_{j=0}^{m-1} F'(x_j) \quad (2.2)$$

1. Se $|\prod_{j=0}^{m-1} F'(x_j)| > 1$, segue que $|(F^m(x_0))'| > 1$ e o ciclo é repulsor.
2. Se $|\prod_{j=0}^{m-1} F'(x_j)| < 1$, segue que $|(F^m(x_0))'| < 1$ e o ciclo é atrator.

□

Se o valor absoluto do produto da derivada dos m pontos do ciclo for igual a 1, o ciclo poderá ser atrativo ou repulsivo, em diferentes regiões.

Robinson (1995) afirma que numa dada função F de caráter razoavelmente simples, já se torna complexo definir a derivada de sua composta, caso exista, em $F^2(x)$. Torna-se mais difícil à medida que aumenta a quantidade de iteradas. Daí uma das

importâncias da aplicação da conclusão 2.2. Ferreira (2008) verifica a praticidade da conclusão pelo fato de dispensar (para o cálculo da derivada do ponto) o uso excessivo da Regra da Cadeia, desde que F seja diferenciável em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$.

Capítulo 3

Problemas Motivadores

Neste capítulo são apresentados três problemas interessantes em cujas resoluções são inseridos alguns dos conceitos elementares vistos no capítulo anterior. Verificamos a partir dessas soluções a importância de se estudar a dinâmica envolvida numa dada sequência de pontos. Os principais conceitos envolvidos nos problemas deste capítulo podem ser encontrados em VILLATE [12].

3.1 Resolução de equações com uma variável

Problema 3.1.1. *O problema consiste em obter os valores de x de uma função real F que verificam a equação $F(x) = 0$.*

Algumas equações não podem ser resolvidas de forma analítica, como por exemplo $x^3 - \text{sen}(3x) = 8$. Tais equações deverão ser resolvidas por métodos numéricos, ou seja, devemos encontrar um sistema dinâmico cuja relação de recorrência seja convergente, de modo que os resultados se aproximem das soluções da equação.

Se a equação $F(x) = 0$ pode ser escrita na forma

$$G(x) = x$$

As soluções são os pontos fixos do sistema dinâmico

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

E para obter o ponto fixo, basta escolhermos um valor inicial qualquer e calcular a evolução do sistema.

Exemplo 3.1.1. *Encontre a solução da equação $x - \cos(x) = 0$.*

Solução.

Pode-se usar o método da iteração ao escrever a equação na forma

$$x = \cos(x)$$

Consideramos o sistema dinâmico com relação de recorrência

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

Escolhe-se, então, um valor inicial qualquer e verifica-se a evolução do sistema

0,54030230586814
 0,85755321584639
 0,65428979049778
 0.79348035874257
 0.70136877362276
 0.76395968290065
 0.72210242502671
 0.75041776176376
 0.73140404242251
 0.74423735490056
 0.73560474043635
 0.74142508661011
 0.73750689051324
 0.74014733556788
 0.73836920412232

Observa-se, assim, que a solução é aproximadamente 0,74. O sucesso do método neste caso se deve ao fato do ponto fixo do sistema dinâmico utilizado ser atrator, sendo falho se o ponto fosse repulsor. ■

3.2 Cálculo de raízes quadradas por meio de adições, subtrações e multiplicações

Problema 3.2.1. *Seja n um número real positivo. A raiz quadrada de n é a solução positiva da equação*

$$x^2 = n$$

Que por sua vez pode ser escrita na forma

$$x = \frac{n}{x}$$

temos então uma relação de recorrência $x_{n+1} = \frac{n}{x_n}$ associada à função

$$F(x) = \frac{n}{x}$$

No entanto, observa-se facilmente que para qualquer valor inicial x_0 , diferente de n , a solução desse sistema será sempre um ciclo de período 2, ou seja

$$x_0, \frac{n}{x_0}, x_0, \frac{n}{x_0}, \dots$$

Tenta-se então usar o ponto médio,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{n}{x_n} \right)$$

resolvendo a equação $\frac{1}{2}(x^* + \frac{n}{x^*}) = x^*$ obtemos os pontos fixos x^* ,

$$\frac{1}{2} \left(x^* + \frac{n}{x^*} \right) = x^* \iff x + \frac{n}{x} = x \iff x = \frac{n}{x} \iff x = \sqrt{n}$$

e como $F'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{(x^*)^2} \right)$, temos

$$F'(\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{(\sqrt{n})^2} \right) \iff F'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{x^2} \right)$$

logo, $F'(\sqrt{n}) = 0 < 1$ e portanto \sqrt{n} é um ponto fixo atrator. O ponto médio é usado para aproximar o ponto fixo em \sqrt{n} e conseqüentemente fugir do ciclo.

Exemplo 3.2.1. Obter a raiz quadrada de 3.

Solução. $\sqrt{3}$ é solução positiva da equação

$$x^2 = 3$$

e pode ser calculada a partir da equação de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{3}{x_n}.$$

Observamos que para qualquer valor inicial x_0 , diferente de $\sqrt{3}$, a solução será sempre um ciclo de período 2

$$x_0, \frac{3}{x_0}, x_0, \frac{3}{x_0}, \dots$$

Para aproximar do ponto fixo em $\sqrt{3}$ e conseqüentemente fugir do ciclo, considera-se o ponto médio

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$$

E este sistema por sua vez converge para o ponto fixo em $\sqrt{3}$. ■

3.3 Razão áurea e números de Fibonacci

Problema 3.3.1. *Números de Fibonacci são termos obtidos a partir da seguinte sequência recursiva*

$$f_0 = 0; f_1 = 1 \text{ e } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Isto é, começa com 0 e 1 e, em seguida, todo número é obtido a partir da soma dos dois anteriores mais próximos, formando a sequência

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

que é claramente divergente. No entanto, pode-se construir uma sequência determinada pelo quociente de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Denota-se $a_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$. Dividindo a equação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ por f_{n-1} , obtém-se $\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}$ então $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$. Multiplicando-se por a_{n-1} , temos que $a_n \cdot a_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

O ponto fixo desta sequência é a solução de $a^2 = a + 1$, resolvendo a equação encontra-se $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cong 1,618$ e $-0,618$. A solução positiva é chamada razão de ouro e é um ponto fixo atrator uma vez que para a obtenção desse ponto associamos a equação de recorrência $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ à função

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x},$$

como $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$, podemos então concluir que

$$|F'(x^*)| = |F'(1,618)| = \frac{1}{(1,618)^2},$$

que por sua vez é menor que 1.

Capítulo 4

A Família Quadrática

A família quadrática é dada por funções do tipo $F_c(x) = x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Os objetivos desta seção são analisar a dinâmica da família F_c quando o parâmetro c varia e estudar alguns tipos de mudança de comportamento que denominamos *bifurcação* nessa família de funções. As principais conclusões deste capítulo podem ser encontradas nos trabalhos de MALIGERI [8], LENARDUZZI [5] e DEVANEY [3] e CIPOLLI [2].

4.1 A primeira bifurcação

Inicialmente, encontram-se os pontos fixos de F_c . Isto é, os valores x^* de modo que $F_c(x^*) = x^*$. Desse modo obtemos as raízes do polinômio $(x^*)^2 - x^* + c$ que são

$$p_+ = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1 - 4c}) \quad \text{e} \quad p_- = \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1 - 4c}).$$

Seja Δ o discriminante de $(x^*)^2 - x^* + c = 0$, temos então três casos :

1º caso - Se $\Delta > 0$, p_+ e p_- são reais e distintos. Ou seja, se $1 - 4c > 0$, ou $c < \frac{1}{4}$, o gráfico de F_c intercepta a diagonal $y = x$ em dois pontos.

2º caso - Se $\Delta = 0$ temos $1 - 4c = 0$, ou $c = \frac{1}{4}$, e assim $p_+ = p_-$. O gráfico de F_c intercepta a diagonal $y = x$ em apenas um ponto. Isto é, a parábola de F_c é tangente à reta $y = x$ no ponto $x = \frac{1}{2}$. É nesse caso que encontramos a primeira bifurcação.

3º caso - Se $\Delta < 0$, o polinômio não admite raízes reais. Dessa forma, se $c > \frac{1}{4}$ não temos pontos fixos e o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima de modo que este gráfico não intercepta a diagonal $y = x$.

