



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática



Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Os Teoremas de Menelaus e Ceva

por

José Constantino da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2015

Recife - PE

Os Teoremas de Menelaus e Ceva

por

José Constantino da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural De Pernambuco - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 14/08/2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera (Orientador) - UFRPE

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva - UFRPE

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB

Agosto/2015

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida, por ter me concedido: saúde, sabedoria, perseverança e muita vontade de vencer. Sem o Meu Bom Deus, sem a parceria Divina não teria chegado até aqui.

Aos meus Pais: João Amaro (in memoriam) e Madalena Marcolina , (in memoriam) que na simplicidade, na vida sacrificada, tudo fizeram para que eu pudesse estudar, acreditando em mim e me dando a maior força. Aos quais expresso a minha mais profunda gratidão e saudade.

A minha família na pessoa da esposa Edinalva, os filhos Melissa, Maria Clara, Marcio, Renata, Junior e Milena, pelo incentivo e compreensão pelos longos períodos, que precisei me ausentar do convívio familiar na preparação deste trabalho.

Ao Prof. Jorge Hinojosa, antes do orientador, um amigo. Pela confiança e incentivo, sempre solícito, com sua simplicidade e sabedoria, muito contribuiu para realização deste meu sonho.

Aos meus irmãos: Fernando, Lúcia (in memoriam), Lindauria, Leda, Iracilda e Amário, pelo apoio e palavras de incentivo.

Ao companheiro de turma, Amaro José pelo apoio e encorajamento nas horas de maior dificuldade. Quando batia o desânimo, lá estava o Amaro, com sua simplicidade: coragem cara, você vai conseguir.

Aos demais companheiros da turma PROFMAT 2013, que direta ou indiretamente contribuíram para realização desse projeto, inclusive os amigos que por motivo alheio as suas vontades não puderam continuar no programa, mas espero que logo que puderem retomem a caminhada.

Aos companheiros de trabalho especialmente o amigo Gustavo Lima pelo apoio e incentivo, que muito contribuíram nessa etapa importante da minha vida.

A amiga Marta Pereira pela dedicação nas leituras e revisão do texto, além da ajuda na digitação via \LaTeX e passagem das figuras para o aplicativo Geogebra.

Aos amigos Moacy Cabral e Ricardo Normando pela ajuda na revisão do texto.

A Universidade Federal Rural de Pernambuco, aos docentes: Profs: Jorge Hinojosa, Rodrigo Gondim, Bárbara Costa, Paulo Santiago, Maité Kulesza, Marcelo Pedro, Adriano Regis, Wandersom Aleksander, Thiago Dias, Leon Denis, Tarciana Maria, Márcia Pragana, entre outros, pela dedicação, ensinamentos e apoio, a SBM pela a iniciativa do programa, o meu muito obrigado a todos.

Dedicatória

A todos os que se dedicam ao estudo ou ensino da Geometria e se alegram com o nosso sucesso.

Resumo

O presente trabalho apresenta dois importantes teoremas da geometria plana. O primeiro trata da colinearidade de três pontos sobre as retas suportes dos lados de um triângulo, conhecido como o teorema de Menelaus e data do século I. O segundo é o teorema de Ceva, que data do século XVII e se refere à concorrência de três segmentos que unem cada vértice a qualquer ponto do lado oposto de um triângulo.

Apresentamos diferentes demonstrações dos referidos teoremas utilizando noções conhecidas da geometria, como: proporcionalidade de segmentos, congruência e semelhança de triângulos, cálculo de área, trigonometria, geometria vetorial e coordenadas baricêntricas.

Tratamos das correspondentes versões de tais teoremas na geometria espacial.

Inicialmente, fornecemos dados históricos dos teoremas e concluimos com algumas aplicações.

Palavras-chave: Menelaus, Ceva, Cevianas, Colinearidade e Concorrência.,

Abstract

The present work presents two important theorems of plane geometry. The first deals with the collinearity of three points on the straight brackets of the sides of a triangle, known as the theorem of Menelaus, and dates from the 1st century. The second is the Ceva's theorem, dating from the 17th century and refers to the competition of three segments connecting each vertex to any point on the opposite side of a triangle.

We present different demonstrations of these theorems, using known concepts of geometry, such as: proportionality of segments, congruence and similarity of triangles, area calculation, trigonometry, vector geometry and barycentric coordinates.

We treat the corresponding versions of such theorems in the space geometry.

Initially, we provide historical data of the theorems and conclude with some applications.

Keywords : Menelaus, Ceva, Cevian, Collinearity and Competition.

Sumário

1	Tópicos da história: Menelaus e Ceva.	1
1.1	Menelaus	2
1.2	Ceva	4
2	O Teorema de Menelaus	8
2.1	Resultados Preliminares	8
2.2	O Teorema de Menelaus	14
2.3	Demonstrações do Teorema de Menelaus	16
2.3.1	Via Teorema de Tales	17
2.3.2	Via relação entre áreas	19
2.3.3	Via semelhança de triângulos	21
2.3.4	Via semelhança de triângulos retângulos	22
3	O Teorema de Ceva	24
3.1	O Teorema de Ceva	24
3.2	Demonstrações do Teorema de Ceva	25
3.2.1	Via Teorema de Menelaus	25
3.2.2	Via Relação entre áreas	27
3.2.3	Via teorema de Tales	28
3.2.4	Via lei dos senos	29
4	Menelaus e Ceva com segmentos orientados	34
4.1	Os enunciados dos teoremas	34
4.1.1	Para o Teorema de Menelaus	34
4.1.2	Para o Teorema de Ceva	36
4.2	Segmentos orientados	38

4.3	Menelaus com segmentos orientados	39
4.4	Ceva com segmentos orientados	41
5	Demonstrações vetoriais	44
5.1	Geometria Vetorial do Plano	44
5.1.1	Vetores no plano	44
5.1.2	Adição de vetores no plano	46
5.1.3	Multiplicação de um escalar por um vetor	47
5.1.4	Base de \mathbb{E}^2	48
5.2	Menelaus: Demonstração vetorial	49
5.3	Ceva: Demonstração vetorial	54
5.4	Coordenadas Baricêntricas	59
5.5	Ceva em coordenadas baricêntricas homogêneas	78
5.6	Menelaus em coordenadas baricêntricas homogêneas	81
6	Os teoremas de Menelaus e Ceva no espaço	84
6.1	O teorema de Menelaus na versão espacial	84
6.2	O teorema de Ceva na versão espacial	88
6.3	Aplicações dos Teoremas de Menelaus e Ceva espacial	92
7	Aplicações dos teoremas de Menelaus e Ceva	95
7.1	Construção do Conjugado Harmônico	95
7.2	Aplicações do teorema de Menelaus	100
7.3	Aplicações do teorema de Ceva	105
7.4	Considerações finais	111
	Referências Bibliográficas	112

Introdução

Neste trabalho pretendemos contribuir com o ensino da geometria, incentivando nossos jovens no estudo dessa ciência, de forma prazerosa, gratificante, vivenciando a alegria que se tem ao demonstrar um teorema ou criar uma forma diferente de resolver determinado problema que envolva conhecimentos de geometria.

Optei por dar ênfase a dois teoremas que considero da mais alta importância, os teoremas de Menelaus (c. ano 100) e Ceva (1648), matemáticos que apesar de mais de 15 séculos separarem os seus nascimentos, tem seus nomes relacionados a esses dois belos e interessantes teoremas. O primeiro trata da colinearidade de três pontos, dados sobre os lados ou prolongamentos dos lados de um triângulo, enquanto que o segundo, retomando o teorema de Menelaus, criou outra aplicação, para a partir da expressão demonstrada por Menelaus, mostrar que a mesma também é válida, se três dadas cevianas (segmentos que ligam o vértice a um ponto qualquer do lado oposto do triângulo), concorrem em um único ponto. Os teoremas objetos desta dissertação há muito tempo não figuram em nossos programas curriculares, principalmente nos ensinos fundamental e médio, só sendo estudados em programas que visam ingresso em escolas militares ou em concursos de olimpíadas. Até mesmo na maioria de nossas Universidades, o teorema de Menelaus e Ceva não fazem parte dos programas dos cursos que contém a cadeira de Geometria Plana, o que no nosso entender penaliza os alunos dessa disciplina que deixam de aprender e utilizar os conhecimentos oriundos desses teoremas na resolução de muitos problemas e situações que se enquadram no referido contexto. As demonstrações de teoremas que envolvem os conceitos de colinearidade e concorrência que geralmente são longas e difíceis tem suas resoluções simplificadas com a aplicação desses teoremas.

Pretendemos desmistificar um pouco essa concepção, mostrando que é possível trabalhar esses teoremas tendo somente como pré-requisito um pouco de conhecimento de geometria, conteúdo presente num primeiro estudo de geometria euclidiana. Assim, acreditamos que os alunos do ensino médio e até mesmo os alunos dos últimos anos do ensino básico já tem co-

nhecimento dos pré-requisitos básicos para entender a formulação, demonstração e algumas aplicações de tais teoremas, uma vez que nesta fase da vida escolar são propostas atividades que favorecem o raciocínio dedutivo com demonstrações e verificações empíricas de acordo com o texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, Brasil.

"Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos"(BRASIL, 1998, p.86).

Este nosso trabalho está dimensionado em 7 capítulos, onde abordamos conteúdos diversos dentro do leque de aplicação dos teoremas. Diante das dificuldades de obter informações sobre o tema, nos valem de alguns textos em livros, artigos científicos especialmente da SBM, textos usados em colóquios e olimpíadas de matemática, textos e vídeos usados nos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo ou na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que contam com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), além de subsídios obtidos a partir de dissertações e teses de nossas principais universidades e algumas do exterior, ainda consultamos alguns artigos oriundos de sites eletrônicos.

Destacamos no capítulo 1, deste nosso trabalho, Alguns pontos da História da Matemática como elemento motivador para desenvolver o gosto pelo estudo dessa ciência e especialmente a Geometria, onde vemos que os personagens da história, eram em geral, pessoas simples, com suas dificuldades, seus sonhos e projetos. Priorizamos fatos históricos relacionados aos geômetras objeto de nosso trabalho, com suas histórias de vida, suas obras e dados biográficos. Desses relatos históricos, nota-se que um teorema do porte do de Menelaus de Alexandria, permaneceu quase no esquecimento por tantos séculos, sendo retomado pela habilidade de Giovanni Ceva que apesar das suas atividades profissionais, exercendo na maioria do tempo funções não acadêmicas, numa época onde poucos se preocupavam com o cultivo da matemática, buscou espaço e tempo para desenvolver suas pesquisas, escrevendo obras importantes para a matemática, especialmente a geometria, física entre outros conhecimentos científicos, com destaque na percepção de que a expressão usada para resolver o problema da colinearidade de três pontos sobre os lados de um triângulo, demonstrada por Menelaus, se prestava também para resolver os problemas relacionados a concorrência dos segmentos determinados a partir dos vértices do triângulo sobre os respectivos lados opostos e até mesmo no caso desses segmentos serem

paralelos entre si. É importante frisar que os teoremas de Menelaus e Ceva contribuíram na resolução de problemas relacionados a mecânica, hidrostática e astronomia. Utilizamos neste capítulo as referências [10], [38] e [39].

Os capítulos 2 e 3 são dedicados aos teoremas específicos deste trabalho, que são teoremas de Menelaus e Ceva os quais são apresentados acompanhados de figuras ilustrativas que facilitam o entendimento dos mesmos. As demonstrações dos teoremas são realizadas de diferentes formas, utilizando noções e princípios de domínio da maioria dos alunos desse nível de escolaridade, (como o teorema de Tales, congruência e semelhança de triângulos, lei dos senos, razões trigonométricas), para que o leitor possa escolher aquela na qual se sente mais confortável ao entendimento e utilização dos mesmos. Por se tratar de uma primeira visão dos teoremas, achamos por bem, inicialmente, não levar em conta a noção de segmentos orientados e portanto nos capítulos 2 e 3 os teoremas são apresentados sem observar o sentido de orientação dos segmentos e consequentemente, o sinal das razões entre esses segmentos. No capítulo 2 demonstramos o teorema de Menelaus de 4 modos diferentes, o mesmo ocorre no capítulo 3 onde apresentamos o teorema de Ceva e o demonstramos também de 4 modos distintos. Observando que no teorema de Ceva faremos somente as demonstrações considerando que o ponto de interseção das cevianas (segmentos que ligam o vértice a um ponto qualquer do lado ou prolongamento do lado oposto de um triângulo) é interior ao triângulo, embora o ponto de interseção possa também estar situado na região do plano exterior ao triângulo, em ambos a expressão dada pelas razões em que os pontos extremos das cevianas dividem os lados (ou prolongamentos dos lados) do triângulo seja a mesma. Para o capítulo 2, utilizamos as referências [7], [13], [14], [15], [19], [24], [27], [28], [30], [31], [34], [36] e [37]. Para o capítulo 3, além das citadas anteriormente, utilizamos ainda as referências [29], [35] e [37].

No capítulo 4 e seguintes, as apresentações e demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva, já levam em conta a orientação dos segmentos e razões com sinal. Iniciamos este capítulo definindo segmento orientado a partir do par ordenado de pontos do plano e a noção de razão com sinal com que um ponto divide um segmento orientado numa razão dada. Procedemos a seguir ao enunciado e demonstração do teorema de Menelaus onde tratamos da colinearidade de três pontos do plano, nos casos em que dois pontos estão sobre os lados de um triângulo e um ponto sobre o prolongamento do terceiro lado ou quando os três pontos estão todos sobre os prolongamentos dos lados do referido triângulo. Passamos ao problema que envolve a concorrência entre as retas suportes dos lados de um triângulo enunciando e demonstrando o teorema

de Ceva a partir de segmentos orientados. Nas demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva, neste capítulo, partimos dos casos de semelhança de triângulos. Como referências para este capítulo utilizamos [6], [7], [15] e [37]

No capítulo 5, tratamos das demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva com base na teoria vetorial, onde se observa que a utilização de vetores simplificam os cálculos, facilitando as provas e os resultados pretendidos. Iniciamos apresentando uma noção da geometria vetorial no plano, onde enfatizamos a relação de equiopolência como uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados do plano e a noção de vetor como o conjunto de todos os segmentos orientados que são equiopolentes a um segmento orientado dado. Continuando procedemos as demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva utilizando a teoria vetorial com destaque para as demonstrações das proposições recíprocas desses teoremas na forma vetorial. Ainda neste capítulo fazemos um breve estudo sobre as coordenadas baricêntricas, definindo as coordenadas baricêntrica e as coordenadas baricêntricas homogêneas de um certo ponto do plano com relação a um dado triângulo de referência, enfatizando que as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto com relação a um triângulo de referência podem ser dadas a partir de sub-áreas deste referido triângulo, tudo a título de pré-requisitos para as demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva com destaque para a demonstração do teorema de Menelaus para coordenadas baricêntricas. Utilizamos neste capítulo as referências: [?], [8], [9], [11], [16], [18], [22], [21] e [25].

No capítulo 6, veremos as versões espaciais dos teoremas de Menelaus e Ceva. Ao final deste capítulo apresentamos duas aplicações que ilustram tais teoremas. Utilizamos como referência, neste capítulo os textos, [32]: *Redescobrimo Ceva e Menelaus em dimensão três*, de autoria de Rui Eduardo Brasileiro Paiva e Francisco Regis Vieira Alves, apresentado no XI Seminário Nacional de História da Matemática e [20]: *Spatial Analogues of Ceva S Theorem and its Applications* de autoria de Nadav Goldberg.

No capítulo 7, apresentamos algumas aplicações dos teoremas de Menelaus e Ceva. Resolvemos 10 questões como aplicação dos teoremas, sendo 5 referentes ao teorema de Menelaus e 5 referentes ao teorema de Ceva. Os problemas enfocados são de concursos ou olimpíadas e vão acompanhadas de figuras ilustrativas para facilitar o entendimento das questões. Também apresentamos alguns temas selecionados que enriquecem e a teoria apresentada e mostram a utilidades dos teoremas objeto desta dissertação. Começamos este capítulo com a aplicação, que trata da construção, com apenas o uso de régua, do conjugado harmônico de um ponto inte-

rior ou exterior a um segmento dado. Finalmente, utilizamos os teoremas de Menelaus e Ceva, verificamos que a construção dada, fornece de fato o conjugado harmônico do ponto. Para este capítulo, utilizamos as referências: [7], [13], [30], [34] e [36].

Finalmente, esclarecemos que os enunciados dos teoremas de Menelaus e Ceva envolvem uma dupla implicação (isto é, um se, e somente se,) e que nós, nos referiremos à recíproca quando supormos a relação envolvendo razões simples de pontos que estão sobre os lados ou prolongamentos dos lados de um triângulo e provarmos que tais pontos são colineares no caso do teorema de Menelaus ou que os segmentos ligando os vértices a tais pontos aos lados opostos do triângulo onde estão os pontos, são concorrentes no caso do teorema de Ceva.