Verificaremos agora que dependendo do valor do parâmetro c , p_+ e p_- podem ser

atratores, repulsores ou neutros. Como $F'_c(x) = 2x$ temos que,

$$F'_c(p_+) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1 - 4c}) \right] = 1 + \sqrt{1 - 4c},$$

e

$$F'_c(p_-) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{1 - 4c}) \right] = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

Se $c = \frac{1}{4}$ temos $p_+ = p_-$, uma vez que $\Delta = 0$ e assim,

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{0}) = \frac{1}{2},$$

e portanto, $|F'_c(p_+)| = |F'_c(p_-)| = |2 \cdot (\frac{1}{2})| = 1$. Conclui-se que para $c = \frac{1}{4}$ os pontos p_+ e p_- são iguais a $\frac{1}{2}$ e ambos neutros.

Para $c < \frac{1}{4}$, multiplicando ambos os membros por quatro,

$$4 \cdot c < 4 \cdot \frac{1}{4} \implies 4c < 1.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por -1 e, em seguida, somando 1 a ambos os membros, obtemos,

$$1 - 4c > 0 \implies \sqrt{1 - 4c} > 0.$$

Finalmente, somando 1 a ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos $1 + \sqrt{1 - 4c} > 1$ e assim $|F'_c(p_+)| > 1$. Com isso podemos concluir que para $c < \frac{1}{4}$ o ponto fixo p_+ é repulsor.

Faremos a seguir a análise para o ponto p_- .

Como $c < \frac{1}{4}$, temos $\sqrt{1 - 4c} > 0$ de onde segue que $F'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$.

Para p_- ser atrator devemos considerar $|F'_c(p_-)| < 1$, isto é,

$$-1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 \iff -2 < -\sqrt{1 - 4c} < 0 \iff 0 < \sqrt{1 - 4c} < 2 \iff$$

$$0 < 1 - 4c < 4 \iff -1 < -4c < 3 \iff -3 < 4c < 1.$$

Daqui concluímos que p_- é atrator para $\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}$.

Para $c = \frac{-3}{4}$, tem-se $F'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4 \cdot (\frac{-3}{4})} = -1$ e assim $|F'_c(p_-)| = 1$. Logo, para $c = \frac{-3}{4}$, p_- é neutro.

Para $c < \frac{-3}{4}$, temos,

$$4c < -3 \iff -4c > 3 \iff 1 - 4c > 4,$$

e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da última desigualdade, temos,

$$\sqrt{1 - 4c} > 2,$$

de onde podemos concluir que $F'_c(p_-) < -1$. Portanto, $|F'_c(p_-)| > 1$ e o ponto p_- é consequentemente repulsor.

Os resultados demonstrados acima podem ser resumidos na proposição abaixo.

Proposição 4.1.1 (Primeira análise de bifurcação). *Considerando a família quadrática $F_c(x) = x^2 + c$,*

1. *Se $c > \frac{1}{4}$, não existem pontos fixos e todas as órbitas tendem ao infinito.*
2. *Se $c = \frac{1}{4}$, F_c tem um ponto fixo igual a $\frac{1}{2}$ que é único e por sua vez é neutro.*
3. *Para todo $c < \frac{1}{4}$, F_c tem dois pontos fixos p_- e p_+ . O ponto p_+ é sempre repulsor e,*
 - a) *Se $\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}$, p_- é atrator.*
 - b) *Se $c = \frac{-3}{4}$, p_- é neutro.*
 - c) *Se $c < \frac{-3}{4}$, p_- é repulsor.*

(ver Figura (4.6)).

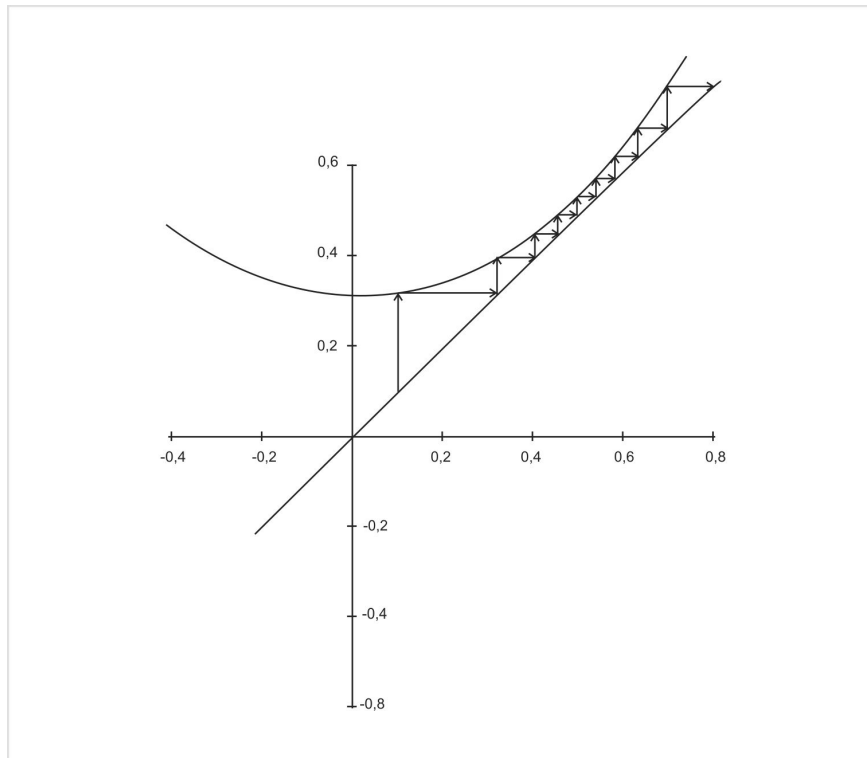


Figura 4.1: órbitas para $c = 0,3$ ($c > \frac{1}{4}$); não existem pontos fixos e todas as órbitas tendem ao infinito.

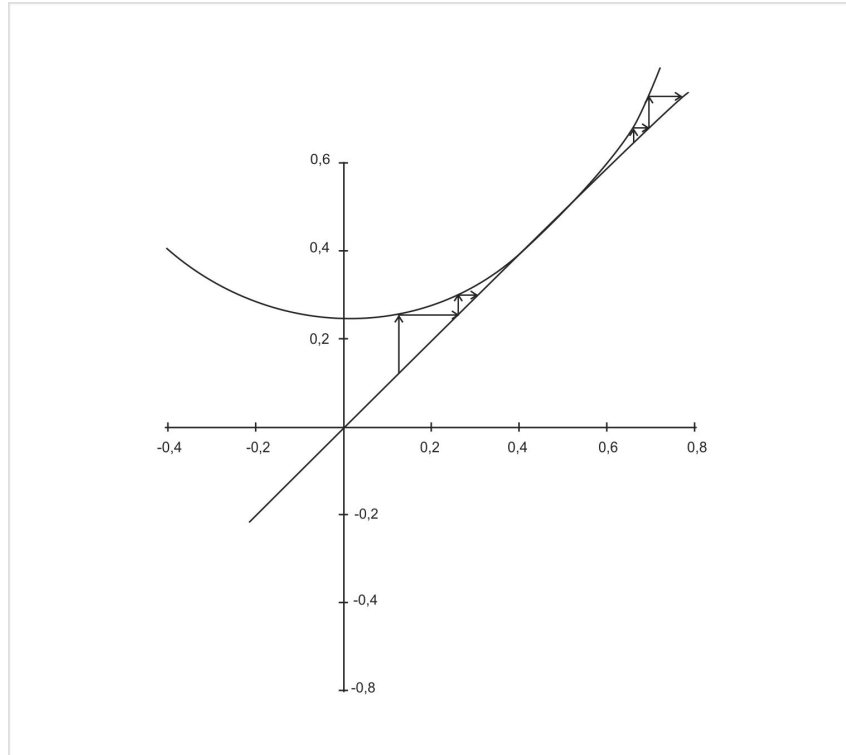


Figura 4.2: órbita da curva quadrática $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ($c = \frac{1}{4}$), $F(x)$ tem um único ponto fixo $x = \frac{1}{2}$ e por sua vez é neutro.

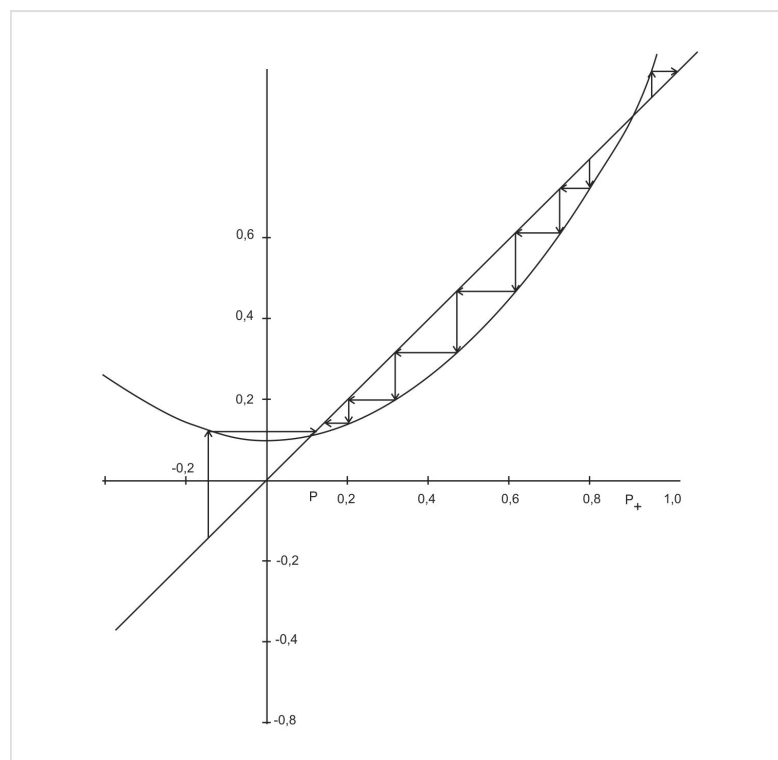


Figura 4.3: órbita da função $F(x) = x^2 + 0,1$ ($\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}$); p_+ é sempre repulsor e p_- é sempre atrator.

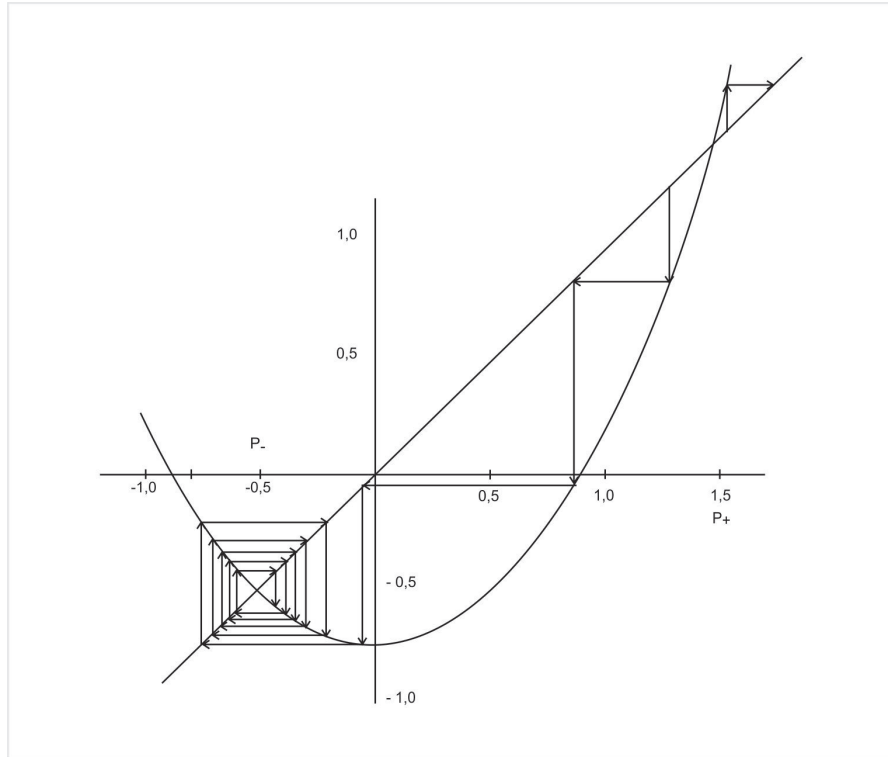


Figura 4.4: órbita de $F(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ ($c = \frac{-3}{4}$); o ponto p_+ é repulsor e o ponto p_- é neutro.

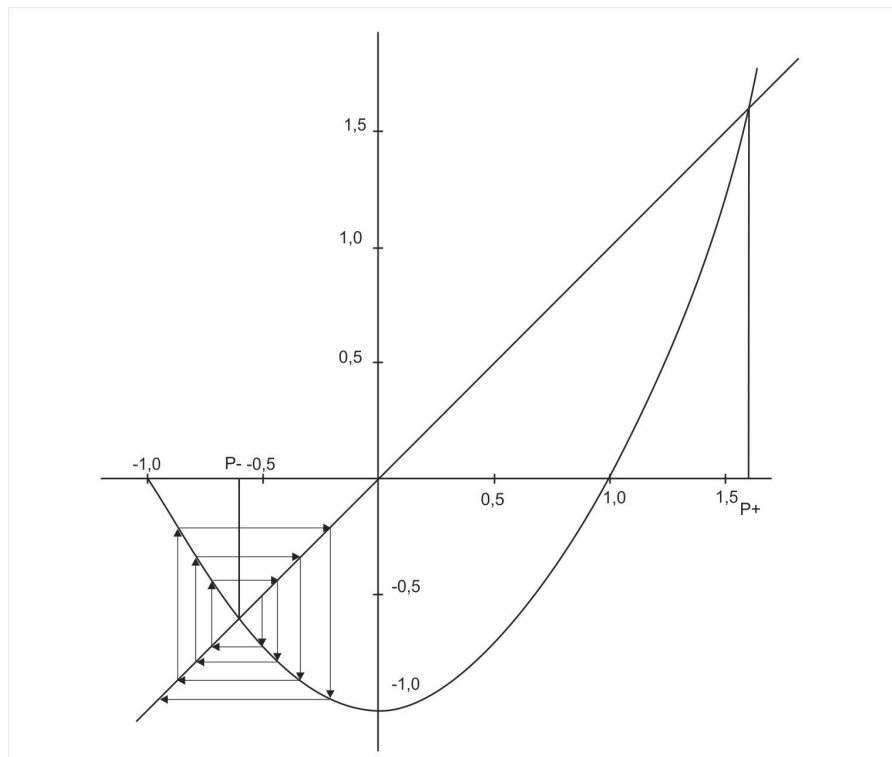


Figura 4.5: órbita de $F(x) = x^2 - 1$ ($c = \frac{-3}{4}$); p_+ é repulsor e p_- é repulsor.

Deve-se observar que,

$$\begin{aligned}
 F_c(-p_+) &= \left(\frac{-1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})\right)^2 + c = \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})\right)^2 + c = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + 2\sqrt{1 - 4c} + 1 - 4c) + c = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1 - 4c}}{2} + \frac{1}{4} - c + c = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4c} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{1 - 4c}) = p_+.
 \end{aligned}$$

Pelo fato de $F_c(-p_+) = p_+$ concluímos que $-p_+$ é um ponto eventualmente fixo. O que ocasiona uma dinâmica interessante para $c \leq \frac{1}{4}$ no intervalo $-p_+ < c < p_+$.

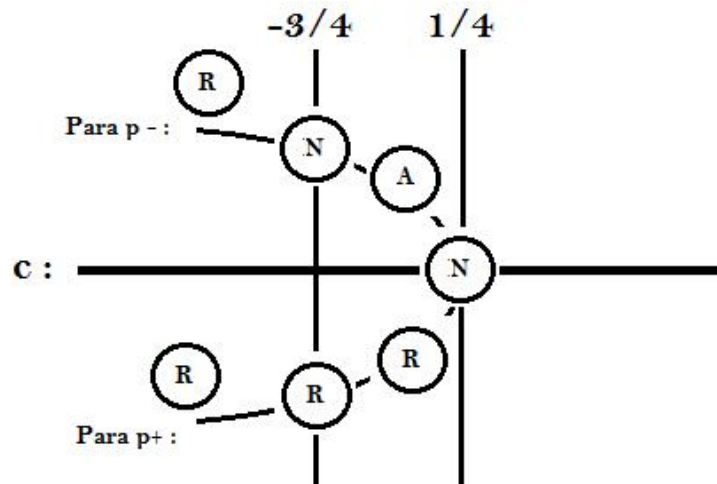


Figura 4.6: Esquema da primeira bifurcação.