Esperamos proporcionar momentos agradáveis de estudo e aprendizado, com esses importantes teoremas da geometria Euclidiana.

Capítulo 1

Tópicos da história: Menelaus e Ceva.

Enfocamos neste primeiro capítulo, tópicos da história da Matemática relativa aos Geômetras objeto deste estudo, principalmente as suas biografias. Retrocedemos no tempo por mais de 19 séculos e vamos encontrar lá pelo ano 100, o Matemático, Geômetra e Astrônomo, Menelaus da cidade de Alexandria, no Egito antigo e apesar das dificuldades de encontrar dados e fatos históricos da época, encontramos um Menelaus criativo, estudioso para o seu tempo e que nos presenteou com o seu belo teorema, até os dias de hoje conhecido como o teorema de Menelaus entre outros trabalhos que se perderam com passar dos séculos. Em seguida avançamos 16 séculos e vamos encontrar o Matemático, Geômetra e Engenheiro Hidráulico italiano, Giovanni Ceva com sua interessante história de vida onde concilia a vida social ligada ao ofício de servidor público a serviço do Duque de Mântua com as atividades ligadas ao estudo das ciências especialmente a Geometria e a hidráulica. Os dados históricos e as biografias de Menelaus e Ceva tiveram como fontes principais as referências [10], [38] e [39].

1.1 Menelaus



Figura 1.1: Menelaus de Alexandria

Menelaus de Alexandria, nascido por volta do ano 70 dC em Alexandria no Egito, onde possivelmente permaneceu até a sua juventude, mudando-se posteriormente para Roma. Foi Astrônomo e Geômetra.

Téon de Alexandria (335 - 405), menciona um tratado de Cordas num círculo, em seis livros, escrito por Menelaus de Alexandria, que assim como vários outros de seus tratados se perdeu com o tempo.

Há registros de Ptolomeu (90 - 168), sobre observações astronômicas feitas por Menelaus em Roma. Sabe-se que ele continuou os trabalhos de Hiparco (190 - 126 a.C) sobre trigonometria e escreveu "O Livro das Proposições Esféricas", "Sobre o Conhecimento dos Pesos e a Distribuição de Diferentes Corpos", três livros sobre "Elementos de Geometria" com vários teoremas e "O Livro sobre o Triângulo". Acredita-se ainda que Menelaus teria escrito um texto sobre mecânica. Destes livros, apenas o primeiro, chegou aos nossos dias, o seu tratado Spherica, em três volumes sobre esféricos, que se preservou através de uma tradução árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica.

O Livro I desse tratado, estabelece uma base teórica para o estudo dos triângulos esféricos, assim como Euclides (330 a.C - 275 a.C), fez para os triângulos planos, como teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles, entre outros. Menelaus foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos:

"o espaço incluído entre arcos de círculos máximos na superfície de uma esfera (. . .), esses arcos são sempre menores que um semicírculo".

Nesse livro Menelaus apresenta um teorema que não possui um análogo na geometria plana: Dois triângulos esféricos são congruentes quando os ângulos correspondentes são iguais (ele não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos) Nessa obra considerou triângulos na esfera e provou, dentre outros resultados, que a soma dos seus ângulos internos é maior que 180° .

O Livro II, trata de teoremas de interesse da astronomia, e no livro III, se aborda o desenvolvimento da trigonometria esférica. Neste livro encontramos o teorema que leva o seu nome, que veio dar uma contribuição valiosa ao próprio desenvolvimento da geometria através dos tempos. O trabalho de Menelaus marcou um ponto importante na trigonometria esférica, tendo o seu trabalho sido aplicado em Astronomia. Ainda hoje, Menelaus é lembrado pelo seguinte teorema que, conhecido anteriormente no plano, foi demonstrado por Menelaus em geometria esférica: Considerem-se três pontos L , M e N , respectivamente, em cada um dos lados ou das retas suportes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$.

Então, os pontos L , M e N são colineares se, e somente se, $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$.

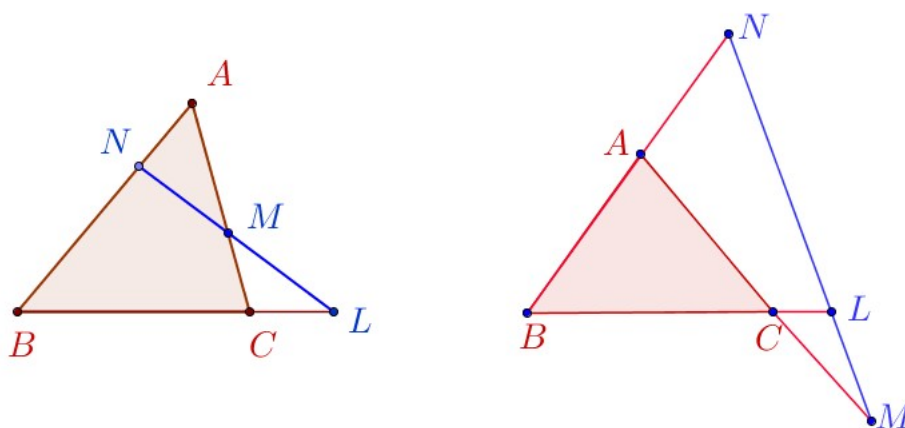


Figura 1.2: Teorema Menelaus

Seu nome se tornou mais conhecido através dos matemáticos, Pappus (290 - 347) e Proclus (412 - 485), com a divulgação de sua obra. Sabe-se muito pouco sobre a vida de Menelaus, mas teve grande influência na evolução da trigonometria esférica e na astronomia, participando

da Escola de Alexandria, uma das maiores escolas de matemática da antiga civilização mediterrânea, ao lado da escola Pitagórica (300 a.C - 400 d.C), em Crotona, Itália e da Academia de Platão (427 - 347 a.C) em Atenas na Grécia, por onde passaram estudando ou lecionando, nomes importantes da matemática antiga como: Apolônio de Perga (262 - 194aC), Aristarco de Samos (310 - 230 a.C), Diofanto (201 - 214 a 284 - 298 a.C), Euclides (330 - 275 a.C), Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C), Hipsicles (240 - 170 a.C), Heron (10 - 75), Pappus (290 - 350), Proclus (412 - 485), Ptolomeu (90 - 168), Téon (335 - 405) e Hipácia (350-370 a 8 de março de 415).

Menelaus ainda desenvolveu estudos sobre a aceleração da gravidade em Alexandria, onde, se supõe, tenha morrido nessa cidade por volta do ano 130 dC.

1.2 Ceva



Figura 1.3: Giovanne Ceva

Giovanni Benedetto Ceva, Matemático, Físico, Geômetra e Engenheiro hidráulico, lembrado pelo *Teorema de Ceva ou das cevianas*, ressuscitando um teorema antigo, análogo devido a Menelaus de Alexandria: o teorema de Menelaus. Nasceu em 01 de setembro de 1647 em Habsburgo, Empire (hoje Itália) data confirmada a partir de registros da paróquia onde Ceva foi batizado. Um dos filhos do casal Carlo Francesco Ceva (1610-1690) e Paola Columbo, que tiveram uma família numerosa onde a maioria dos filhos seguiu a vida religiosa. Ceva foi educado no Collégio di Brera, de orientação jesuíta na cidade de Milão, onde desde cedo mostrou aptidão para ciência e em especial pela matemática. Não há detalhes sobre a juventude de Ceva,

mas ele faz um comentário intrigante que sua juventude ficou triste com “muitos tipos de infortúnio”. Ele também sugere que sua família se opôs as suas pesquisas acadêmicas. Ao deixar a faculdade engaja-se na mesma atividade do pai: negócios relacionados a papéis políticos e administrativos em Milão, Gênova e Mântua. Além do trabalho, realizava atividades científicas, estudando geometria e hidráulica. Em 1670 entra na Universidade de Pisa, estudou com Donato Rossetti (1633-1686), o professor de lógica, que era um forte defensor de teorias atômicas. Ele também estudou com Alessandro Marchetti (1633 - 1714), ambos membros da Academia de Matemática-Física de Roma. É muito provável, portanto, que Ceva passou algum tempo na Academia em Roma. Ceva, nos dois anos que passou em Pisa, tentou resolver o problema da quadratura do círculo, emitindo algumas soluções julgadas incorretas o que o desanimou um pouco e após a sua estadia em Pisa, continuou com suas pesquisas e em 1678 publica a obra: *De lineis retis se invicem secantibus Statica constructio*, (estática da construção das linhas retas que cortam outra) contendo o *Teorema das cevianas*, demonstrando-o com argumentos relativos a centros de gravidade, considerado dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo, no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX. Se dos três vértices A , B e C de um triângulo forem traçados segmentos até os respectivos lados opostos, serão determinados três pontos L , M e N , que limitarão três segmentos AL , BM e CN concorrentes quando $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$ e reciprocamente. Neste caso, as cevianas são concorrentes e os pontos sobre os lados definem o que se chama, triângulo ceviano. Esta conclusão foi muito importante do ponto de vista da mecânica, pois L , M e N são os centros de gravidade de pares de pesos adequados colocados nos vértices do triângulo, sendo o ponto de concorrência o centro de gravidade de três pesos equivalentes, colocados nos três centros de gravidade. Na figura abaixo, \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são as cevianas que concorrem no ponto P e o triângulo LMN é o triângulo ceviano.

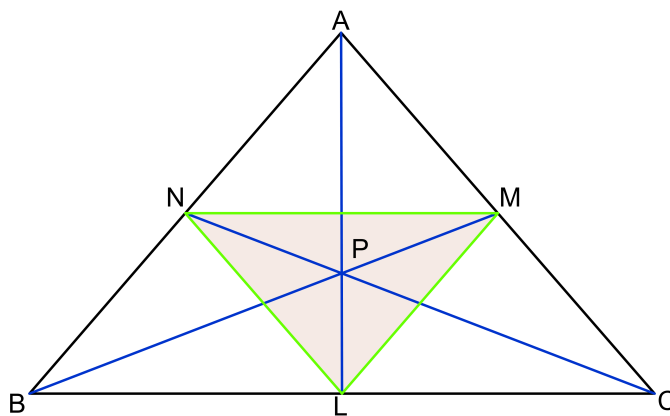


Figura 1.4: Teorema de Ceva

Considerando o triângulo ABC e as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} , o teorema de Ceva garante que $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$, se e somente se \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes.

Na época este trabalho não teve grande repercussão, até que o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), revendo o trabalho de Ceva reconheceu a importância do mesmo, fazendo jus aos méritos do autor.

Ceva ao mesmo tempo que procedia seus estudos matemáticos, continuava com atividades semelhantes a do seu pai, a serviço do duque de Montferrat e Mântua, cidade onde passou a viver, sendo nesta época nomeado Auditor e Comissário assumindo a função de seu pai. Nessa função administrativa, Ceva era responsável pela economia de Mântua e Montferrat, porém as atribuições com os papéis do governo não o tirou de suas pesquisas e encontrou tempo para prosseguir com seus estudos científicos. Em 1682 escreveu a obra *Opusculas mathematicae de potentiis obliquis, de pendulis, de VASIS et de fluminibus*, ("O pequeno trabalho, matemática dos poderes da superfície inclinada, dos pêndulos, de seus utensílios, e do leito do rio") obra, em quatro partes. Ela investiga questões de geometria pura, bem como aplicações da matemática, em particular a hidrodinâmica.

Considerando a importância da contribuição de Ceva para o Estado, Ferdinando Carlo Gonzaga, duque de Mantua e Montferrat concede-lhe a cidadania de Mântua em 1683. Apesar de sempre estar muito ocupado com os deveres da função que ocupava, Ceva continuou com as pesquisas matemática, se correspondendo com muitos dos principais cientistas da época se mantendo na vanguarda dos progressos matemáticos.

Em 15 de janeiro 1685, Ceva casava-se com Cecilia Vecchi, com quem tiveram sete filhos. O duque de Mântua, estende a cidadania já concedida a Ceva para toda sua família e em 1686 é nomeado professor de matemática na Universidade de Mântua, onde continuou a realizar pes-

quisas sobre os problemas geométricos e como proceder em questões econômicas, publicando ainda algumas obras: Em 1692, *Geometria motus (Geometria do movimento), opusculum geometricum em gratiam aquarum excogitatum (Em favor da pequena Geometria artificial)*, obra dedicada ao duque de Mântua, Ferdinando Carlo. Esta obra antecipou o cálculo infinitesimal em seu estudo de curvas, como parábolas e hipérbolas, utilizando métodos infinitesimais do tipo introduzido pelo matemático Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647). Em 1710 publicou *Tria Problemata geometris proposita* (Três problemas propostos de geometria). No ano seguinte, ele publicou: *De re nummeraria quod potuit fieri, geometricè tractata (matéria numerária tratada geometricamente)*, um dos primeiros trabalhos em economia matemática, nele Ceva tenta resolver as condições de equilíbrio para o sistema monetário de um estado como Mantua. Sobre hidráulica, publicou *Opus hydrostaticum (trabalho de hidrostática)* em 1728, que, com exceção de *De lineis retos* é a sua melhor contribuição sobre esse tema. Ocupou o cargo na Universidade durante o resto de sua vida, falecendo em 13 de maio de 1734, em Mântua, Habsburgo Empire, agora Itália.

Capítulo 2

O Teorema de Menelaus

Neste capítulo trataremos do teorema de Menelaus que data de (c.100 dC) e trata da colinearidade de três pontos dados sobre os lados ou prolongamentos dos lados de um triângulo, mediante condições entre as razões em que esses pontos dividem os segmentos formado pelos lados (ou prolongamentos dos lados) do triângulo.

Apresentaremos neste capítulo quatro demonstrações deste teorema.

2.1 Resultados Preliminares

Antes de procedermos a enunciar e fazer as demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva, veremos alguns conceitos e resultados que serão úteis nas demonstrações dos teoremas que abordaremos nos seguintes capítulos.

Notações:

- Indicamos o segmento de pontos extremos A e B por \overline{AB} .
- AB denotará a medida do segmento \overline{AB} .
- Denotaremos por S_{AB} o raio (ou semirreta) com ponto inicial A e ponto interior B .
- \overrightarrow{AB} Designará o vetor com ponto inicial A e ponto final B .
- S_{ABC} indicará a área do triângulo $\triangle ABC$.
- $[ABC]$ indicará a área com sinal do triângulo $\triangle ABC$.

Iniciamos nosso trabalho definindo o conceito de razão simples entre três pontos que estão sobre uma reta. Damos como referência para este estudo o livro de Jacir Venturi [37].

Foi o matemático Möbius (1790 ? 1868) quem adotou a convenção de sinal às medidas de

distâncias, ângulos, áreas e volumes.

Definição 2.1 Dizemos que uma reta é orientada, quando se estabelece um sentido de percurso que é adotado como sendo positivo; sendo portanto negativo o sentido contrário. Indica-se o sentido de uma reta por uma seta.



Figura 2.1: reta - reta orientada

Definição 2.2 Dados dois pontos A e B sobre uma reta orientada r , indicamos a medida algébrica (ou distância dirigida ou distância com sinal) do segmento \overline{AB} , com origem A e extremidade B , por um número real, positivo se sua orientação concorda com o sentido positivo da reta e por um número negativo em caso contrário. Representamos por AB a notação da medida algébrica do segmento \overline{AB} .

Exemplo 2.1 Sobre a reta orientada r , escolhemos uma unidade de comprimento u para estabelecer a medida algébrica do segmento \overline{AB} . Segundo a figura ilustrativa abaixo, temos que $AB = u$ e, portanto $BA = -3u$. O segmentos orientados \overline{AB} e \overline{BA} tem medidas algébricas 3 e -3 respectivamente. Logo, $AB + BA = 0$, ou $AB = -BA$.

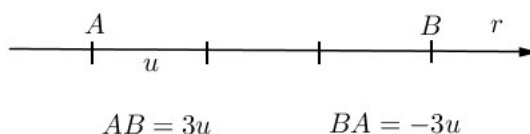


Figura 2.2: medida algébrica do segmento orientado

Definição 2.3 Dados os pontos M , A e B , sobre uma reta (orientada) r , denominamos razão simples desses pontos, nessa ordem, ao quociente, $\frac{MA}{MB}$ que simbolizamos por (MAB) . Assim, a razão simples $(MAB) = \frac{MA}{MB}$.

Observação 2.1 Se $(MAB) = t$, diremos que M divide o segmento \overline{AB} na razão t .

Vejamos algumas considerações sobre a razão.

(a) **Sinal da razão:** Sendo r uma reta orientada, a razão simples (MAB) e MA e MB a medida algébrica dos segmentos orientados \overline{MA} e \overline{MB} respectivamente, será positiva se o ponto M for externo ao segmento finito \overline{AB} . Se interno, a razão será negativa. Veja figura ilustrativa a seguir.