4.2 A segunda bifurcação

O objetivo nesta seção é encontrar ciclos de período 2. Ou seja, pontos fixos para $F \circ F = F^2$.

Surge um ciclo de período 2 quando $c < \frac{-3}{4}$. Encontramos os pontos de período 2 resolvendo a equação $F_c^2(x) = x$, assim,

$$(x^2 + c)^2 + c = x \implies x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c = 0,$$

que por sua vez é um polinômio de grau 4. Como p_+ e p_- são pontos fixos,

$$F_c^2(p_+) = F_c(F_c(p_+)) = F_c(p_+) = p_+,$$

e,

$$F_c^2(p_-) = F_c(F_c(p_-)) = F_c(p_-) = p_-.$$

Portanto, p_+ e p_- são soluções de $F_c^2(x) = x$. Efetuando a divisão de $F_c^2(x)$ por $(x - p_+)(x - p_-)$ obtemos o polinômio $x^2 + x + c + 1$ que tem por raízes,

$$q_+ = \frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2} \quad \text{e} \quad q_- = \frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2}.$$

Considerando Δ como sendo o discriminante da equação polinomial $x^2 + x + c + 1 = 0$, podemos analisar os seguintes casos :

1º caso - As raízes q_+ e q_- serão reais e distintas se $\Delta > 0$, ou seja, se $-4c - 3 > 0$ e daí $c < \frac{-3}{4}$.

2º caso - As raízes q_+ e q_- serão reais e iguais se $\Delta = 0$. Isto é, se $-4c - 3 = 0$ e daí $c = \frac{-3}{4}$. Neste caso, verifica-se que,

$$q_+ = \frac{-1 + \sqrt{-4(\frac{-3}{4}) - 3}}{2} = \frac{-1}{2},$$

e,

$$q_- = \frac{-1 - \sqrt{-4(\frac{-3}{4}) - 3}}{2} = \frac{-1}{2},$$

isto é, $q_+ = q_- = p_-$.

3º caso - Não existem raízes reais se $\Delta < 0$.

Vimos, na análise da primeira bifurcação, que para $c < \frac{-3}{4}$ o ponto fixo p_- é repulsor. Como $q_+ = q_- = p_- = \frac{-1}{2}$ quando $c = \frac{-3}{4}$ então outros períodos têm sua origem em p_- , surge assim um novo 2-ciclo em q_+ e q_- . Este novo tipo de bifurcação é chamada de *bifurcação de duplicação de período*.

Para classificar os tipos de período, vamos calcular a derivada de $F^2(x)$. De acordo com a propriedade 2.2, concluímos que $(F_c^2)'(q_+) = (F_c)'(q_+).(F_c)'(q_-)$. Como $F_c'(x) = 2x$, então,

$$F_c'(q_+) = 2q_+ = 2 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{-4c - 3}}{2} \right) = -1 + \sqrt{-4c - 3},$$

and,

$$F_c'(q_-) = 2q_- = 2 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{-4c - 3}}{2} \right) = -1 - \sqrt{-4c - 3}.$$

Assim,

$$(F_c^2)'(q) = (-1 + \sqrt{-4c - 3}).(-1 - \sqrt{-4c - 3}) = 4c + 4.$$

Logo, $|(F_c^2)'(q_+)| < 1$ se, e somente se, $|4c + 4| < 1$, isto é,

$$-1 < 4c + 4 < 1 \iff -5 < 4c < -3 \iff \frac{-5}{4} < c < \frac{-3}{4}.$$

Além disso, $|(F_c^2)'(q_+)| > 1$ se, e somente se, $|4c + 4| > 1$, isto é,

$$4c + 4 < -1 \iff c < \frac{-5}{4},$$

ou,

$$4c + 4 > 1 \iff c > \frac{-3}{4}.$$

Entretanto, como q_+ e q_- são reais se $c \leq \frac{-3}{4}$, segue que $|(F_c^2)'(q_+)| > 1$ quando $c < \frac{-5}{4}$.

Finalmente, $|(F_c^2)'(q_+)| = 1$ se $|4c + 4| = 1$, isto é,

$$4c + 4 = 1 \iff c = \frac{-3}{4},$$

ou,

$$4c + 4 = -1 \iff c = \frac{-5}{4}.$$

A partir da análise feita acima obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1 (Segunda análise de bifurcação). *Considerando a família quadrática $F_c(x) = x^2 + c$:*

1. Para $\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}$, F_c tem um ponto fixo atrator em p_- e não possui 2-ciclos.
2. Para $c = \frac{-3}{4}$, F_c tem um ponto fixo neutro em $p_- = q_+ = q_-$ e nenhum 2-ciclo.
3. Para $\frac{-5}{4} < c < \frac{-3}{4}$, F_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_- e q_{\pm} é um 2-ciclo atrator.
4. Para $c < \frac{-5}{4}$, F_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_- e q_{\pm} é um 2-ciclo repulsor.

(ver Figura 4.7).

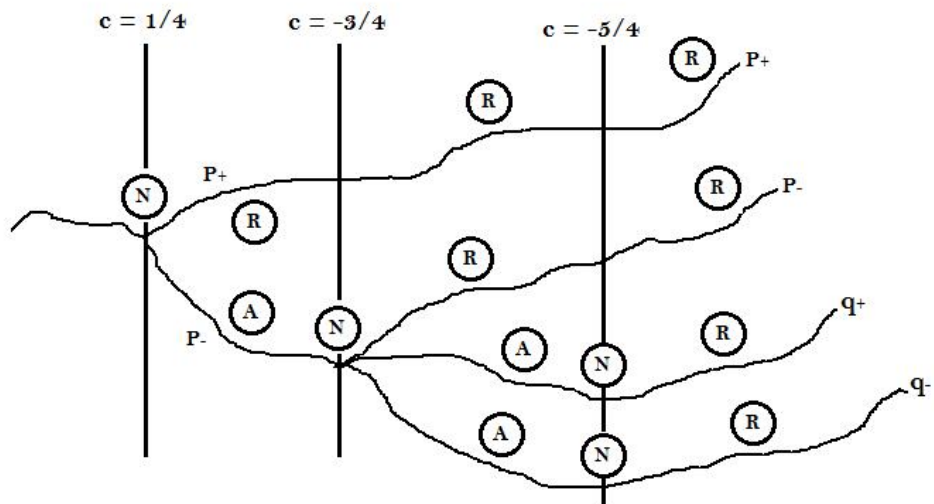


Figura 4.7: Esquema da segunda bifurcação

Capítulo 5

Evolução do Modelo Logístico

As principais ideias deste capítulo podem ser encontradas nos trabalhos de BOYCE [1] e DEVANEY [3].

5.1 Crescimento e extinção de uma população

Uma aplicação simples dos sistemas dinâmicos na ciência é a configuração para a biologia de um modelo matemático que possa fornecer ideias e soluções a partir da análise em longo prazo do crescimento ou extinção de uma população. Thomas Malthus (1766 – 1834), em seu artigo sobre populações apresentado em 1798, foi o primeiro a observar que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população.

Considere $x = P(t)$ como sendo a população de uma espécie dada num instante t . É razoável acreditar que a hipótese mais simples acerca da variação da população é a relação de proporcionalidade entre a população no instante t e a taxa de variação dessa população no tempo. Isto é, a taxa de variação tempo que matematicamente se traduz pela derivada $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ é proporcional ao valor atual de x , podendo esta relação ser representada pela seguinte equação

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x, \quad (5.1)$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A solução para esta equação é $x(t) = x_0 \cdot e^{k \cdot t}$, onde $x_0 = x(0)$ é a população inicial da espécie, k é a constante de proporcionalidade e é chamada taxa de crescimento para $k > 0$, assim, $x(t) \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow \infty$, levando à explosão populacional. Sendo $k < 0$, a constante k é chamada taxa de declínio e, neste caso, $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, acarretando desse modo a extinção da população.

Este modelo simples também pode ser estudado como uma equação de diferença. Escrevendo x_n como sendo a população após n gerações, onde n é um número natural. A lei mais simples que se pode imaginar é que a população na próxima geração é diretamente

proporcional à população na presente geração. Isto é,

$$P_{n+1} = k.P_n$$

Onde, novamente, k é uma constante. A partir de sucessivas iterações, temos,

$$\begin{aligned} P_1 &= k.P_0 \\ P_2 &= k.P_1 = k.k.P_0 = k^2.P_0 \\ P_3 &= k.P_2 = k.k.P_1 = k.k.k.P_0 = k^3.P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= k.P_{n-1} = k^n.P_0 \end{aligned}$$

de modo que o destino final da população está novamente fácil de decidir. Se $k > 1$, $P_n \rightarrow \infty$, enquanto que para $0 < k < 1$, tem-se $P_n \rightarrow 0$. Para $k = 1$, temos $P_n = 1^n P_0 = P_0$. Ou seja, a população se mantém estável.

Da análise feita anteriormente, conclui-se que resultado final da população está diretamente relacionado com o comportamento assintótico da iteração da função P_n . Constitui-se então uma situação idealizada, visto que existem apenas duas possibilidades : crescimento descontrolado ou íntegra extinção. Obviamente, tais condições ideais não poderão perdurar uma vez que em algum momento o suprimento de comida, por exemplo, reduzirá a taxa de crescimento.

5.2 Equação logística ou equação de Verhulst

No objetivo de garantir a legítima relação de dependência entre a taxa de crescimento e a população, substitui-se a constante k da equação 5.1 por uma função $h(x)$, obtendo, assim, a equação modificada

$$\frac{dx}{dt} = h(x).x,$$

Devemos então escolher $h(x)$, de modo a seguir as três condições abaixo

1. Admitindo x suficientemente pequeno, $h(x)$ deve estar muito próximo de $k > 0$.
2. Quando x crescer, $h(x)$ deve ser decrescente.
3. Quando x for suficientemente grande, $h(x)$ deve ser menor que zero.

A função mais simples que tem essas propriedades é $h(x) = k - ax$, onde a é uma constante positiva. Substituindo $h(x)$ na equação (5.1) encontra-se ,

$$\frac{dx}{dt} = (k - ax)x,$$

que por sua vez é conhecida por equação de Verhulst ou Equação Logística. Tal equação também pode ser escrita na forma,

$$\frac{dx}{dt} = k \left(1 - \frac{x}{L} \right) x,$$

onde $L = \frac{k}{a}$. Observa-se que a taxa L da equação logística é livre de qualquer fator limitador, por isso é chamada de taxa intrínseca. Nota-se também que simplesmente coloca-se o fator $(1 - \frac{x}{L})$ no modelo Malthusiano. Supondo $k > 0$, o caso que anteriormente levou a um crescimento ilimitado, aqui se nota que,

1. Se $\frac{x}{L} = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$.
2. Se $\frac{x}{L} > 1$, $\frac{dx}{dt} < 0$.
3. Se $\frac{x}{L} < 1$, $\frac{dx}{dt} > 0$.

O objetivo deste capítulo é fazer uma análise simplificada do modelo logístico admitindo $L = 1$. Ou seja, tomando $k = a$, com $a \neq 0$. Pode-se dessa forma não apenas falar em crescimento populacional, mas também sobre percentagem populacional. Admitindo que P_n representa a porcentagem da população na geração n , a população é então assumida para satisfazer a seguinte equação de evolução,

$$P_{n+1} = k \cdot P_n \cdot (1 - P_n), \tag{5.2}$$

onde novamente k é uma constante positiva. Escrevendo $x = P_n$ em (5.2) temos $F_k(x) = kx(1 - x)$. Tal relação foi utilizada originalmente por P.F. Verhulst em 1845 tomando por base um modelo populacional em um ambiente fechado. Alguns anos mais tarde, May (1976) considera esta função como um modelo ecológico simples para a variação anual da população de uma espécie de insetos.

Como $kx(1 - x) = kx - kx^2$, com $k > 0$, F_k é uma função polinomial de grau 2. Além disso, o coeficiente de x^2 é negativo ($-k < 0$) e assim F_k é representada graficamente por uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo. Para obter as raízes de F_k resolvemos a igualdade $kx(1 - x) = 0$. Segue que $x = 0$ ou $x = 1$, isto significa que a parábola intercepta o eixo horizontal nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Observe que o vértice (x_v, y_v) ocorre no ponto médio das raízes, ou seja,

$$x_v = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2},$$

e conseqüentemente,

$$y_v = F_k\left(\frac{1}{2}\right) = k\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}.$$

Conclui-se que $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{4}\right)$ são as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função F_k .

Proposição 5.2.1. *Os pontos fixos da família quadrática $F_k = kx(1-x)$ são 0 e $p_k = \frac{k-1}{k}$.*

Demonstração. De fato, resolvendo a equação $F_k(x) = x$ para obter os pontos fixos,

$$kx(1-x) = x \implies kx - kx^2 = x \implies x(-kx + k - 1) = 0.$$

Assim, $x = 0$ ou $-kx + k - 1 = 0$. Portanto,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{k-1}{k}.$$

□

Na proposição que segue vamos classificar os tipos de pontos fixos de acordo com a Seção (2.5).

Proposição 5.2.2. *O ponto 0 é atrator para $0 < k < 1$, repulsor para $k > 1$ e neutro para $k = 1$. O ponto fixo $p_k = \frac{k-1}{k}$ é atrator para $1 < k < 3$, repulsor para $0 < k < 1$ ou $k > 3$ e neutro para $k = 3$ (ver figura (5.1)).*

Demonstração. De fato, como $F'_k(x) = k - 2kx$, segue que

$$|F'_k(0)| = |k|$$

Portanto, o 0 será atrator se $|k| < 1$, repulsor se $|k| > 1$ e neutro se $|k| = 1$. Como $k > 0$ então 0 é atrator se $0 < k < 1$, repulsor se $k > 1$ e neutro para $k = 1$. Para $p_k = \frac{k-1}{k}$, temos,

$$\left|F'_k\left(\frac{k-1}{k}\right)\right| = \left|k - 2k \cdot \left(\frac{k-1}{k}\right)\right| = |2-k|$$

Portanto, p_k será atrator se $|2-k| < 1$, isto é, se

$$-1 < 2-k < 1 \implies 1 < k < 3,$$

p_k será repulsor se

$$2-k < -1 \implies k > 3 \quad \text{ou} \quad 2-k > 1 \implies k < 1$$

e p_k será neutro se $|2-k| = 1$, isto é,

$$2-k = 1 \implies k = 1.$$

Assim, 0 é o único ponto fixo uma vez que para $k = 1$ teríamos $p_1 = \frac{1-1}{1} = 0$, ou

$$2-k = -1 \implies k = 3.$$

Portanto, p_k é um ponto fixo neutro para $k = 3$.

□

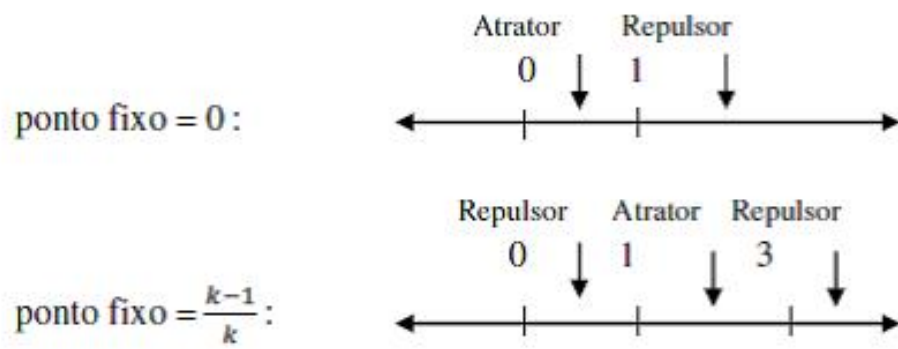


Figura 5.1: Esquema referente à classificação dos pontos fixos para a função logística.