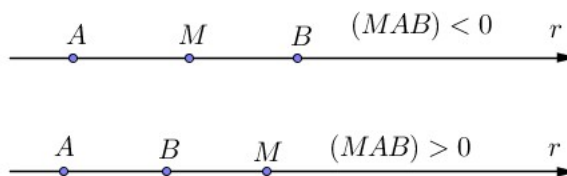


Figura 2.3: Sinal da razão

Além disso, o sinal de (MAB) não muda se em lugar de ter $(MAB) = \frac{MA}{MB}$, tivermos $(MAB) = \frac{AM}{BM}$, ou seja $\frac{MA}{MB} = \frac{AM}{BM}$. O mesmo acontece se mudarmos o sentido de percorrer r .

Vejam alguns exemplos.

Exemplo 2.2 Para M ponto interior do segmento \overline{AB} .

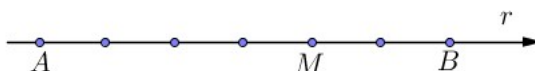


Figura 2.4

$$(ABM) = \frac{MA}{MB} = \frac{-4}{2} = -2$$

Exemplo 2.3 Para M ponto exterior do segmento \overline{AB} .



Figura 2.5

$$(ABM) = \frac{MA}{MB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(b) **Casos particulares.**

Caso 1. Se $M = A$, a razão simples é nula, pois $(MAB) = \frac{MA}{MB} = \frac{0}{MB} = 0$.

Caso 2. Se $M = B$, a razão simples não está definida pois $MB = 0$.

Caso 3. Se M é o ponto médio de \overline{AB} , a razão simples vale -1 . $(MAB) = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{-MA} = -1$.

(c) **Unicidade do ponto que divide o segmento.** É única a posição do ponto que divide um segmento numa razão dada, como prova o seguinte resultado.

Lema 2.1 (Unicidade do ponto divisor) *Dados os pontos A, B e M sobre uma reta r . É única a posição com que o ponto M divide o segmento \overline{AB} numa razão t dada.*

Prova: Suponha que M divide o segmento \overline{AB} na razão t . Vamos dividir a prova, segundo M seja interior ou exterior ao segmento \overline{AB} .

Caso M interior ao segmento \overline{AB} . Consideremos que o ponto N também divide interiormente o segmento \overline{AB} na mesma razão t . Veja figura abaixo.

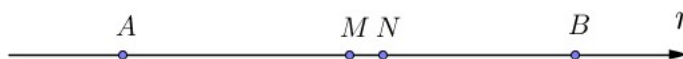


Figura 2.6: M interior a \overline{AB}

Podemos escrever

$$\begin{aligned} t = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} &\Rightarrow \frac{MA}{MB} - \frac{MB}{MB} = \frac{NA}{NB} - \frac{NB}{NB} \\ &\Rightarrow \frac{BA}{MB} = \frac{MB - MA}{MB} = \frac{NB - NA}{NB} = \frac{BA}{NB} \\ &\Rightarrow MB = NB \\ &\Rightarrow M = N. \end{aligned}$$

Portanto, M é divisor único interior ao segmento \overline{AB} na razão t .

Caso M exterior ao segmento \overline{AB} . Considere N , o ponto que divide externamente o segmento \overline{AB} também na razão t , conforme figura abaixo.



Figura 2.7: M exterior a \overline{AB}

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
 t = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} &\Rightarrow \frac{MA}{MB} - \frac{MB}{MB} = \frac{NA}{NB} - \frac{NB}{NB} \\
 &\Rightarrow \frac{BA}{MB} = \frac{MA + MB}{MB} = \frac{NA + NB}{NB} = \frac{BA}{NB} \\
 &\Rightarrow NB = MB \\
 &\Rightarrow N = M.
 \end{aligned}$$

Ou seja, M é divisor único exterior ao segmento \overline{AB} na razão t . ■

Observação 2.2 *Cada vez que tenhamos a relação $\frac{NA}{NB} = \frac{SA}{SB}$, onde S e N são ambos pontos interiores ou exteriores do segmento \overline{AB} , poderemos concluir pelo lema acima que os pontos N e S são coincidentes.*

(d) Razões de segmentos como quociente entre comprimentos. Seja M o ponto que divide o segmento \overline{AB} na razão $t = \frac{AM}{BM}$. Considerando MA e MB simplesmente como os comprimentos (e não como as medidas algébricas) dos segmentos \overline{MA} e \overline{MB} respectivamente, teremos que a razão $(ABM) = t$ será estritamente positiva (quando $B \neq M$). Ou seja obtemos o valor da razão em que um ponto divide um dado segmento sem considerar a orientação da reta nem dos segmentos envolvidos.

Convenção 2.1 *Nas demonstrações que faremos neste capítulo e no seguinte adotaremos este conceito para a razão simples, ou seja, veremos a razão simples como o quociente entre comprimentos de segmentos e, neste caso teremos que tanto AB como BA designará o comprimento do segmento \overline{AB} . Assim, teremos que $AB = BA$.*

Apresentamos a seguir um resultado que usaremos na prova dos teorema de Menelaus e Ceva tendo presente a notação adotada em (2.1). Iniciamos isto com o seguinte lema.

Lema 2.2 *Triângulos com alturas iguais tem áreas proporcionais às medidas das bases dos triângulos.*

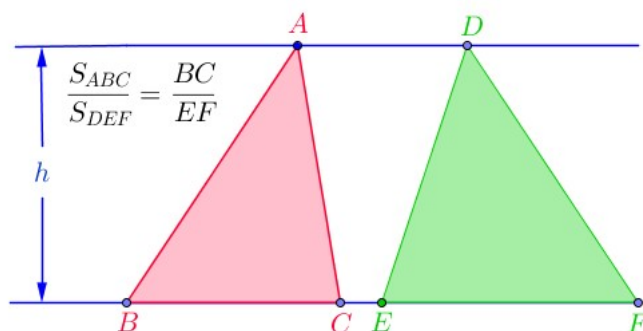


Figura 2.8: Proporcionalidade: Área - Base

Prova. Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com a mesma altura em relação às bases \overline{BC} e \overline{EF} respectivamente, como indica a figura ilustrativa acima. Temos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h \cdot BC \quad \text{e} \quad S_{DEF} = \frac{1}{2}h \cdot EF.$$

Logo,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{BC}{EF} \quad \blacksquare$$

O seguinte resultado estabelece também uma proporcionalidade entre áreas de triângulos e comprimento de segmentos.

Proposição 2.1 *Dados um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto P não pertencente a nenhum dos lados, se a semirreta S_{AP} intercepta o segmento \overline{BC} no ponto L , então $\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{BL}{LC}$*

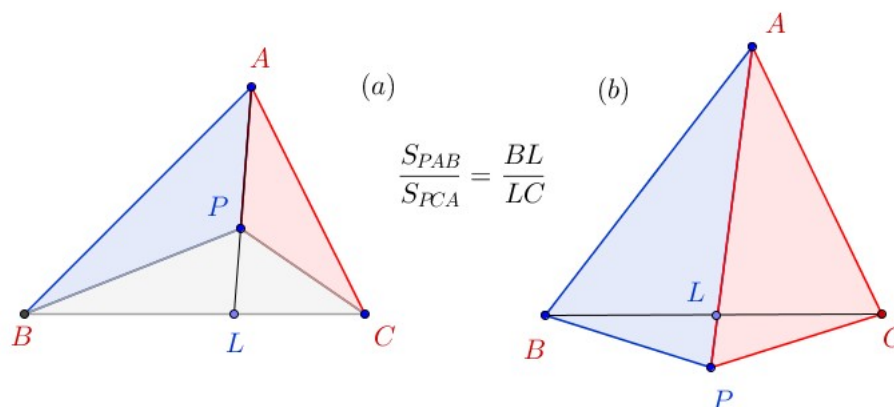


Figura 2.9: Razão entre áreas de triângulos e comprimentos de segmentos

Prova: Considerando às configurações (a) ou (b) da figura acima, temos que os triângulos $\triangle PAB$ e $\triangle PBL$ tem a mesma altura em relação às bases \overline{PA} e \overline{PL} respectivamente. Também

os triângulos $\triangle PAC$ e $\triangle PLC$ tem a mesma altura em relação às bases \overline{PA} e \overline{PL} respectivamente. Segue do lema (2.2),

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{AP}{PL} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}} \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}}.$$

Donde concluímos, usando, novamente o lema (2.2), para os triângulos $\triangle PBL$ e $\triangle PLC$ que tem a mesma altura em relação às bases \overline{BL} e \overline{LC} respectivamente,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBL}}{S_{PLC}} = \frac{BL}{LC} \quad \blacksquare$$

Observação 2.3 De modo análogo, temos, para um ponto P interior ao triângulo $\triangle ABC$, considerando o ponto M como interseção do segmento \overline{AC} e o raio \overrightarrow{BP} e o ponto N como interseção do segmento \overline{AB} e o raio \overrightarrow{CP} :

$$\frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} = \frac{CM}{MA} \quad e \quad \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}} = \frac{AN}{NB}$$

Podemos resumir estas relações, indicando-as na seguinte figura abaixo:

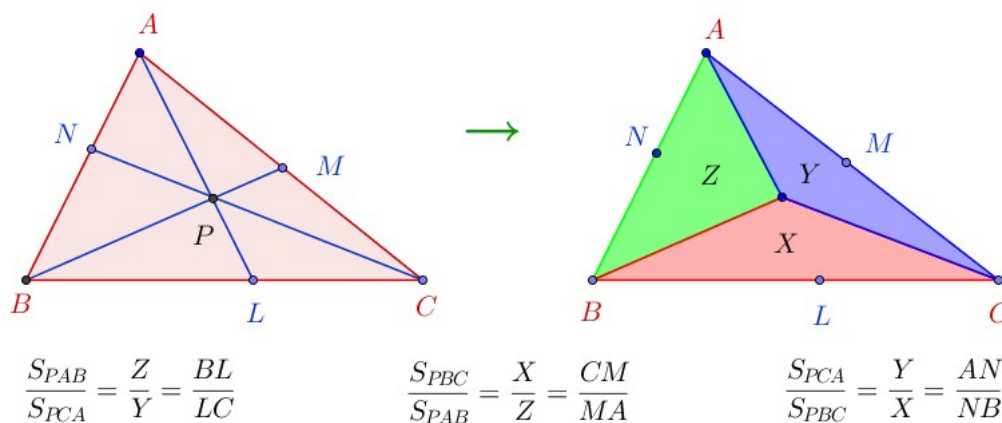


Figura 2.10

2.2 O Teorema de Menelaus

O teorema que leva o seu nome, foi escrito e demonstrado por Menelaus por volta do ano 100 e trata dos problemas envolvendo a colinearidade de três pontos dados sobre os lados de um

triângulo, incluindo os prolongamentos desses lados, podendo ser dois pontos sobre os lados e um sobre o prolongamento de um dos lados ou até os três pontos sobre os prolongamentos dos lados. Esses pontos devem ser distintos dos vértices e de posse desse teorema muitos problemas de geometria tem a sua solução simplificada.

Apresentamos a seguir o teorema de Menelaus numa versão simples. Neste teorema temos uma reta (ou segmento) intersectando dois lados do triângulo ou intersectando todas as prolongações dos lados do triângulo. Denotaremos o triângulo por $\triangle ABC$ e os pontos de interseção por L , M e N . No primeiro caso, adotaremos que o ponto N seja a interseção da reta com o segmento \overline{AB} e o ponto M seja a interseção da reta com \overline{AC} e o ponto L será a interseção da reta com (necessariamente) o prolongamento do lado \overline{BC} . Para o segundo caso os pontos N , M e L serão a interseção da reta com as respectivas prolongações dos lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} do triângulo $\triangle ABC$.

Finalmente, advertimos que adotaremos para a razão simples entre três pontos sobre uma reta a convenção dada em (2.1) isto, porque nos conteúdos utilizados para fazer as demonstrações, as razões aparecem, geralmente, como quociente de comprimento de segmentos.

Teorema 2.1 Teorema de Menelaus. *Se uma reta r intersecta os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} ou as prolongações num triângulo $\triangle ABC$ nos pontos N , L e M , respectivamente, então*

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Inversamente: se N , L e M são pontos respectivamente sobre os lados ou prolongamentos dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} do triângulo $\triangle ABC$ tais que $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$, então os pontos N , L e M são colineares.

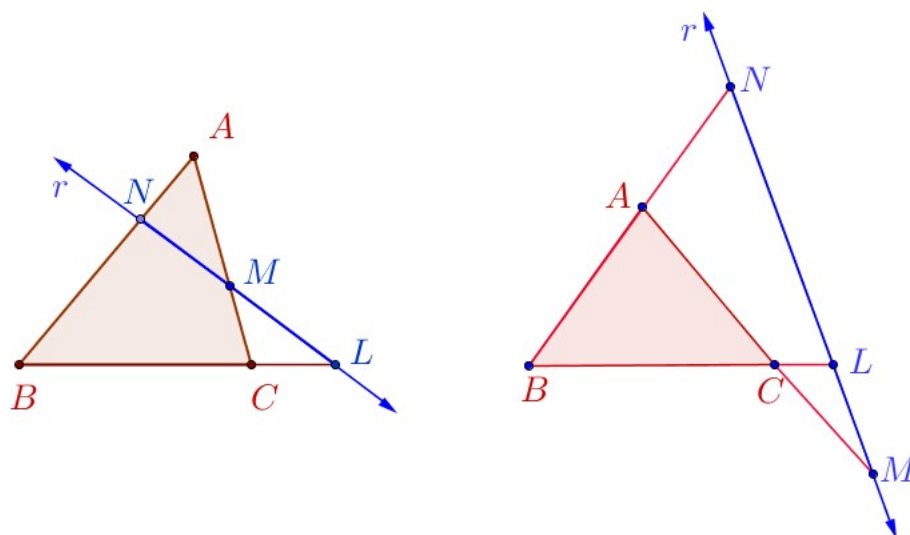


Figura 2.11: Teorema Menelaus

Observação 2.4 Para evitar erros na hora de escrever as razões, aconselhamos ao leitor escolher um sentido para a formação das razões que vão aparecer na expressão produto. Pode ser: partir do ponto da reta transversal no sentido dos vértices (ponto da transversal \rightarrow vértice) ou escolher, a partir do vértice no sentido do ponto da reta transversal (vértice \rightarrow ponto da transversal). É importante, uma vez escolhido um sentido para a primeira razão que a escolha das demais sigam a mesma orientação.

Definição 2.4 A reta transversal que contém os pontos N , M e L citados no teorema de Menelaus é denominada **reta de Menelaus**.

2.3 Demonstrações do Teorema de Menelaus

Por se tratar de um teorema relevante e de muita aplicação no campo da geometria, especialmente nos problemas de colinearidade, faremos a demonstração do mesmo de diferentes formas. As primeiras quatro demonstrações são apresentadas nas subseções seguintes.

2.3.1 Via Teorema de Tales

Vamos utilizar o teorema de Tales nesta forma de demonstração, as referências usadas são [19], [24] e [27].

Suponhamos inicialmente que os pontos N , L e M são colineares. Distinguímos dois casos diferentes, veja figura ilustrativa abaixo.

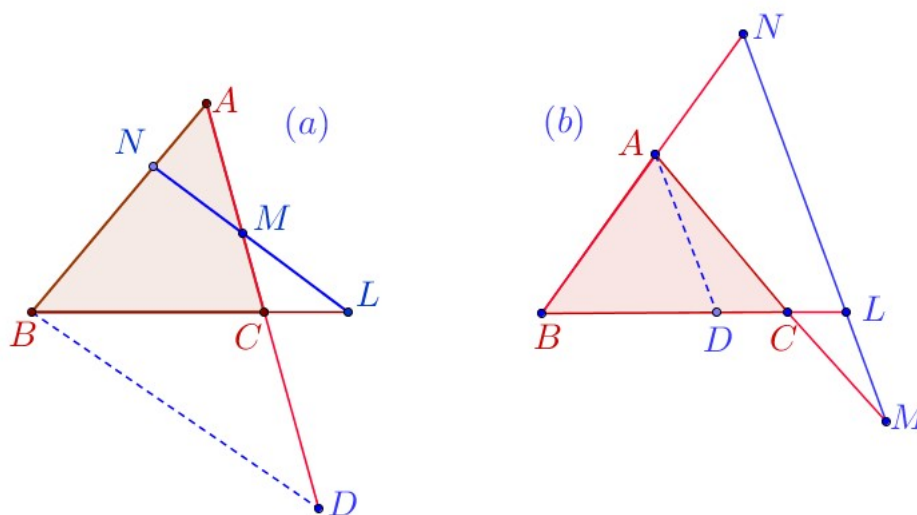


Figura 2.12: Menelaus: Via teorema de Tales

Para o caso (a), traçamos o segmento \overline{BD} paralelo à reta \overleftrightarrow{NL} (*reta de Menelaus*) que intercepta o prolongamento do lado \overline{AC} no ponto D e no caso (b), traçamos o segmento \overline{AD} paralelo a \overline{NM} com D no segmento \overline{BC} .