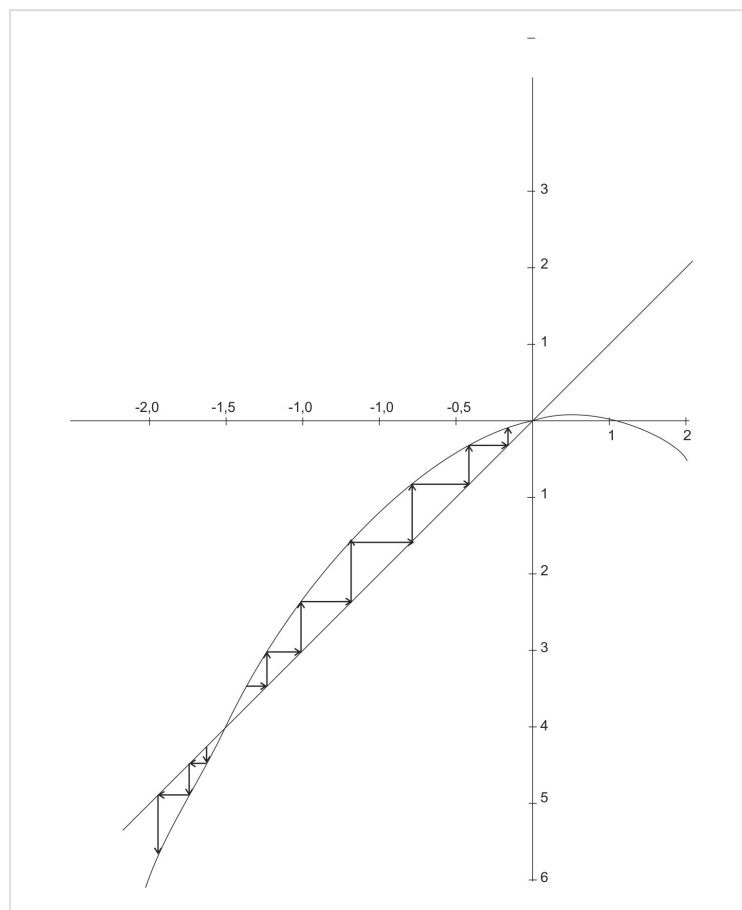


Figura 5.2: Órbita da curva logística para $k = 0.2$; o ponto fixo $x = 0$ é atrator $x = -4$ é repulsor.

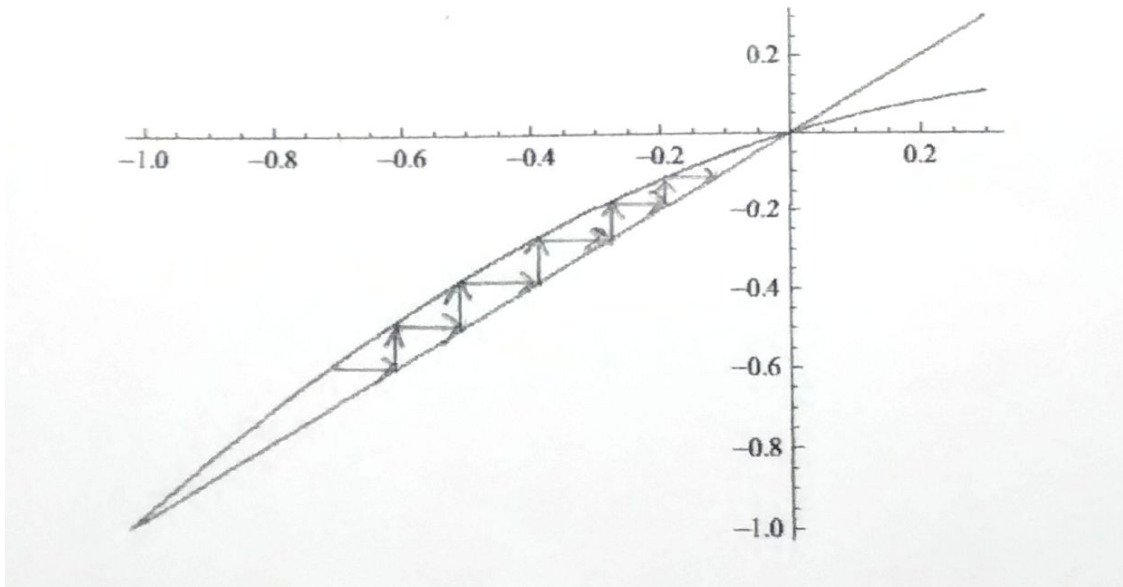


Figura 5.3: Órbita da curva logística para $k = 0.5$; o ponto fixo $x = 0$ é atrator e $x = -1$ é repulsor.

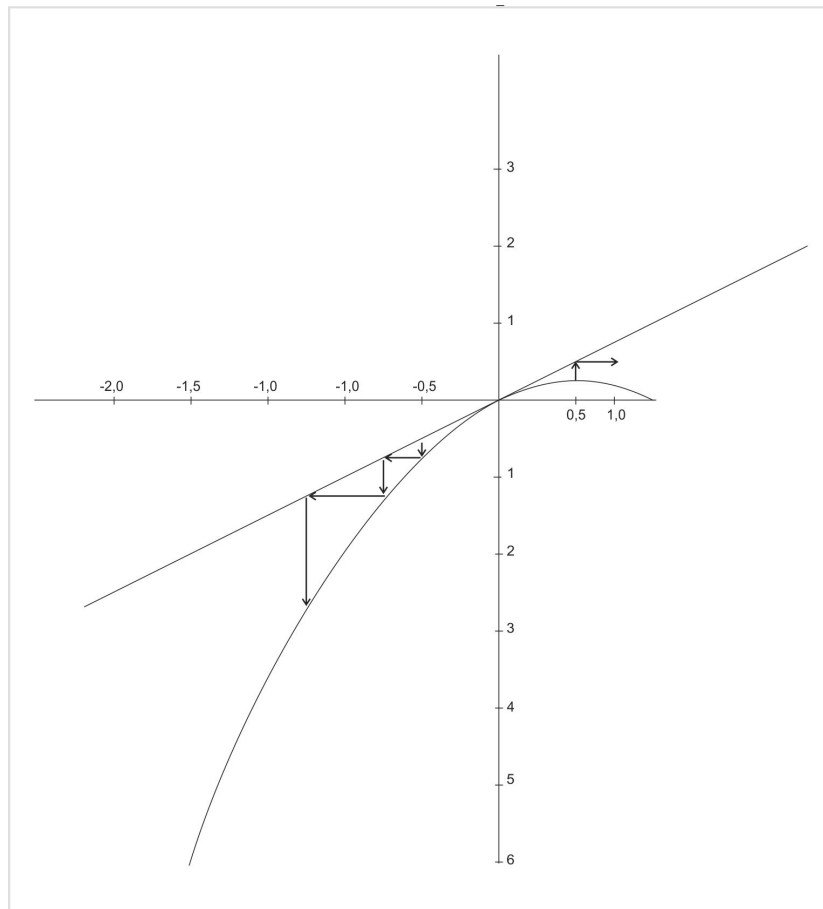


Figura 5.4: Órbita da curva logística para $k = 1$; o ponto fixo $x = 0$ é neutro.