Para o caso (a) da figura acima, identificamos a proporcionalidade entre os segmentos paralelos \overline{BD} e \overline{NL} sobre os transversais.

Os segmentos paralelos \overline{BD} e \overline{NM} cortam as secantes \overline{AB} e \overline{AD} em partes proporcionais, logo

$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MD}$. Donde obtemos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{MD}{MA} = 1 \tag{2.1}$$

Pelo mesmo raciocínio, considerando os segmentos paralelos \overline{NL} e \overline{BD} e tomando agora as secantes \overline{BL} e \overline{MD} teremos:

$$\frac{CD}{MC} = \frac{BC}{CL} \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{MC + CD}{MC} = \frac{BC + CL}{CL} = \frac{BL}{CL}.$$

Concluimos que

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \quad (2.2)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (2.1) e (2.2) e suprimindo o fator MD obtemos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Para o caso (b) temos:

Os segmentos \overline{BN} e \overline{BL} cortam as paralelas \overline{AD} e \overline{NL} em partes proporcionais, logo

$$\frac{BA}{AN} = \frac{BD}{DL} \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{BA + AN}{AN} = \frac{BD + DL}{LD} = \frac{BL}{LD}.$$

Segue daí que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LD} = 1 \quad (2.3)$$

Analogamente considerando os segmentos paralelos \overline{AD} e \overline{NM} cortados pelas transversais \overline{AM} e \overline{DL} temos

$$\frac{AC}{CM} = \frac{DC}{CL} \Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{AC + CM}{CM} = \frac{DC + CL}{CL} = \frac{DL}{CL}.$$

Donde,

$$\frac{MC}{MA} \cdot \frac{LD}{LC} = 1 \quad (2.4)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (2.3) e (2.4) e suprimindo o fator LD obtemos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Isto completa a demonstração da primeira parte do teorema de Menelaus.

Para provar a recíproca, ou seja:

Dados um triângulo $\triangle ABC$ e pontos N , L e M sobre os lados (ou prolongamentos), \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , respectivamente. Se ocorrer que $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$, então os pontos L , M e N são colineares.

No caso (a), prolongamos o segmento \overline{NM} até que intercepte a prolongação do lado \overline{AB} no ponto P .

Para o caso (b) consideramos o segmento \overline{NM} que corta a prolongação do lado \overline{BC} no ponto P ; conforme figura abaixo.

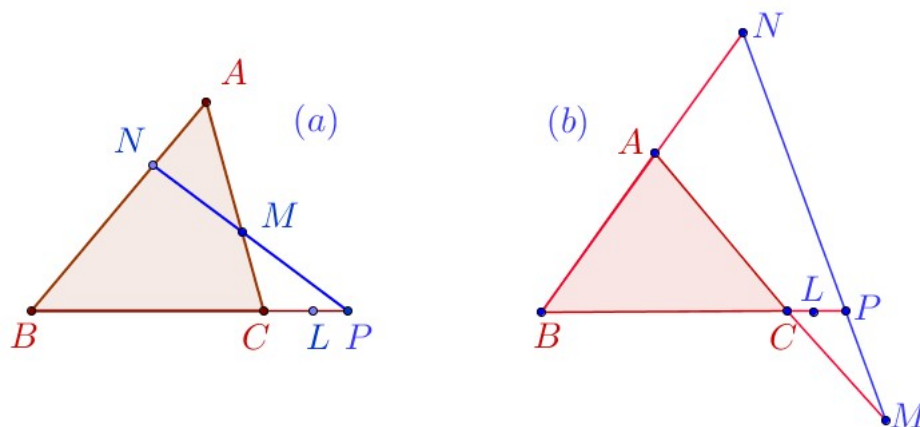


Figura 2.13: Recíproca do Teorema de Menelaus

A demonstração que faremos vale para os dois casos. Pelo que acabamos de provar, vale que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Como por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1,$$

temos daí, que:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{LB}{LC} \Rightarrow P = L.$$

Esta última igualdade é obtida pela unicidade do ponto divisor de um segmento (Lema 2.1), mostrado no início deste capítulo. Concluimos que os pontos N , L e M são colineares. ■

Observação 2.5 Nas demonstrações seguintes deste capítulo, omitiremos a parte correspondente à demonstração da recíproca do teorema de Menelaus por serem análogas à demonstração procedida acima.

2.3.2 Via relação entre áreas

Neste segundo modo de demonstrarmos o teorema de Menelaus utilizaremos as considerações sobre áreas. Especificamente, usaremos o Lema 2.2 e a Proposição 2.1 mostrados no início

deste capítulo. As referências usadas aqui são [7] e [13].

Para tal vamos considerar a figuras a seguir, onde esta última, retoma a Proposição 2.1, que relaciona as razões em que os pontos L , M e N dividem respectivamente, os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$, com as respectivas áreas. Fazendo, $S_{MBL} = X$, $S_{MAL} = Y$ e $S_{MAB} = Z$.

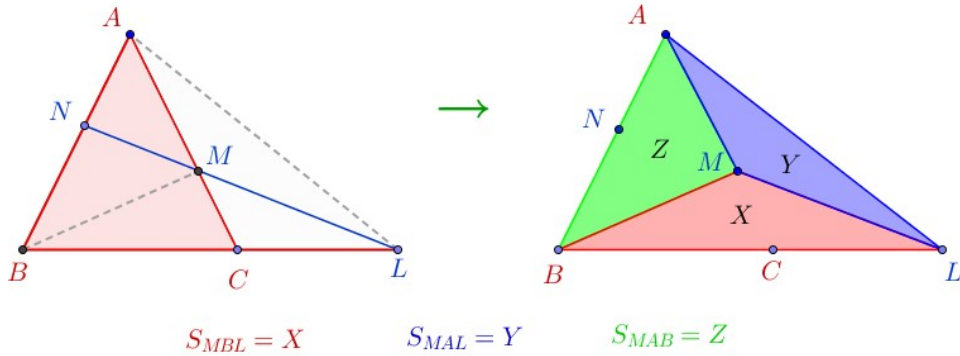


Figura 2.14: Menelaus: Via relação entre áreas

Pretendemos mostrar que, se os pontos N , M e L são colineares, então temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Pela Proposição 2.1, temos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{S_{MLA}}{S_{MBL}} = \frac{Y}{X} \tag{2.5}$$

e

$$\frac{BC}{LC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AML}} = \frac{Z}{Y} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{BC + CL}{LC} = \frac{S_{MAB}}{S_{AML}} + \frac{S_{AML}}{S_{AML}} = \frac{Z + Y}{Y},$$

ou seja

$$\frac{LB}{LC} = \frac{S_{MAB} + S_{AML}}{S_{AML}} = \frac{Z + Y}{Y}. \tag{2.6}$$

Por outra parte, como os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle MBC$ tem a mesma altura em relação às bases \overline{AM} e \overline{MC} respectivamente; e o mesmo ocorre para os triângulos $\triangle AML$ e $\triangle MCL$, obtemos pelo Lema 2.2,

$$\frac{S_{MCB}}{S_{AMB}} = \frac{MC}{MA} = \frac{S_{MCL}}{S_{AML}}.$$

Portanto,

$$\frac{MC}{MA} = \frac{S_{MCB} + S_{MCL}}{S_{AMB} + S_{AML}} = \frac{X}{Z + Y}. \quad (2.7)$$

Dai, multiplicando membro a membro as igualdades (2.5), (2.6) e (2.7), obtemos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{Y}{X} \cdot \frac{Z + Y}{Y} \cdot \frac{X}{Z + Y} = 1 \quad \blacksquare$$

2.3.3 Via semelhança de triângulos

Provaremos agora o teorema de Menelaus utilizando semelhança de triângulos. Utilizamos [13] e [19].

Novamente, suporemos inicialmente que os pontos L , M e N são colineares para mostrar que temos a relação

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

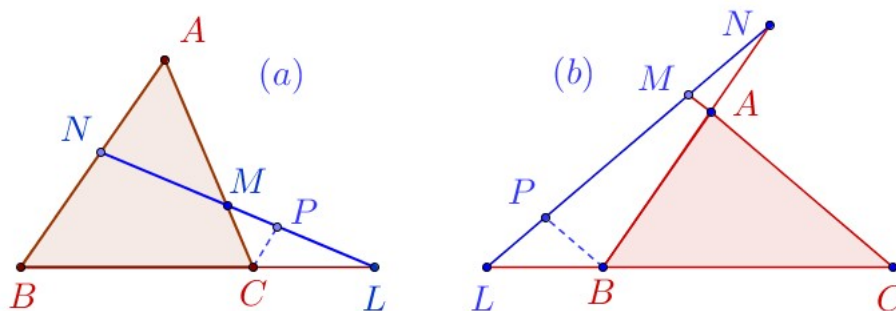


Figura 2.15: Menelaus: Via semelhança de triângulos

Considerando a figura ilustrativa acima temos: no caso (a) traçado um segmento \overline{PC} paralelo a \overline{AB} e no caso (b) traçamos o segmento \overline{PB} paralelo a \overline{AC} onde em ambos casos o ponto P está sobre a reta de Menelaus.

Demonstração do caso (a). Das semelhanças entre os triângulos da figura, podemos escrever:

- Os triângulos $\triangle NBL \sim \triangle PCL$. Isto, pois tem um ângulo comum e dois ângulos correspondentes. Portanto, pela proporcionalidade dos lados desses triângulos, temos $\frac{NB}{PC} = \frac{LB}{LC}$. Segue que,

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{PC}{NB} = 1. \quad (2.8)$$

• Os triângulos $\triangle ANM \sim \triangle CPM$. Isto, pois tem um ângulo oposto pelo vértice e dois ângulos alternos internos. Assim, temos $\frac{AN}{CP} = \frac{AM}{CM}$. Portanto,

$$\frac{NA}{MA} \cdot \frac{MC}{PC} = 1. \quad (2.9)$$

Multiplicando os dois membros das igualdades (2.8) e (2.9), e simplificando o fator comum PC , encontramos a relação procurada:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Demonstração do caso (b). Novamente usamos semelhança de triângulos. Temos:

• Os triângulos $\triangle MLC \sim \triangle PLB$, pois tem um ângulo comum e dois ângulos correspondentes. Logo, $\frac{LB}{LC} = \frac{PB}{MC}$. Portanto,

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{PB} = 1. \quad (2.10)$$

• Os triângulos $\triangle PBN \sim \triangle MAN$, pois tem um ângulo comum e dois ângulos correspondentes. Assim, temos $\frac{NA}{NB} = \frac{AM}{BP}$. Logo,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{MA} = 1. \quad (2.11)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (2.10) e (2.11), e simplificando o fator comum PB , encontramos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \quad \blacksquare$$

2.3.4 Via semelhança de triângulos retângulos

Mais uma demonstração deste teorema usando semelhança, agora de triângulos retângulos. Aqui usamos as referências [6], [13], [19], [24], [34] e [36].

Suporemos, como sempre, que os pontos L , M e N são colineares para mostrar que temos a relação

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Traçamos pelos vértices, A , B e C do triângulo $\triangle ABC$, as alturas relativas aos triângulos $\triangle ANM$, $\triangle BNL$ e $\triangle CLM$ respectivamente. Denotamos por E , F e D os pés de tais alturas

e por H_a , H_b e H_c seus respectivos comprimentos.

Assim, como os segmentos \overline{AE} , \overline{BF} e \overline{CD} são perpendiculares à reta de Menelaus, eles são paralelos entre si; podemos, então concluir a semelhança dos seguintes triângulos retângulos (veja figura ilustrativa abaixo).

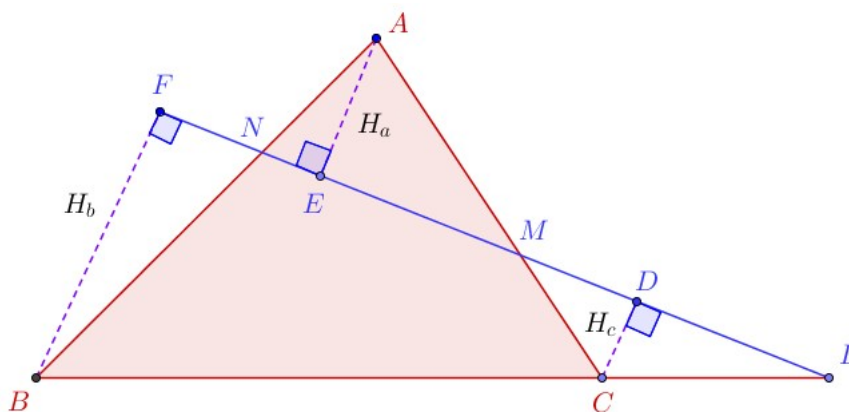


Figura 2.16: Menelaus: Via semelhança de triângulos retângulos

- $\triangle BFL \sim \triangle CDL$ (possuem um ângulo reto e um ângulo comum), segue daí que:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{H_b}{H_c} \quad (2.12)$$

- $\triangle CDM \sim \triangle AEM$ (possuem um ângulo reto e um ângulo oposto pelo vértice), logo

$$\frac{MC}{MA} = \frac{H_c}{H_a} \quad (2.13)$$

- $\triangle BFN \sim \triangle AEN$ (possuem um ângulo reto e um oposto pelo vértice), logo

$$\frac{NA}{NB} = \frac{H_a}{H_b} \quad (2.14)$$

Multiplicando membro a membro as relações (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos:

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{H_b}{H_c} \cdot \frac{H_c}{H_a} \cdot \frac{H_a}{H_b} \Rightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

O Teorema de Ceva

Neste capítulo trataremos do Teorema de Ceva que data do ano de 1678, que retomando o antigo teorema de Menelaus, verifica que a mesma relação dada pelas razões dos pontos que dividem os lados ou prolongamentos dos lados do triângulo, se adequa a uma outra situação. Agora, trata-se de provar a concorrência dos segmentos com extremos nos vértices e um ponto qualquer do respectivo lado oposto do triângulo, quando as razões simples formadas por tais pontos verificam a mesma relação dada no teorema de Menelaus.

Como no capítulo anterior não consideraremos a orientação dos segmentos e adotamos novamente a convenção (2.1).

3.1 O Teorema de Ceva

Definição 3.1 *Uma ceviana é qualquer segmento que une um vértice a qualquer ponto do lado oposto do triângulo. O nome ceviana foi dado devido a Giovanni Ceva.*

Teorema 3.1 (Teorema de Ceva) *Sejam L , M e N pontos, respectivamente, sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$. As cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} intersectam-se em um ponto P , se, e somente se, $\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$.*

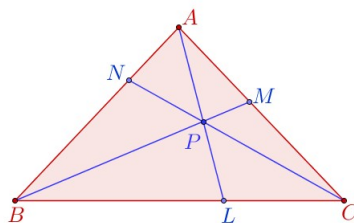


Figura 3.1: Teorema de Ceva

3.2 Demonstrações do Teorema de Ceva

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do teorema de Ceva, desenvolvidas de modos diferentes.

3.2.1 Via Teorema de Menelaus

Faremos esta primeira demonstração com base no teorema de Menelaus. As referências usadas são [13] e [14].

Inicialmente, suporemos que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes no ponto P e mostraremos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Considerando a figura, 3.2 (a), desdobrando-a nas figuras: 3.2 (b) e 3.2 (c) abaixo.