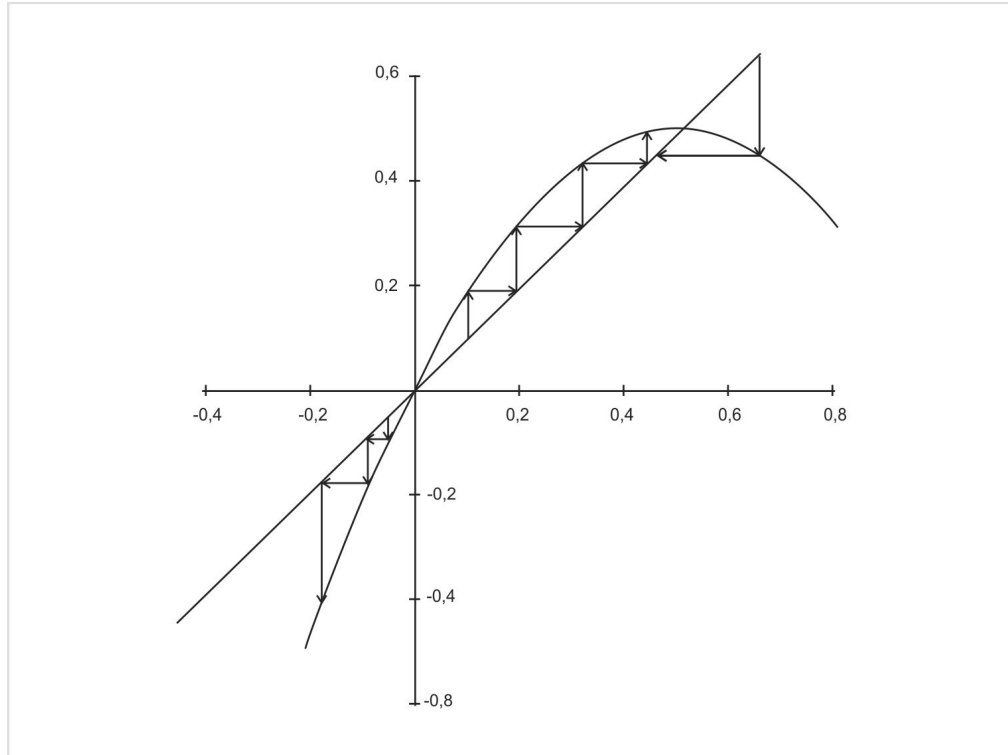


Figura 5.5: Órbita da curva logística para $k = 2$; o ponto fixo $x = 0$ é repulsor e $x = 0.5$ é atrator.

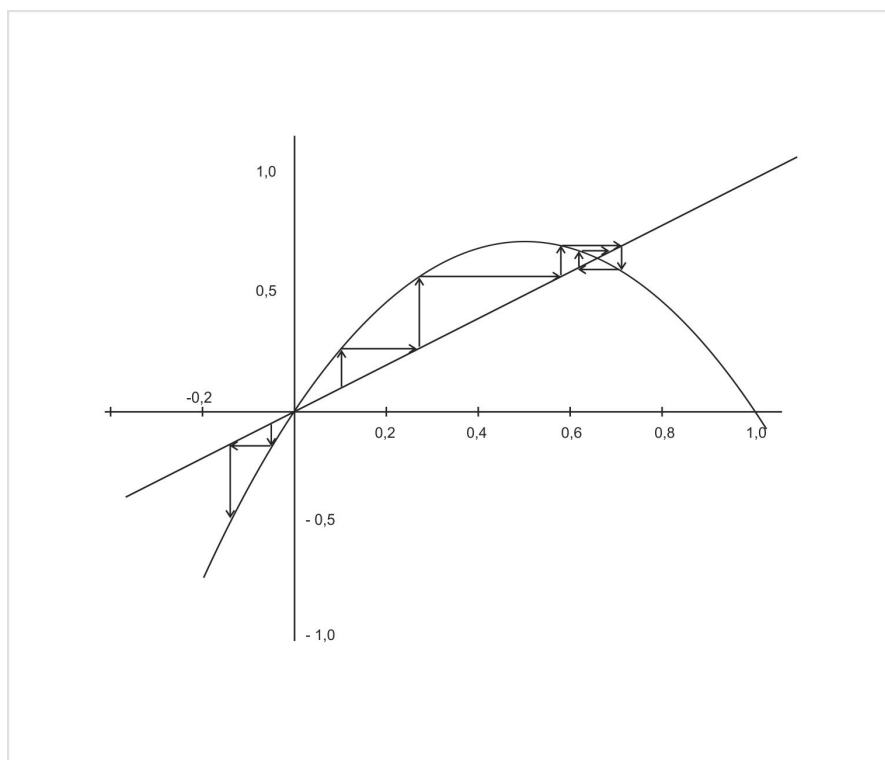


Figura 5.6: Órbita da curva logística para $k = 3$; o ponto fixo $x = 0$ é repulsor e $x = 2/3$ é neutro.

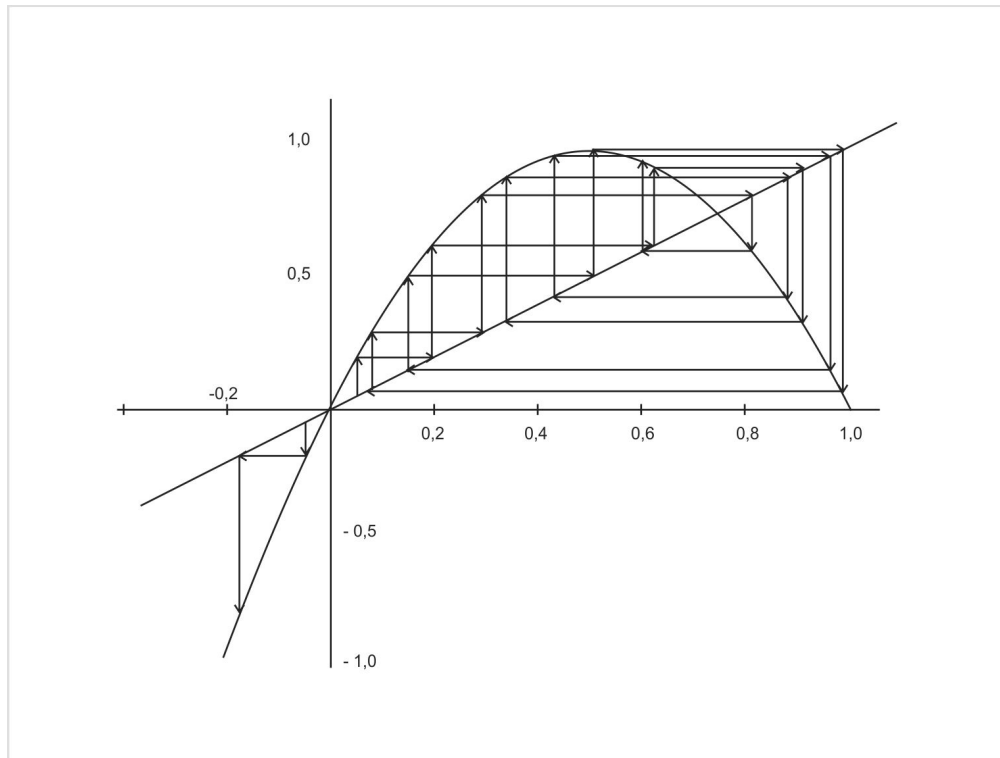


Figura 5.7: Órbita da curva logística para $k = 4$; o ponto fixo $x = 0$ é repulsor e $x = 1/4$ é caótico.

Observa-se na Figura (5.7) que a dinâmica do sistema passa por muitos valores diferentes entre 0 e 1, admitindo $k = 4$, sem parecer obedecer a alguma regra. Denominamos esse tipo de comportamento de caótico. Observa-se que um estado determina perfeitamente o estado posterior, mas uma pequena modificação no estado no instante inicial remete a uma evolução que difere inteiramente nos instantes que se seguem.

Capítulo 6

Sequência Didática

Neste capítulo é apresentada uma sequência didática a ser aplicada aos alunos do 1º ano do ensino médio. Esta sequência tem por objetivo relacionar os conceitos e propriedades do estudo da composição entre funções com as propriedades de iteração e o estudo inicial dos sistemas dinâmicos discretos abordando especificamente a análise dos valores de k na equação do modelo logístico $F(x) = kx(1 - x)$.

6.1 Preparando a sequência

6.1.1 Considerações iniciais

Devemos considerar a equação de Verhulst em sua forma discreta mais simples: $F(x) = kx(1 - x)$. A partir daí, conduzir o aluno (de acordo com seus conhecimentos prévios e intuitivos) à dedução do comportamento das órbitas próximas a um dado ponto fixo, assumindo determinados valores de k .

6.1.2 Público-alvo

Alunos do 1º ano do ensino médio. Neste ano, os alunos têm o seu contato inicial com o estudo da composição de funções, mais precisamente, do primeiro para o segundo bimestre. A apresentação do conteúdo de forma descontextualizada e despreendida das interpretações do mundo em conjunto com o formalismo exacerbado constituído equivocadamente pela memorização de etapas cria hiatos, em muitos casos, no processo de construção de conhecimento do aluno. Segundo Pietrocola (2002, pg 106):

A Matemática é a maneira de estruturarmos nossas idéias sobre o mundo físico, [...], sua maior importância está no papel estruturante que ela pode desempenhar no processo de produção de objetos que irão se constituir nas interpretações do mundo físico.

Nessa perspectiva, o estudo do crescimento populacional tomando por base o modelo logístico é inserido como objeto de contextualização e conseqüentemente motivador para o aprendizado dos alunos.

6.1.3 Pré-requisitos

- Conhecer a definição e as propriedades da composição de funções;
- Interpretar representações de funções no plano cartesiano;
- Dominar os tópicos do estudo da função quadrática;
- Conhecer as propriedades do módulo;
- Interpretar as desigualdades e os intervalos.

6.1.4 Recursos tecnológicos

Muitos aplicativos auxiliam na plotagem das órbitas num plano bidimensional. Um deles é o MAXIMA. Trata-se de um sistema de software na categoria dos sistemas designados de CAS (Computer Algebraic System). É um software livre; isso implica que pode ser instalado e utilizado pelos alunos sem terem que obter uma licença e podem até estudar o código fonte para compreender o seu funcionamento.

Existem também plataformas interativas onde se pode plotar gráficos como a WolframAlpha e a SageMath. Ambas exigem conhecimento dos comandos, sendo a primeira mais iterativa.

6.1.5 Dificuldades previstas

- Necessidade da escola fornecer um suporte tecnológico (Projetores multimídia, computadores, etc.)
- Imaturidade matemática, como por exemplo a fragilidade na execução dos artifícios algébricos ou o reconhecimento das propriedades algébricas inseridas no problema.
- Inserção no programa de uma quantidade pequena de dados (A saber, órbitas), podendo ocasionar uma inferência equivocada dos resultados.

6.1.6 Descrição geral

A sequência didática deve ser realizada em duas partes, cada parte com 4(quatro) horas-aula, totalizando 8 (quatro) horas-aula.

6.2 Aplicação da sequência

Parte I – Introduzindo alguns conceitos da dinâmica discreta

Serão introduzidos nesse momento os conceitos iniciais pertinentes ao estudo dos sistemas dinâmicos discretos. Tais conceitos serão abordados em sala de aula a partir da interpretação gráfica das noções de iteração, órbita, ponto fixo, ponto fixo atrator, ponto fixo repulsor, ponto fixo neutro, etc.

A aplicação inicial terá como ponto de partida a elaboração de alguns problemas propostos que devem ser resolvidos em sala de aula:

Problema 01. Construa, utilizando o programa, o gráficos representativos das funções $F(x) = x^2 - 4x + 6$ e $y = x$.

Os gráficos obtidos pelos alunos deverão ser impressos e entregues aos alunos para que possamos passar para o segundo problema :

Problema 02. Os gráficos apresentam ponto de intersecção? Quais (Ou qual)?

Em caso verdadeiro, o professor deve apresentar em sala o conceito de ponto fixo x^ , obtendo 2 e 3 como solução.*

Problema 03. A partir do ponto $x^* = 2$, construir com lápis ou caneta no papel impresso e entregue aos alunos a representação gráfica das iterações.

Problema 04. O que podemos afirmar a respeito do comportamento dessas órbitas em relação ao ponto fixo $x^* = 2$? São atraídos? Se repelem? Nenhum dos dois?

O professor dessa forma apresenta em sala o conceito de ponto atrator e ponto repulsor.

Problema 05. O que podemos afirmar a respeito do comportamento dessas órbitas em relação ao ponto fixo $x^* = 3$? São atraídos? Se repelem? Nenhum dos dois?

O professor dessa forma apresenta em sala o conceito de ponto atrator e ponto repulsor.

Problema 06. Construindo no Programa o gráfico da função $G(x) = x^2 + 3x + 1$ e verificando a intersecção com o gráfico de $y = x$, encontramos um único ponto fixo ($x^* = -1$).

Com o lápis ou caneta o aluno representa graficamente as iterações partindo de $x_0 = -1$, O que podemos afirmar a respeito do comportamento dessas órbitas em relação a este ponto? são atraídos? Se repelem?

O professor insere, neste caso, o conceito de ponto fixo neutro.

6.2.1 Considerações para o professor

Os objetivos dessa aula são :

- Explorar o conceito de ponto fixo;
- Trabalhar a partir da interpretação e representação gráfica o conceito de iteração ;
- Inserir os conceitos de ponto atrator, repulsor e neutro a partir das conclusões de seus alunos.

Parte II - Análise da dinâmica simples no modelo logístico

Nesse momento é apresentada a equação do modelo logístico em sua versão discreta, seu contexto histórico, sua importância e algumas aplicações simples. Logo em seguida iniciamos o estudo da dinâmica simples a partir da análise dos valores de k na função $F(x) = kx(1 - x)$. Alguns problemas propostos podem ser aplicados em sala e a verificação gráfica (muitas vezes intuitiva) de seus resultados devidamente confirmados plotando valores no programa.

Problema 01. Inicialmente, o que podemos dizer a respeito do gráfico de $F(x) = kx(1-x)$? Quais as coordenadas do vértice dessa parábola?

Obviamente, após a conclusão de que se trata de uma função quadrática. Incentivar o aluno a substituir valores em k para deduzir intuitivamente sua resposta.

Problema 02. Assumindo na função um valor para k e, em seguida, construindo no programa os gráficos de $F(x) = kx(1 - x)$ e $y = x$, qual ou quais os pontos fixos obtidos (caso existam)? Como obter os pontos fixos para um k qualquer?

Motivar o aluno a generalizar na análise do reconhecimento pontos fixos.

Problema 03. Em relação ao ponto fixo $x^* = 0$,

- Construir graficamente as iterações em F admitindo um valor qualquer entre 0 e 1. O que podemos concluir?
- Construir graficamente as iterações em F admitindo um valor qualquer maior que 1. O que podemos concluir?

Problema 04. Em relação ao ponto fixo $x^* = \frac{k-1}{k}$,

- Construir graficamente as iterações em F admitindo um valor qualquer valor de k entre 1 e 3. O que podemos concluir?
- Construir graficamente as iterações em F admitindo um valor qualquer maior que 3. O que podemos concluir?
- Construir graficamente as iterações em F admitindo $k = 4$. O que podemos concluir?

Nesse momento, o professor deve inserir um conceito intuitivo de comportamento caótico.

6.2.2 Considerações do professor

Os objetivos dessa aula são:

- Analisar o tipo de função $F(x) = kx(1 - x)$, para diferentes valores de k , bem como sua representação gráfica;
- Verificar os pontos fixos de $F(x) = kx(1 - x)$, algebricamente e graficamente (usando a reta $y = x$);
- Motivar o aluno na dedução do comportamento dos pontos próximos ao ponto fixo tomando como base alguns valores de k em intervalos definidos;
- Inserir em sala o conceito de caos.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W.E., DIPRIMA, R.C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- [2] CIPOLLI, Valéria Guedes. Sistemas dinâmicos discretos: Análise de estabilidade. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São Paulo.
- [3] DEVANEY, R.L., SMALE, S., HIRSCH, M.W. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. V.60. 2.ed. San Diego : Elsevier, 2004.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo; v.1. 2.ed. São Paulo: LTC, 1987.
- [5] LENARDUZZI, F.N.; MORITA, A.; PRECIOSO, J. caos e fractais, São José do Rio Preto, v.2, n.3, 09 de dezembro de 2009.
- [6] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C., WAGNER, E., MORGADO, A. C. A matemática do ensino médio; v.1. 14.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [7] LIMA, E.L. Curso de análise; v.1. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.
- [8] MALIGERI, Glaucia Cristina Alecci Meneghin. Equações Discretas no Ensino Médio: Modelos de Dinâmicas Populacionais. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São Paulo.
- [9] MONTEIRO, L.H.A. Sistemas dinâmicos, São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [10] PIETROCOLA, M. A Matemática como Estruturante do conhecimento Físico. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, abril de 2002, v. 19, p. 93-114.
- [11] RIZZO Jr., G. Segmentação e detecção de simetria em imagens via redes de mapas acoplados. São Paulo, 2006. Dissertação (mestrado em engenharia) – Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, Universidade de São Paulo.

- [12] VILLATE, Jaime E. Introdução aos sistemas dinâmicos: Uma abordagem prática com Maxima. Disponível em <http://física.fe.up.pt/maxima/book/sistdinam - 12.pdf>. Acesso em: 22 de abril de 2015.