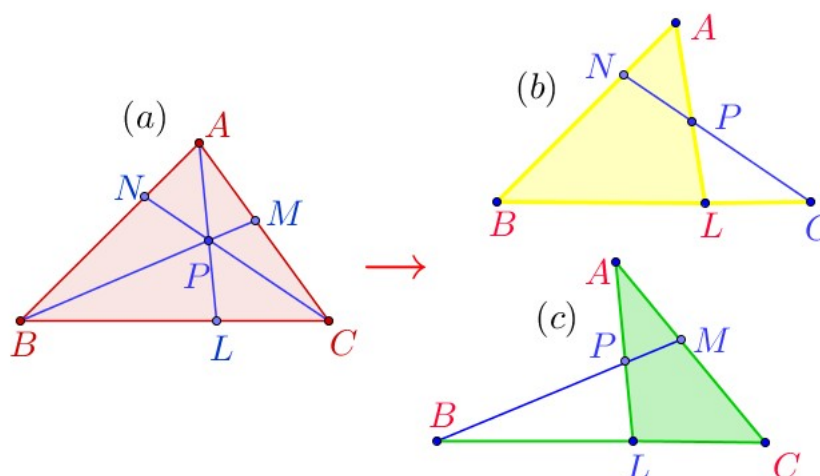


Figura 3.2: Ceva: Via teorema de Menelaus

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo $\triangle ABL$ e a transversal \overleftrightarrow{NPC} , figura 3.2 (b), podemos escrever,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{CB}{CL} \cdot \frac{PL}{PA} = 1 \tag{3.1}$$

O teorema de Menelaus, aplicado agora ao triângulo $\triangle ALC$ e a transversal, \overleftrightarrow{BPM} figura 3.2 (c) nos dá,

$$\frac{PA}{PL} \cdot \frac{BL}{BC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \tag{3.2}$$

Multiplicando (3.1) por (3.2) e eliminando os fatores comuns, BC e PL , resulta,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

Para provar a volta, ou seja, mostrar que a recíproca desse teorema vale, utilizaremos argumentação semelhante à usada na recíproca do Teorema de Menelaus.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} . Considere, agora, a ceviana partindo do vértice C , passando pelo ponto P e achando o lado \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$ no ponto S . Veja figura ilustrativa abaixo.

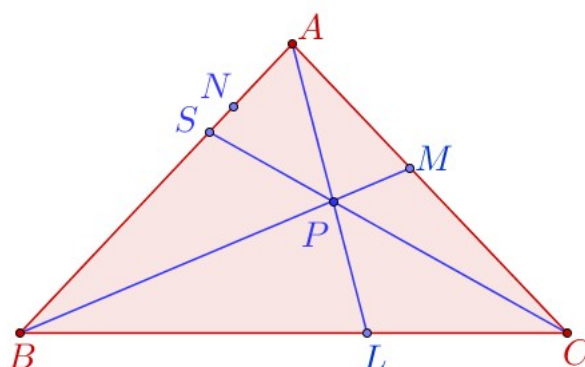


Figura 3.3: Recíproca do teorema de Ceva

Pela primeira parte do teorema de Ceva podemos escrever,

$$\frac{SA}{SB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Porém, por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Dessas relações, podemos concluir, usando o Lema 2.1, que:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow S = N$$

Logo, as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes. ■

Observação 3.1 Nas demonstrações seguintes do teorema de Ceva omitiremos a parte correspondente à demonstração da proposição recíproca por serem análogas à demonstração dada anteriormente, com exceção da demonstração envolvendo a lei dos senos.

3.2.2 Via Relação entre áreas

Faremos a segunda demonstração do teorema de Ceva utilizando relações entre áreas. Às referências usadas aqui são [13], [19], [34] e [35].

Vamos mostrar em primeiro lugar que

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

a partir do fato que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} serem concorrentes em um único ponto.

Como consequência da Proposição 2.1 e a figura ilustrativa abaixo,

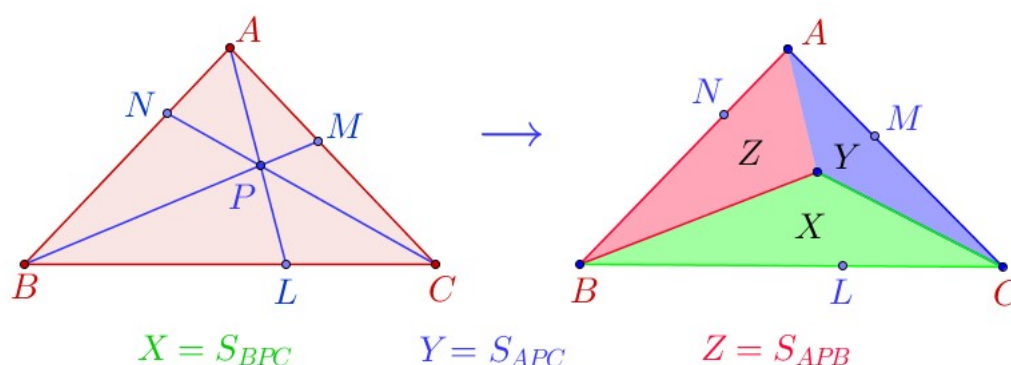


Figura 3.4: Ceva: Via relação entre áreas

podemos escrever:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{Y}{X} \tag{3.3}$$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{Z}{Y} \tag{3.4}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{X}{Z} \tag{3.5}$$

Efetuando as multiplicações, membro a membro, das relações (3.3), (3.4) e (3.5), obtemos a expressão desejada.

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{Y}{X} \cdot \frac{Z}{Y} \cdot \frac{X}{Z} = 1. \quad \blacksquare$$

3.2.3 Via teorema de Tales

Faremos agora uma demonstração com base no teorema de Tales e na semelhança de triângulos. Usamos as referências [19], [24] e [35].

Suponha que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes no ponto P .

Para fazer a demonstração do Teorema de Ceva usando o teorema de Tales, trace pelo ponto A uma reta r paralela a reta suporte do lado \overline{BC} . Prolongamos as cevianas \overline{BM} e \overline{CN} até interceptar a reta r , nos pontos E e D respectivamente. Veja figura ilustrativa abaixo.

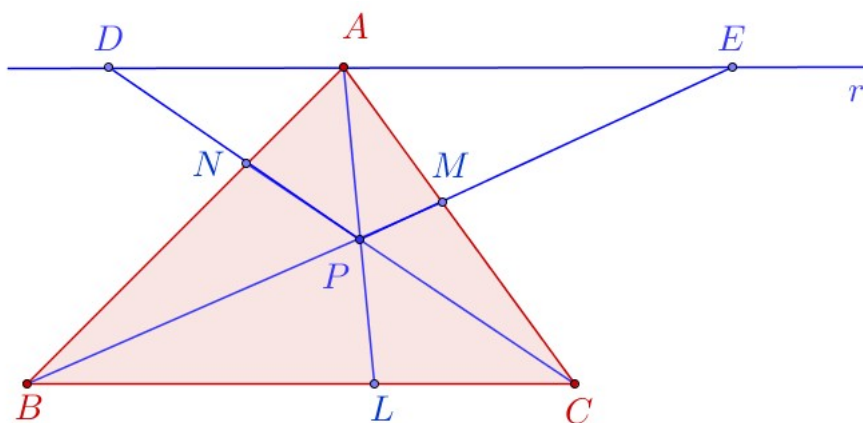


Figura 3.5: Ceva: Via teorema de Tales

Temos então, da semelhança dos triângulos:

- $\triangle DNA \sim \triangle BNC$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AD}{CB} \quad (3.6)$$

- $\triangle AME \sim \triangle BMC$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \quad (3.7)$$

- $\triangle AEP \sim \triangle LBP$. Daí obtemos $\frac{AE}{LB} = \frac{AP}{PL}$. Também $\triangle DAP \sim \triangle CLP$ donde $\frac{AP}{PL} = \frac{AD}{LC}$.

Logo, $\frac{AE}{LB} = \frac{AD}{LC}$ e portanto, temos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \quad (3.8)$$

Efetuando as multiplicações das relações (3.6), (3.7) e (3.8) e simplificando, temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{AD}{CB} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{CB}{AE} = 1. \quad \blacksquare$$

3.2.4 Via lei dos senos

Faremos agora uma demonstração do teorema de Ceva a partir da trigonometria, especificamente a Lei dos senos. Usamos as referências [19] e [40]. Inicialmente vamos mostrar a proposição seguinte, conhecida como lei dos senos que estabelece:

"O seno de um ângulo num triângulo qualquer é proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo".

Teorema 3.2 (Lei dos senos) *Seja ABC um triângulo, de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ opostos respectivamente aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} . Se R é o raio da circunferência circunscrita, então*

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R$$

Demonstração. Considere a circunferência de raio R , abaixo:

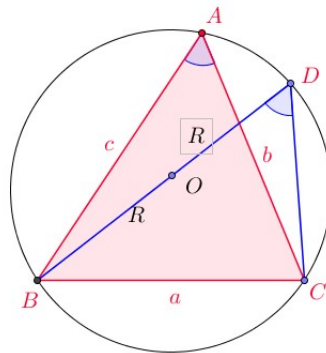


Figura 3.6: Teorema: Lei dos senos

Traçamos a corda \overline{BD} passando pelo centro O da circunferência. Como o triângulo $\triangle BCD$ está inscrito numa semicircunferência, ele é retângulo em \hat{C} . Daí aplicando a definição de seno para o ângulo \hat{D} , temos,

$$\text{sen}\hat{D} = \frac{a}{BD} = \frac{a}{2R}.$$

Como $\hat{D} = \hat{A}$ por subtenderem o mesmo arco BC ,

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2R.$$

De modo análogo, obtemos $\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R$ e $\frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R$. Portanto,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R. \quad \blacksquare$$

Antes de fazer a demonstração do teorema de Ceva via lei dos senos faremos o seguinte lema:

Lema 3.1 *Seja ABC um triângulo e \overline{AL} uma ceviana qualquer. Então,*

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC}.$$

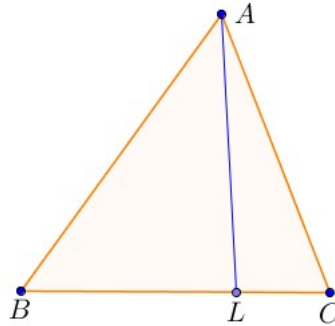


Figura 3.7: Lei dos senos: Lema

Prova. Aplicando a lei dos senos ao triângulo $\triangle ABL$, temos $\frac{LB}{\text{sen}\angle BAL} = \frac{AB}{\text{sen}\angle ALB}$. Logo,

$$LB = \text{sen}\angle BAL \cdot \frac{AB}{\text{sen}\angle ALB} \quad (3.9)$$

Agora aplicando a lei dos seno para o triângulo $\triangle ACL$, temos $\frac{LC}{\text{sen}\angle LAC} = \frac{AC}{\text{sen}\angle ALC}$. Portanto,

$$LC = \text{sen}\angle LAC \cdot \frac{AC}{\text{sen}\angle ALC} \quad (3.10)$$

Por outro lado, $\text{sen}\angle ALB = \text{sen}\angle ALC$, pois $\angle ALB + \angle ALC = 180^\circ$. Assim, dividindo a relação (3.9) por (3.10) e usando que $\text{sen}\angle ALB = \text{sen}\angle ALC$, obtemos

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \quad \blacksquare$$

Observação 3.2 *De maneira análoga, para as cevianas \overline{BM} e \overline{CN} do triângulo $\triangle ABC$, obtemos as relações:*

$$\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle NCB}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBM}{\text{sen}\angle MBA}$$

Multiplicando todas as igualdades encontramos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle NCB} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBM}{\text{sen}\angle MBA}$$

Em vista da identidade acima, consequência do Lema 3.1, podemos reformular o teorema de Ceva como segue:

Teorema 3.3 (Ceva trigonométrico) *Seja ABC um triângulo e sejam N , L e M pontos sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} , respectivamente. Então, as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle BCN} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBM}{\text{sen}\angle MBA} = 1$$

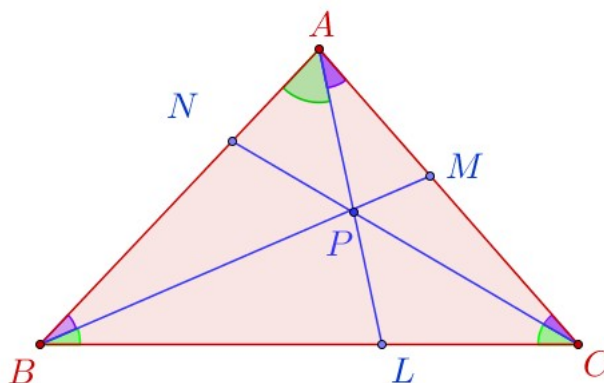


Figura 3.8: Ceva trigonométrico

Demonstração do teorema Ceva trigonométrico. Suponha que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes em P . Aplicando a lei dos senos nos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ e $\triangle CPA$, respectivamente, temos

$$\frac{BP}{\text{sen}\angle BAL} = \frac{AP}{\text{sen}\angle MBA} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\angle MBA}{\text{sen}\angle BAL} = \frac{AP}{BP} \tag{3.11}$$

$$\frac{BP}{\text{sen}\angle BCN} = \frac{CP}{\text{sen}\angle CBM} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\angle BCN}{\text{sen}\angle CBM} = \frac{BP}{CP} \tag{3.12}$$

$$\frac{PC}{\text{sen}\angle CAL} = \frac{AP}{\text{sen}\angle ACN} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\angle CAL}{\text{sen}\angle ACN} = \frac{PC}{PA} \quad (3.13)$$

Multiplicando membro a membro as segundas igualdades das relações (3.11), (3.12) e (3.13), obtemos

$$\frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle BCN} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle ACN}{\text{sen}\angle BCN} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$$

Para mostrar a recíproca, seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} . Considere a ceviana que parte de C , passa por P e encontra o segmento \overline{AB} no ponto S . Veja figura ilustrativa abaixo.

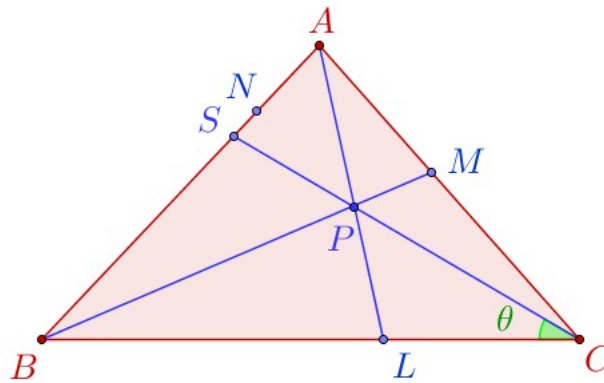


Figura 3.9: Recíproca do Ceva trigonométrico

Considere: $\theta = \angle BCS$, $\gamma_1 = \angle BCN$ e $\gamma_2 = \angle NCA$. Como:

$$\angle BCS + \angle SCA = \angle BCN + \angle NCA = \gamma,$$

temos:

$$\angle SCA = \gamma - \theta \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \gamma - \gamma_1.$$

Pela primeira parte da demonstração, uma vez que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CS} são concorrentes em P , temos:

$$\frac{\text{sen}(\gamma - \theta)}{\text{sen}\theta} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBM}{\text{sen}\angle MBA} = 1.$$

Por outra parte, por hipótese,

$$\frac{\text{sen}(\gamma - \gamma_1)}{\text{sen}\gamma_1} \cdot \frac{\text{sen}\angle BAL}{\text{sen}\angle LAC} \cdot \frac{\text{sen}\angle CBM}{\text{sen}\angle MBA} = 1.$$

Segue dessas identidades que:

$$\frac{\text{sen}(\gamma - \theta)}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}(\gamma - \gamma_1)}{\text{sen}\gamma_1}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\text{sen}\gamma_1}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{sen}(\gamma - \gamma_1)}{\text{sen}(\gamma - \theta)} = \frac{\text{sen}\gamma \cos \gamma_1 - \text{sen}\gamma_1 \cos \gamma}{\text{sen}\gamma \cos \theta - \text{sen}\theta \cos \gamma}.$$

Multiplicando esta expressão por $\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\gamma_1}$, obtemos

$$1 = \frac{\text{sen}\gamma \cot \gamma_1 - \cos \gamma}{\text{sen}\gamma \cot \theta - \cos \gamma}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \text{sen}\gamma \cot \theta - \cos \gamma &= \text{sen}\gamma \cot \gamma_1 - \cos \gamma \Rightarrow \text{sen}\gamma \cot \theta = \text{sen}\gamma \cot \gamma_1 \\ &\Rightarrow \cot \theta = \cot \gamma_1 \\ &\Rightarrow \theta = \gamma_1. \end{aligned}$$

Esta última implicação é obtida, pois a função cotangente (\cot) é injetiva em $(0, \pi)$. Agora, sendo $\theta = \gamma_1$, obtemos $S = N$ e portanto a ceviana \overline{CN} coincide com a ceviana \overline{CS} donde concluímos que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes. ■

Capítulo 4

Menelaus e Ceva com segmentos orientados

Nos capítulos precedentes desenvolvemos a teoria relativa aos teoremas de Menelaus e Ceva bem como seus enunciados e demonstrações sem considerar a orientação dos segmentos e portanto as razões eram consideradas quociente entre comprimentos de segmentos. Neste capítulo estudaremos os teoremas de Menelaus e Ceva considerando que os segmentos estão orientados e portanto, as razões simples entre três pontos sobre uma reta serão consideradas como o quociente das medidas algébricas dos segmentos envolvidos, como foi definido em (2.3).

Vejam, inicialmente algumas considerações sobre os enunciados dos teoremas de Menelaus e Ceva.

As referências usadas neste capítulo são: [6], [7], [9], [15] e [16].

4.1 Os enunciados dos teoremas

Uma vez que estamos considerando as razões como quociente entre medidas algébricas de segmentos, devemos tê-las presente nos enunciados dos teoremas. Vejamos, então como ficam as relações envolvendo as razões nos teoremas de Menelaus e Ceva.

4.1.1 Para o Teorema de Menelaus

Parte (a) Quando a reta de Menelaus corta exatamente dois lados do triângulo. Temos as seguintes configurações. Veja figura ilustrativa a seguir:

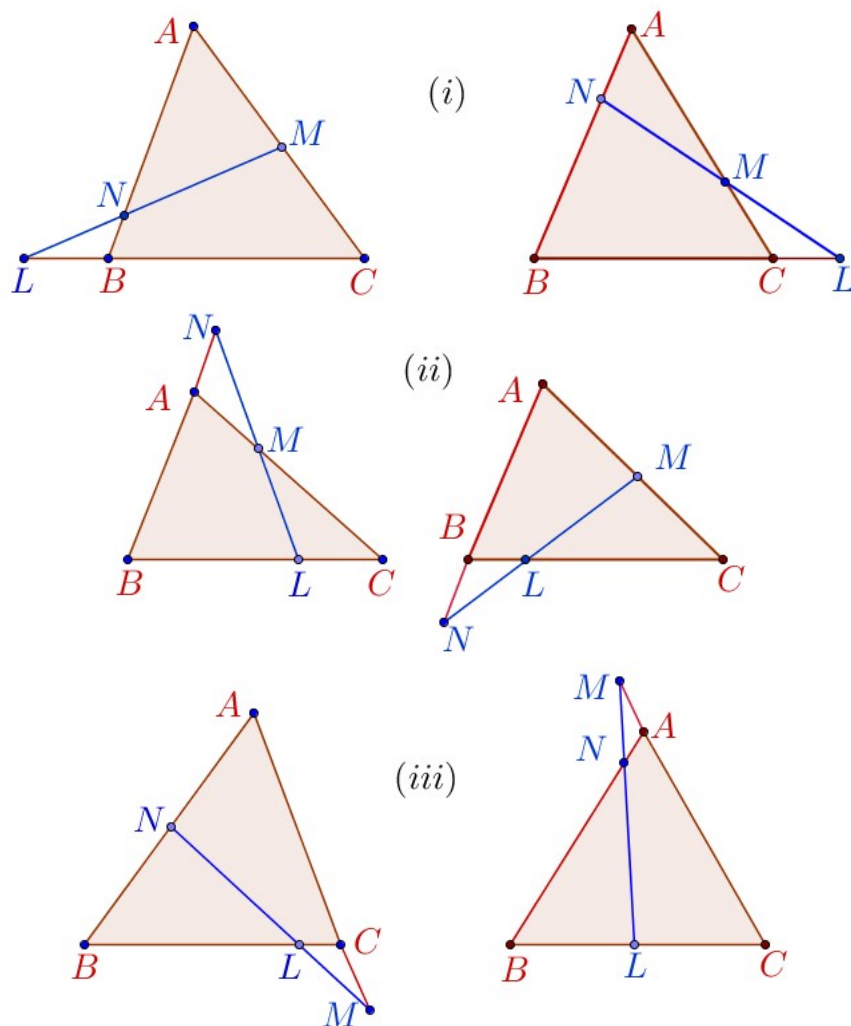


Figura 4.1: Menelaus: Configurações - Parte (a)

Na parte (i), temos:

$$\frac{NA}{NB} \text{ e } \frac{MC}{MA} \text{ são negativos e } \frac{LB}{LC} \text{ é positivo.}$$

Na parte (ii), temos:

$$\frac{LB}{LC} \text{ e } \frac{MC}{MA} \text{ são negativos e } \frac{NA}{NB} \text{ é positivo.}$$

Na parte (iii), temos:

$$\frac{NA}{NB} \text{ e } \frac{LB}{LC} \text{ são negativos e } \frac{MC}{MA} \text{ é positivo.}$$

Parte (b) Quando a reta de Menelaus não corta os lados do triângulo, e portanto, corta as três

prolongações dos lados do triângulo, também teremos 6 configurações distintas (que deixamos ao leitor para fazer os desenhos). O que importa aqui é que as três razões simples envolvidas na relação do teorema serão todas positivas. Concluímos que a relação para o teorema de Menelaus, quando consideramos razões como quocientes entre medidas algébricas de segmentos e usando a notação (vértice \rightarrow ponto) é:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

4.1.2 Para o Teorema de Ceva

No Teorema de Ceva, em relação ao ponto de interseção das cevianas, temos duas possibilidades: uma quando o ponto de interseção é interior e a outra quando é exterior ao triângulo. Quando o ponto de interseção é interior ao triângulo, os pontos M , N e L são pontos interiores respectivamente aos segmentos \overline{AC} , \overline{AB} e \overline{BC} do triângulo $\triangle ABC$. Assim, todas as razões $\frac{NA}{NB}$, $\frac{LB}{LC}$ e $\frac{MC}{MA}$ são negativas, portanto a relação para o teorema de Ceva, quando consideramos razões como quocientes entre medidas algébricas de segmentos é:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = -1$$

No caso do ponto de interseção das cevianas ser exterior ao triângulo $\triangle ABC$, caso que não tratamos com profundidade neste trabalho, temos 6 possíveis configurações, dependendo do ponto P pertencer as 6 regiões descritas na figura ilustrativa abaixo, que podem ser descritas segundo a fronteira que faz a região com o triângulo $\triangle ABC$.

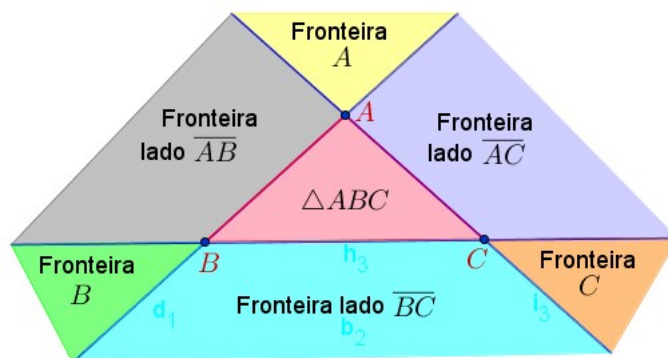


Figura 4.2: Ceva: ponto de interseção exterior ao triângulo $\triangle ABC$

A modo de exemplos ilustramos a seguir 3 configurações dadas quando o ponto P está abaixo, em relação ao triângulo $\triangle ABC$, da reta suporte do lado \overline{BC} . Na seguinte figura é mostrada 3

dessas 6 configurações

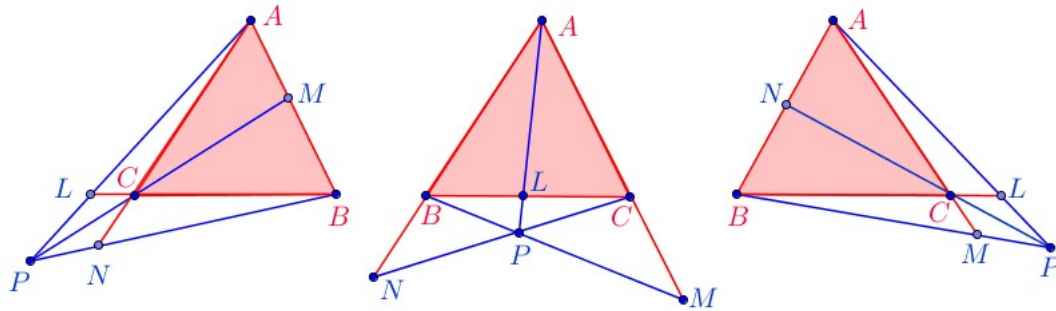


Figura 4.3: Ceva: ponto de interseção abaixo da reta suporte do lado \overline{BC}

Finalmente, observamos que a relação que envolve as razões simples, neste caso, é a mesma; uma vez que nessas 6 configurações temos duas razões simples positivas e a outra negativa.

A seguir vamos fazer as demonstrações dos teorema de Menelaus e Ceva considerando que as razões simples que aparecem no decorrer das provas sejam exatamente como o indica a definição, ou seja, quociente entre medidas algébricas de segmentos.

Lembre que para determinar a medida algébrica (ou distância com sinal) de um segmento, é necessário que a reta suporte do segmento esteja orientada. Agora, como nos teoremas não temos somente uma reta é importante destacar que a razão simples independe da orientação da reta que contém os pontos. Por exemplo, quando o ponto M é interior ao segmento \overline{AB} temos a seguinte figura ilustrativa abaixo.

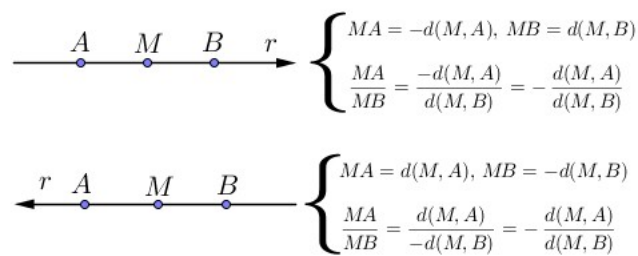


Figura 4.4: razão simples independe da orientação da reta

Onde $d(M, A)$ denota a distância entre os pontos M e A (portanto é um numero real positivo) e MA denota a medida algébrica do segmento \overline{MA} . Deixamos ao leitor verificar que o mesmo acontece quando M é um ponto exterior ao segmento \overline{AB}

A seguir, vamos utilizar o conceito de "segmentos orientados" para estabelecer no plano, de forma global, um sinal para o quociente de medidas algébricas entre segmentos paralelos.

4.2 Segmentos orientados

Definição 4.1 Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos do plano. A é dito origem, B extremidade do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos.

Definição 4.2 Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos \overline{AB} e \overline{CD} têm o mesmo comprimento (medida).

- Suponha que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são não nulos. Então, dizemos que (A, B) e (C, D) têm a mesma direção se \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos. Nesse caso também dizemos que (A, B) e (C, D) são paralelos.

- Suponha que (A, B) e (C, D) têm mesma direção.

(a) Se as retas suporte dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são distintas, dizemos que (A, B) e (C, D) tem mesmo sentido caso os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} tenham interseção vazia. Caso $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.

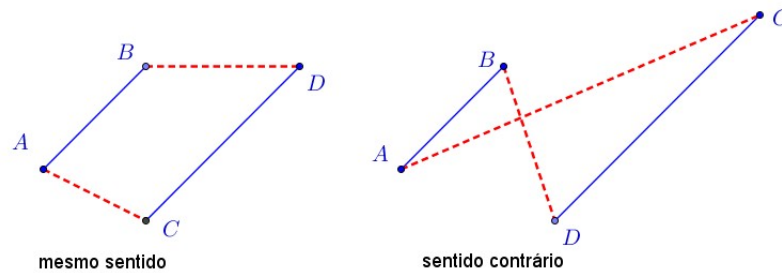


Figura 4.5: Segmentos orientado: Sentido - A

(b) Se as retas suporte dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} coincidem, considere (A', B') tal que A' não pertença á reta suporte de \overline{AB} e (A', B') tenha a mesma direção, e mesmo sentido que (A, B) . Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido se (A', B') e (C, D) tem mesmo sentido. Se não dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.

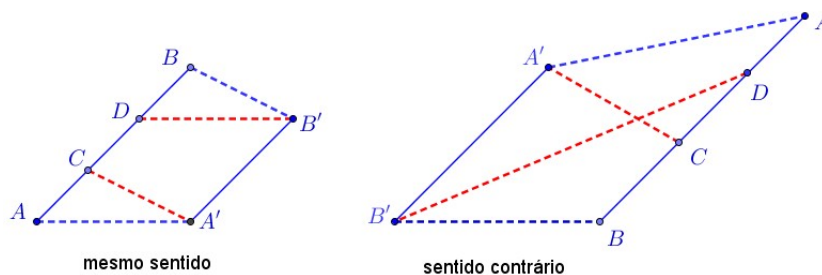


Figura 4.6: Segmentos orientados: Sentido - B

Com essas definições podemos estabelecer como fica o quociente entre medidas algébricas de segmentos paralelos.

Definição 4.3 *Suponha que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) tenham a mesma direção (i.e., \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos e, portanto, os pontos A, B, C e D não pertencem necessariamente a uma única reta). As medidas algébricas AB e CD dos respectivos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} têm o mesmo sinal, quando os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido. Caso contrário, as medidas algébricas terão sinal oposto. Assim, para o quociente das medidas algébricas dos segmentos paralelos, temos:*

- $\frac{AB}{CD} \in \mathbb{R}^+$ se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo sentido.
- $\frac{AB}{CD} \in \mathbb{R}^-$ se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm sentidos contrários.

Vejamos agora como ficam as provas dos teoremas de Menelaus e Ceva, quando consideramos os conceitos dados nesta seção. Ainda, observamos que as provas dadas nos capítulos precedentes podem, facilmente, ser adaptadas tendo em conta tais conceitos.

4.3 Menelaus com segmentos orientados

Teorema 4.1 Teorema de Menelaus: segmentos orientados *Dado o triângulo $\triangle ABC$. Sejam L, M e N pontos sobre as retas suporte dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente e não coincidentes com os vértice do $\triangle ABC$. Então, os pontos L, M e N são colineares se, e somente se,*

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Demonstração: Suponha que os pontos L, M e N sejam colineares. Existem duas possibilidades (quando B está entre L e C). Veja configuração abaixo. A demonstração a seguir contempla os dois casos:

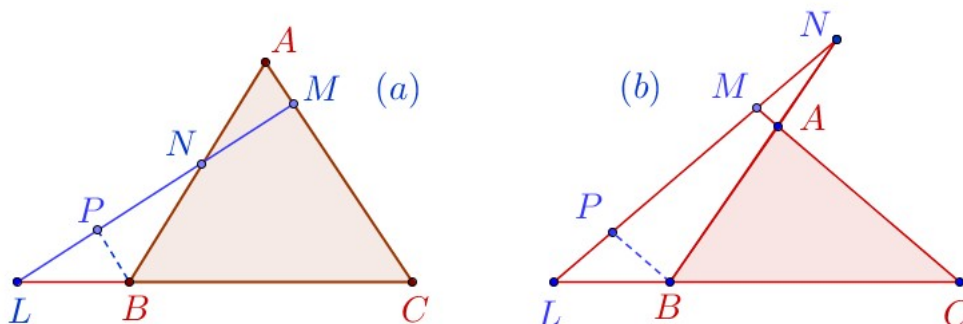


Figura 4.7: Menelaus - Segmentos orientados

Considere $P \in \overline{LM}$, tal que $\overline{PB} \parallel \overline{AC}$, conforme figura ilustrativa acima.

Da semelhança entre os triângulos $\triangle LBP$ e $\triangle LCM$ (o par ângulos $\angle LBP$ e $\angle LCM$; $\angle LPB$ e $\angle LMC$ são congruentes, pois $\overline{PB} \parallel \overline{AC}$), podemos escrever:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{PB}{MC} \Rightarrow \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{PB} = 1 \quad (4.1)$$

Os triângulos $\triangle PBN$ e $\triangle MAN$ também são semelhantes (pois possuem dois par de ângulos alternos internos no caso (a) e dois par de ângulos correspondentes no caso (b)), então:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{PB} \Rightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{PB}{MA} = 1 \quad (4.2)$$

Multiplicando as segundas igualdades de (4.1) e (4.2), membro a membro e simplificando o fator PB , temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

O que demonstra a primeira parte do teorema.

Mostremos agora a recíproca.

Para o caso (a) considere o segmento que parte do ponto L , passa por N e encontra o segmento \overline{AC} no ponto S e para o caso (b) considere que o segmento \overline{LN} intersecta o prolongamento do segmento \overline{AC} no ponto S como ilustra a figura abaixo.

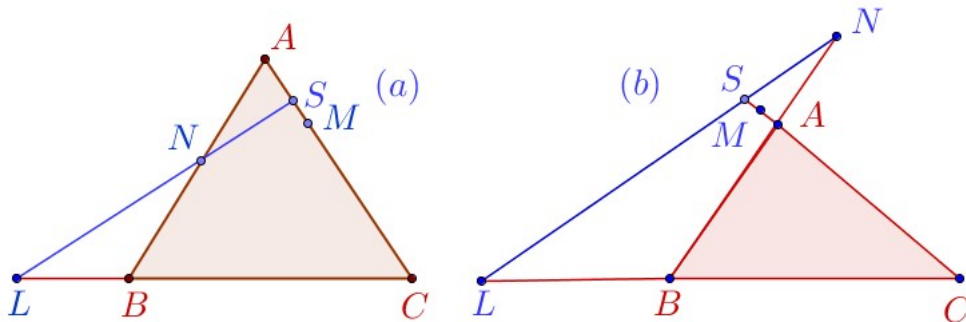


Figura 4.8: Recíproca de Menelaus - Segmentos orientados

Se os pontos L , M e S são colineares, então pela primeira parte do teorema de Menelaus, temos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1.$$

Mas por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Então por comparação,

$$\frac{SC}{SA} = \frac{MC}{MA}$$

donde se conclui, pelo Lema 2.1,

$$S = M \quad \blacksquare$$

4.4 Ceva com segmentos orientados

Teorema 4.2 Teorema de Ceva: Segmentos orientados *Sejam L , M e N pontos, respectivamente, sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$. As cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} intersectam-se em um ponto P , se, e somente se,*

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = -1.$$

Demonstração: Suponha que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes no ponto P .

Trace pelo ponto A uma reta r paralela à reta suporte do lado \overline{BC} . Prolongamos as cevianas \overline{BM} e \overline{CN} até interceptar a reta r , nos pontos E e D respectivamente. Veja figura ilustrativa abaixo.

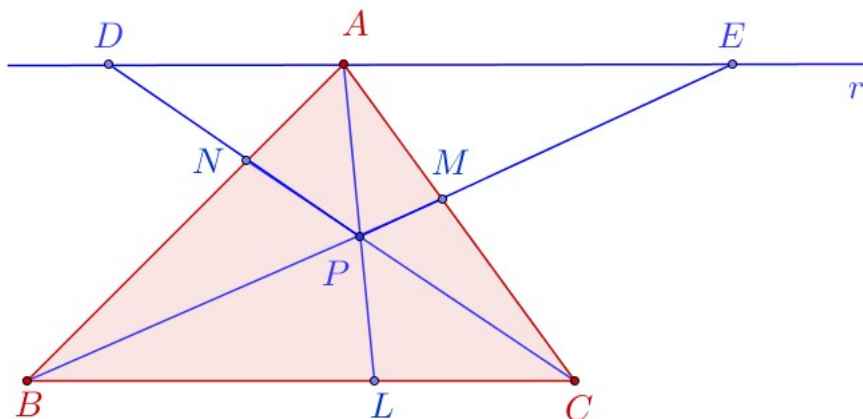


Figura 4.9: Ceva: Via teorema de Tales

Temos então, da semelhança dos triângulos:

- $\triangle DNA \sim \triangle CNB$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{NA}{NB} = -\frac{AD}{CB} \quad (4.3)$$

- $\triangle BPC \sim \triangle EPD$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AE}{AD} \quad (4.4)$$

- $\triangle AME \sim \triangle CMB$ (possuem dois ângulos congruentes, alternos internos). Portanto, temos:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{CB}{AE} \quad (4.5)$$

Efetuada as multiplicações das relações (4.3), (4.4) e (4.5) e simplificando, temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = -\frac{AD}{CB} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{CB}{AE} = -1$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Para provar a recíproca, considere P o ponto de interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} . Considere, agora, a ceviana partindo do vértice C , passando pelo ponto P e achando o lado \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$ no ponto S . Veja figura ilustrativa abaixo.

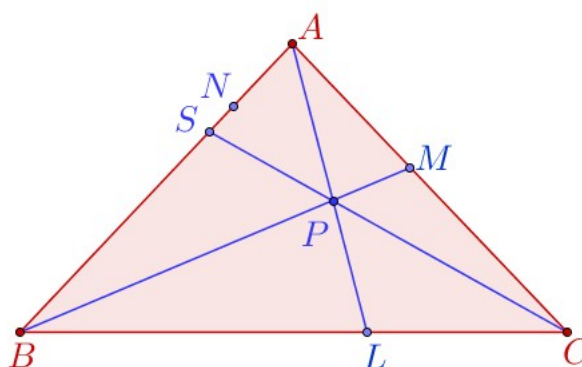


Figura 4.10: Recíproca do Teorema de Ceva

Pela primeira parte do teorema de Ceva podemos escrever,

$$\frac{SA}{SB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = -1.$$

Porém, por hipótese,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = -1.$$

Dessas relações, podemos concluir, usando o Lema 2.1, que:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow S = N$$

Logo, as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes. ■

Capítulo 5

Demonstrações vetoriais

Neste capítulo veremos outras formas de demonstrações dos teoremas de Menelaus e Ceva, primeiro usando a geometria vetorial do plano e depois utilizando coordenadas baricêntricas homogêneas. Para tal, apresentamos os conteúdos básicos necessários que darão suporte ao leitor para entender os resultados que usaremos nas provas dos teoremas.

Inicialmente apresentamos, para o leitor menos familiarizados com esses conceitos, a geometria vetorial do plano. Adaptamos os conteúdos dados para o espaço em [9] para o plano, pois é neste conjunto (o plano) em que trataremos dos teoremas de Menelaus e Ceva.

5.1 Geometria Vetorial do Plano

5.1.1 Vetores no plano

Vamos classificar os segmentos orientados do plano pela relação de equipolência. Utilizaremos os conceitos dados na seção 4.2 "Segmentos orientados".

Definição 5.1 Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) do plano são equipolentes, e escrevemos $(A, B) \equiv (C, D)$, se um dos casos seguintes ocorrer:

- (a) ambos são nulos;
- (b) nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Proposição 5.1 A relação de equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados do plano. Isto é:

(a) \equiv é reflexiva. Isto é, $(A, B) \equiv (A, B)$;

(b) \equiv é simétrica. Isto é, $(A, B) \equiv (C, D) \Leftrightarrow (C, D) \equiv (A, B)$

(c) \equiv é transitiva. Isto é, $(A, B) \equiv (C, D)$ e $(C, D) \equiv (E, F) \Rightarrow (A, B) \equiv (E, F)$

Omitiremos a demonstração. Esta observação permite definir o vetor \overrightarrow{AB} como a classe de equivalência, segundo a relação de equipolência, do segmento orientado (A, B) .

Definição 5.2 Sejam (A, B) um segmento orientado do plano. O vetor \overrightarrow{AB} é o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B) . Ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = \{(C, D) : (C, D) \equiv (A, B)\}$$

Cada segmento equipolente a (A, B) é um representante do vetor \overrightarrow{AB} . O conjunto de todos os vetores do plano será indicado por \mathbb{E}^2 .

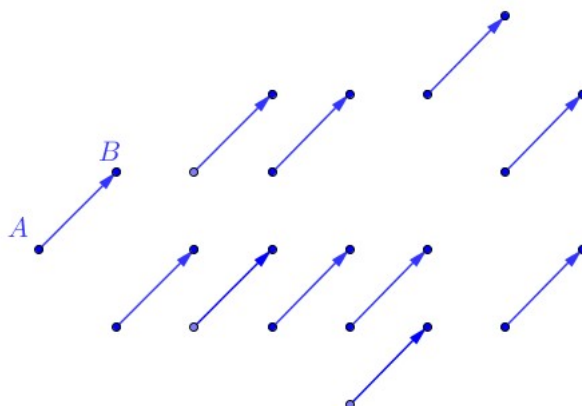


Figura 5.1: Vetor - Segmentos orientados equipolentes

Definição 5.3

- Chamaremos vetor nulo ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Indica-se o vetor nulo por $\vec{0}$. Note que todos os representantes do vetor nulo são segmentos orientados com origem e extremidade coincidentes.
- O vetor \overrightarrow{BA} é chamado vetor oposto (ou simétrico) do vetor \overrightarrow{AB} e também é indicado por $-\overrightarrow{AB}$.

Definição 5.4 Chamaremos norma (ou modulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de \vec{v} por $\|\vec{v}\|$. Se $\|\vec{v}\| = 1$, dizemos que o vetor \vec{v} é unitário.

Definição 5.5 Os vetores \vec{u} e \vec{v} não nulos são paralelos (indica-se por $\vec{u} // \vec{v}$) se um representante de \vec{u} é paralelo a um representante de \vec{v} (e portanto a todos). Se $\vec{u} // \vec{v}$, dizemos que \vec{u} e \vec{v} têm o mesmo sentido (resp. sentido contrário) se um representante de \vec{u} e um representante de \vec{v} têm mesmo sentido (resp. sentido contrário).

Observação 5.1 De um modo geral, conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, comprimento, ângulo etc., envolvendo vetores, são definidos usando os representantes (como foi feito acima). Temos também

• Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor. Isto é,

$$(A, B) \equiv (C, D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

• Dados um ponto A e um vetor \vec{v} , existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor \vec{v} .

5.1.2 Adição de vetores no plano

Vamos definir em \mathbb{E}^2 uma operação de adição, que a cada par de vetores \vec{u} e \vec{v} fará corresponder o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$.

Definição 5.6 Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , considere um representante qualquer (A, B) do vetor \vec{u} e o representante do vetor \vec{v} que têm origem no ponto B . Seja C tal que (B, C) seja um representante do vetor \vec{v} . Fica determinado o segmento orientado que (A, C) . Por definição \overrightarrow{AC} , cujo representante é o segmento orientado (A, C) , é o vetor soma de \vec{u} com \vec{v}

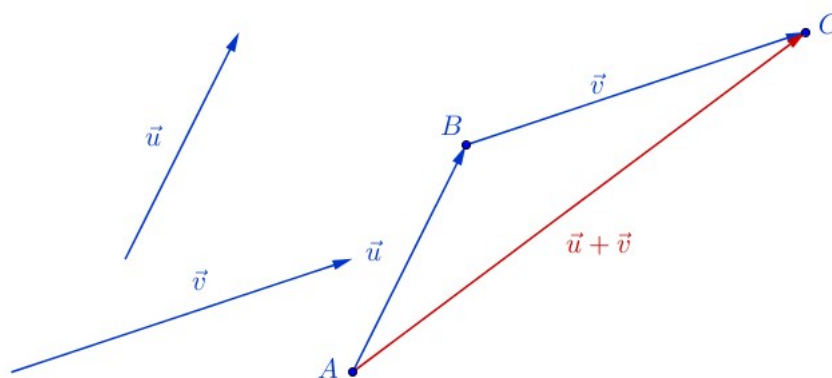


Figura 5.2: Soma de vetores

Observações 5.1

- Pela definição da soma de vetores, temos $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- Para determinar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ basta "fechar o triângulo", tomando cuidado de escolher a origem do segundo coincidindo com a extremidade do primeiro.
- Pode-se também escolher a "regra do paralelogramo", que consiste em tomar representantes de \vec{u} e \vec{v} com a mesma origem A . Escolhidos (A, B) e (A, C) representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} respectivamente, construa o paralelogramo $ABCD$. O segmento orientado (A, D) é um representante do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, pois ele "fecha o triângulo ABD e $\vec{BD} = \vec{v}$ ".

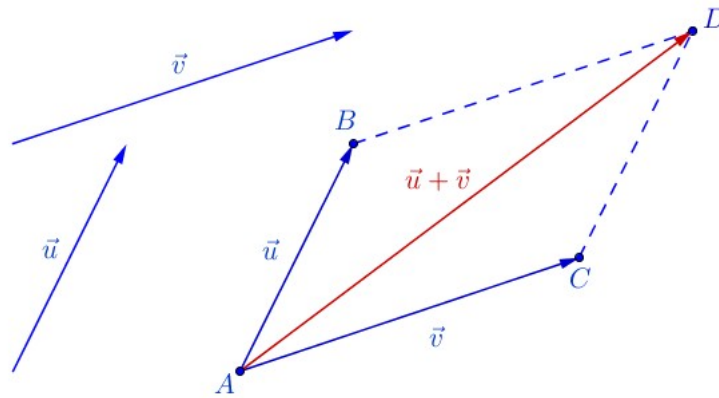


Figura 5.3: Soma de vetores: regra do paralelogramo

5.1.3 Multiplicação de um escalar por um vetor

Vamos definir uma operação externa em \mathbb{E}^2 que a cada número real (escalar) α e cada vetor \vec{v} do plano associa um vetor indicado por $\alpha \cdot \vec{v}$.

Definição 5.7 Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in \mathbb{E}^2$, define-se o produto do escalar α pelo vetor \vec{v} como o vetor $\alpha \cdot \vec{v}$ de tal modo que:

- Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{\theta}$, então $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{\theta}$ (por definição)
- Se $\alpha \neq 0$ ou $\vec{v} \neq \vec{\theta}$, então $\alpha \cdot \vec{v}$ é caracterizado por:
 - (a) $\alpha \cdot \vec{v} // \vec{v}$.
 - (b) $\alpha \cdot \vec{v}$ e \vec{v} têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário de $\alpha < 0$.
 - (c) $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$.

Proposição 5.2 A adição de vetores e a multiplicação de um escalar por um vetor fazem do conjunto de todos os vetores do plano \mathbb{E}^2 um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Demonstração. Veja [9].

5.1.4 Base de \mathbb{E}^2

Vejamos agora o conceito de base para o espaço vetorial \mathbb{E}^2 .

Inicialmente, fixamos a seguinte linguagem: um vetor \vec{u} é paralelo a uma reta r se existir um representante (A, B) de \vec{u} tal que o segmento \overline{AB} esteja contido em r . Em particular, o vetor nulo é paralelo a qualquer reta

Definição 5.8 (i) Um único vetor $\vec{v} \in \mathbb{E}^2$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{v} = \vec{\theta}$. Se $\vec{v} \neq \vec{\theta}$, dizemos que \vec{v} é linearmente independente (LI).

(ii) O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de dois vetores em \mathbb{E}^2 é linearmente independente (LD) se \vec{u} e \vec{v} são paralelos a uma mesma reta. Caso contrário, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente dependente (LI)

(iii) Qualquer conjunto de vetores com três ou mais vetores em \mathbb{E}^2 é linearmente dependente (LD) por definição

Observação 5.2 $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \beta \vec{u}$.

Definição 5.9 Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ($n \geq 1$) e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ números reais. Chama-se combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ (com coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) ao vetor

$$v = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Se \vec{v} é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, diz-se também que \vec{v} é gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Observe que o vetor nulo é gerado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ quaisquer que sejam estes vetores, pois podemos escolher $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, e teremos

$$\vec{\theta} = 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + 0 \vec{v}_n$$

Proposição 5.3 Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores em \mathbb{E}^2 . Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{\theta} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Prova. De fato, se $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}$. Isto é, os vetores \vec{u} e \vec{v} são LD, que é um absurdo.

Proposição 5.4 Se os vetores \vec{u} e \vec{v} em \mathbb{E}^2 são LI, então qualquer vetor $\vec{w} \in \mathbb{E}^2$ é gerado por \vec{u} e \vec{v} . Isto é, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Prova. Escolha e fixe um ponto O do plano. Para os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , considere os representantes (O, A) , (O, B) e (O, C) respectivamente. Os pontos O , A e B não são colineares, pois \vec{u} e \vec{v} são LI. Pelo ponto C tomamos retas paralelas a \overline{OA} e \overline{OB} determinando assim os pontos M e N sobre as retas suportes a tais segmentos (veja figura ilustrativa abaixo)

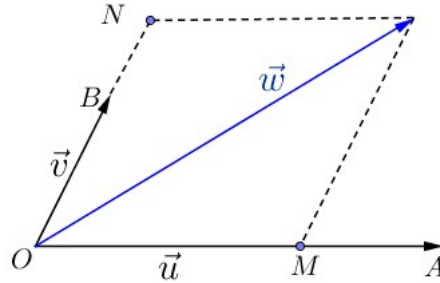


Figura 5.4: Vetores \vec{u} e \vec{v} LI geram \mathbb{E}^2

Os vetores \vec{u} e \overrightarrow{OM} são LD, logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{u}$. Da mesma forma, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{ON} = \beta \vec{v}$. Assim,

$$\vec{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}.$$

Observe que os argumentos acima valem também para os casos em que $\vec{w} // \vec{u}$ ou $\vec{w} // \vec{v}$; apenas a figura seria diferente.

Definição 5.10 Chama-se base de \mathbb{E}^2 a qualquer conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ LI de vetores de \mathbb{E}^2 .

Observação 5.3 Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é base de \mathbb{E}^2 , então dado $\vec{w} \in \mathbb{E}^2$ existem únicos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

De fato, a existência segue da proposição (5.4). Para provar a unicidade suponha que \vec{w} também possa ser escrito como: $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u} + \beta_1 \vec{v}$. Então, isto junto com a hipótese fornece:

$$\vec{\theta} = (\alpha - \alpha_1) \vec{u} + (\beta - \beta_1) \vec{v}.$$

Segue da proposição (5.3) que $\alpha - \alpha_1 = 0$ e $\beta - \beta_1 = 0$. Donde $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$.

5.2 Menelaus: Demonstração vetorial

A demonstração dada do teorema de Menelaus nesta seção encontra-se em [25].

Iniciamos esta seção dando uma interpretação vetorial, fundamental e que usaremos no decorrer deste capítulo, ao quociente de medidas algébricas de segmentos paralelos.

Observação 5.4 *Interpretação vetorial do quociente de medidas algébricas de segmentos paralelos.* Sejam \overline{AB} e \overline{CD} segmentos paralelos no plano. Então,

$$\frac{AB}{CD} = t \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{CD}.$$

Observe que, com essa interpretação, temos para a razão simples:

$$(MAB) = t \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = t \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -t \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -t \overrightarrow{BM}$$

Definição 5.11 *Seja R um ponto sobre o segmento \overline{PQ} . Então, existe $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq -1$) tal que $\overrightarrow{PR} = k \cdot \overrightarrow{RQ}$. Assim, para qualquer ponto O do plano temos*

$$\overrightarrow{PR} = k \cdot \overrightarrow{RQ} \Rightarrow \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = k \cdot (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OQ}), \text{ logo } \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OP} + k \cdot \overrightarrow{OQ}}{1 + k}$$

Que é chamada forma simétrica de um vetor. Veja figura ilustrativa abaixo.

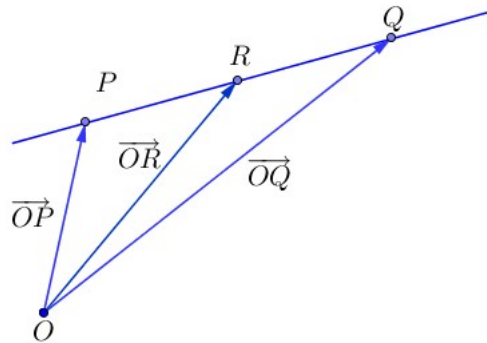


Figura 5.5: Forma simétrica de um vetor

Com a notação acima, se $PR = p$ e $RQ = q$, então $k = \frac{\|\overrightarrow{PR}\|}{\|\overrightarrow{RQ}\|} = \frac{p}{q}$ e a forma simétrica do vetor \overrightarrow{OR} fica:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OP} + k \cdot \overrightarrow{OQ}}{1 + k} = \frac{\overrightarrow{OP} + \frac{p}{q} \cdot \overrightarrow{OQ}}{1 + \frac{p}{q}} = \frac{q \cdot \overrightarrow{OP} + p \cdot \overrightarrow{OQ}}{q + p}$$

De modo que, considerando $\alpha = \frac{q}{q+p}$ e $\beta = \frac{p}{q+p}$, a equação simétrica de um vetor também pode ser expressa como:

$$\overrightarrow{OR} = \alpha \cdot \overrightarrow{OP} + \beta \cdot \overrightarrow{OQ} \quad \text{com} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Para provar a recíproca do teorema de Menelaus na demonstração dada a seguir, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 5.1 *Considere os vetores \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OR} . Os pontos P , Q e R são colineares se, e somente se, existem escalares α , β e γ tais que:*

$$\alpha \cdot \overrightarrow{OP} + \beta \cdot \overrightarrow{OQ} + \gamma \cdot \overrightarrow{OR} = \vec{\theta}, \quad \text{com } \alpha + \beta + \gamma = 0. \quad (5.1)$$

Prova. Se os pontos P , Q e R são colineares, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PR} = k \cdot \overrightarrow{RQ}$. Logo,

$$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = k \cdot (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OQ})$$

Isto é,

$$(-1) \cdot \overrightarrow{OP} + (-k) \cdot \overrightarrow{OQ} + (1+k) \cdot \overrightarrow{OR} = \vec{\theta}$$

Assim, para $\alpha = -1$, $\beta = -k$ e $\gamma = 1+k$, temos (5.1)

Reciprocamente, suponha (5.1), então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overrightarrow{OP} + \beta \cdot \overrightarrow{OQ} + (-\alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OR} &= \vec{\theta} \\ \alpha \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) + \beta \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}) &= \vec{\theta} \\ \alpha \cdot \overrightarrow{RP} + \beta \cdot \overrightarrow{RQ} &= \vec{\theta} \end{aligned}$$

Relação que implica que os pontos P , Q e R são colineares.

Teorema 5.1 Teorema de Menelaus: Demonstração vetorial. *Dado o triângulo $\triangle ABC$. Sejam M e N pontos sobre os lados \overline{AC} e \overline{AB} respectivamente, e seja L um ponto sobre a reta suporte do lado \overline{BC} do triângulo. Suponha ainda, que tais pontos não são coincidentes com os vértices do triângulo $\triangle ABC$. Então, os pontos L , M e N são colineares se, e somente se,*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Demonstração: Sendo M e N pontos sobre os lados \overline{AC} e \overline{AB} respectivamente e L um ponto sobre a reta suporte do lado \overline{BC} do triângulo, todos não coincidentes com os vértices do triângulo, existem escalares α , β e γ diferentes de 1 e 0 tais que:

- $\overrightarrow{AN} = \alpha \overrightarrow{AB}$. Logo, $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = -\alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (1 - \alpha) \overrightarrow{AB}$. Assim,

$$\overrightarrow{AN} = \alpha \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{NB} = (1 - \alpha) \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \frac{AN}{NB} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (5.2)$$

- $\overrightarrow{BL} = \beta \overrightarrow{BC}$. Logo, $\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BC} = -\beta \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = (1 - \beta) \overrightarrow{BC}$. Assim,

$$\overrightarrow{BL} = \beta \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{LC} = (1 - \beta) \overrightarrow{BC} \quad \text{e} \quad \frac{BL}{LC} = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (5.3)$$

- $\overrightarrow{CM} = \gamma \overrightarrow{CA}$. Logo, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} = -\gamma \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = (1 - \gamma) \overrightarrow{CA}$. Assim,

$$\overrightarrow{CM} = \gamma \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{MA} = (1 - \gamma) \overrightarrow{CA} \quad \text{e} \quad \frac{CM}{CA} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \quad (5.4)$$

Para a demonstração da primeira parte do teorema usaremos a figura ilustrativa a seguir.

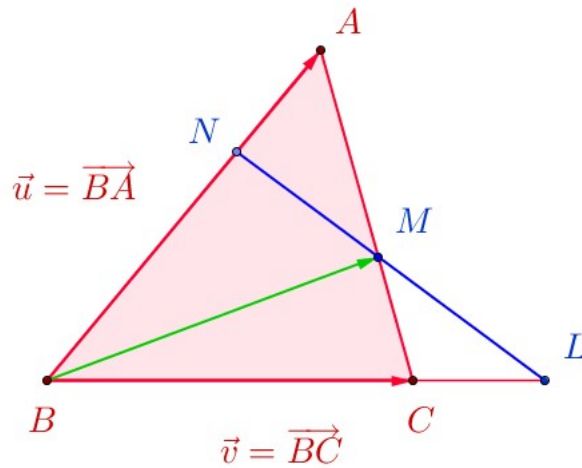


Figura 5.6: Teorema Menelaus: Demonstração vetorial

Considere os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Suponha que os pontos L , M e N sejam colineares, logo existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{NM} = t \overrightarrow{NL}$. Logo, $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} = t(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BL})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= -\overrightarrow{NB} + t(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BL}) \\ &= (t - 1)\overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{BL} \\ &= (t - 1)(1 - \alpha)\overrightarrow{AB} + t\beta\overrightarrow{BC} \\ &= (t - 1)(\alpha - 1)\vec{u} + t\beta\vec{v}. \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\
 &= \vec{v} + \gamma \overrightarrow{CA} \\
 &= \vec{v} + \gamma (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \\
 &= \vec{v} + \gamma (\vec{u} - \vec{v}) \\
 &= \gamma \vec{u} + (1 - \gamma) \vec{v}.
 \end{aligned}$$

Sendo \vec{u} e \vec{v} vetores linearmente independentes, segue das duas últimas identidades, que:

$$(t - 1)(\alpha - 1) = \gamma, \quad t\beta = 1 - \gamma,$$

donde,

$$\alpha = \frac{\gamma + t - 1}{t - 1}, \quad \beta = \frac{1 - \gamma}{t}.$$

Finalmente, pelas relações em (5.2), (5.3) e (5.4), e substituindo os valores de α e β encontrados acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{CA} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{\gamma}{1 - \gamma} \\
 &= \frac{\frac{\gamma + t - 1}{t - 1}}{1 - \frac{\gamma + t - 1}{t - 1}} \cdot \frac{\frac{1 - \gamma}{t}}{1 - \frac{1 - \gamma}{t}} \cdot \frac{\gamma}{1 - \gamma} \\
 &= \frac{\gamma + t - 1}{-\gamma} \cdot \frac{1 - \gamma}{t - 1 + \gamma} \cdot \frac{\gamma}{1 - \gamma} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

Para mostrar a recíproca, suponha que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{CA} = -1$. Então, pelas relações (5.2), (5.3) e (5.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{\gamma}{1 - \gamma} &= -1 \\
 \alpha\beta\gamma &= -(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \\
 \alpha\beta\gamma &= -1 + \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$-1 + \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = 0 \tag{5.5}$$

As relações (5.2) e (5.4), fornecem

$$\overrightarrow{AN} = \alpha \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AM} = (1 - \gamma) \overrightarrow{AC} \quad (5.6)$$

Por outra parte, por (5.3),

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BC} = (1 - \beta) \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

Portanto,

$$\alpha(1 - \gamma) \overrightarrow{AL} = (1 - \beta)(1 - \gamma) \alpha \overrightarrow{AB} + \alpha \beta (1 - \gamma) \overrightarrow{AC}$$

Assim, substituído as equações em (5.6) na expressão acima, achamos

$$\alpha(1 - \gamma) \overrightarrow{AL} - (1 - \beta)(1 - \gamma) \alpha \overrightarrow{AN} - \alpha \beta \overrightarrow{AM} = \vec{\theta},$$

onde, pela relação (5.5) que satisfazem os escalares α , β e γ , obtemos

$$\alpha(1 - \gamma) - (1 - \beta)(1 - \gamma) - \alpha \beta = \alpha - \alpha \gamma - 1 + \beta + \gamma - \beta \gamma - \alpha \beta = 0.$$

Segue do lema anterior que os pontos L , M e N são colineares. ■

5.3 Ceva: Demonstração vetorial

Aqui foram usadas as referências [8], [16] e [25].

Teorema 5.2 Teorema de Ceva: Demonstração vetorial. *Sejam L , M e N pontos, respectivamente, sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$. As cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} intersectam-se em um ponto P , se, e somente se,*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Demonstração: Inicialmente estabelecemos as seguintes notações:

$$BL = m, \quad LC = n, \quad CM = p, \quad MA = q, \quad AN = r, \quad \text{e} \quad NB = s.$$

$$a = BC = m + n, \quad b = CA = p + q, \quad c = AB = r + s.$$

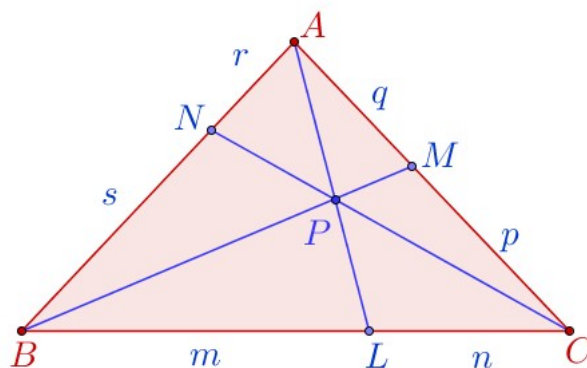


Figura 5.7: Teorema Ceva: Demonstração vetorial

Suponha que as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} intersectam-se no ponto P , podemos escrever:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda_1 \overrightarrow{AL}, \quad \overrightarrow{BP} = \lambda_2 \overrightarrow{BM}, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CP} = \lambda_3 \overrightarrow{CN}.$$

Portanto, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ pode ser reescrito como:

$$\lambda_1 \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BM} \tag{5.7}$$

Temos

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{n}{n+m} \overrightarrow{CB}$$

Logo, usando que $n + m = a$, obtemos

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{a} (a \overrightarrow{AC} + n \overrightarrow{CB}) \tag{5.8}$$

Por outra parte, temos

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{p}{p+q} \overrightarrow{CA}.$$

Logo, e como $b = p + q$, segue

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{b} (b \overrightarrow{BC} + p \overrightarrow{CA}) \tag{5.9}$$

Agora, substituindo as equações (5.8) e (5.9) em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{a} \left(a\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{CB} \right) &= \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda_2}{b} \left(b\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{CA} \right) \\ \frac{\lambda_1}{a} \left(a\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{CB} \right) &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{\lambda_2}{b} \left(b\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{CA} \right)\end{aligned}$$

Donde

$$\left(\lambda_1 - 1 + \lambda_2 \frac{p}{b} \right) \overrightarrow{AC} + \left(\lambda_1 \frac{n}{a} - 1 + \lambda_2 \right) \overrightarrow{CB} = \vec{\theta}$$

Sendo os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{CB} linearmente independente, obtemos

$$\lambda_1 \frac{n}{a} + \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \frac{p}{b} + \lambda_1 = 1 \quad (5.10)$$

Similarmente, rotacionando o triângulo $\triangle ABC$ no sentido anti-horário, obtemos as expressões

$$\lambda_2 \frac{q}{b} + \lambda_3 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 \frac{r}{c} + \lambda_2 = 1 \quad (5.11)$$

e

$$\lambda_3 \frac{s}{c} + \lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \frac{m}{a} + \lambda_3 = 1 \quad (5.12)$$

Comparando essas igualdades, temos

$$\lambda_1 \frac{n}{a} = \lambda_3 \frac{r}{c}, \quad \lambda_2 \frac{q}{b} = \lambda_1 \frac{m}{a} \quad \text{e} \quad \lambda_3 \frac{s}{c} = \lambda_2 \frac{p}{b}.$$

Donde multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$\lambda_1 \frac{n}{a} \lambda_2 \frac{q}{b} \lambda_3 \frac{s}{c} = \lambda_3 \frac{r}{c} \lambda_1 \frac{m}{a} \lambda_2 \frac{p}{b}$$

Simplificando, segue

$$n q s = r m p$$

Portanto,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = 1$$

Para mostrar a recíproca, suponha que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ e seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} . Vamos mostrar que a ceviana \overline{CN} também passa por P . Considere:

$$\alpha_1 = \frac{r}{s}, \quad \alpha_2 = \frac{m}{n}, \quad \alpha_3 = \frac{p}{q}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{AN} = \alpha_1 \overrightarrow{NB}, \quad \overrightarrow{BL} = \alpha_2 \overrightarrow{LC}, \quad \overrightarrow{CM} = \alpha_3 \overrightarrow{MA}.$$

Também temos

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CM} = \frac{\alpha_3}{1 + \alpha_3} \overrightarrow{CA}.$$

Note que

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AC} \tag{5.13}$$

Por outra parte,

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{\alpha_3}{1 + \alpha_3} \overrightarrow{CA}$$

Logo,

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + \alpha_3} \overrightarrow{AC} \tag{5.14}$$

Note também que

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC} + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{CN} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \tag{5.15}$$

Agora, como $P \in \overline{AL} \cap \overline{BM}$, existem α e β tais que:

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AL} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BP} = \beta \overrightarrow{BM}$$

A seguir, pelo fato de P ser a interseção das cevianas \overline{AL} e \overline{BM} , estabeleceremos os valores de α e β em termos de α_1 , α_2 e α_3 . Temos, pela relação (5.13)

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AC} + \alpha \overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{AC} + \alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AC} \right).$$

Logo,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\alpha}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha \alpha_2 - 1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AC} \quad (5.16)$$

Por outra parte,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \beta \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + \alpha_3} \overrightarrow{AC} \right).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{CP} = (1 - \beta) \overrightarrow{AB} + \frac{\beta - 1 - \alpha_3}{1 + \alpha_3} \overrightarrow{AC} \quad (5.17)$$

Como os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} não são múltiplos, pelas relações (5.16) e (5.17), obtemos

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha_2} = 1 - \beta, \quad \frac{\alpha \alpha_2 - 1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} = \frac{\beta - 1 - \alpha_3}{1 + \alpha_3}$$

Que fornece o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha_2} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \alpha - \frac{1}{1 + \alpha_3} = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$\alpha = \frac{1 + \alpha_2}{1 + \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3}, \quad \beta = \frac{\alpha_2(1 + \alpha_3)}{1 + \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3}$$

Assim, substituindo o valor α em (5.16), segue que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{1}{1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3} \overrightarrow{AB} + \frac{\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_3}\alpha_2 - 1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3} \overrightarrow{AB} + \left(\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3} - 1 \right) \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3} \overrightarrow{AB} - \frac{1 + \alpha_2\alpha_3}{1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1(1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \frac{\alpha_1(1 + \alpha_2\alpha_3)}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AC} \right]\end{aligned}$$

Agora, note que a hipótese $\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$, fornece $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$. Portanto, por (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1(1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AC} \right] \\ &= \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1(1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right] \\ &= \frac{1 + \alpha_1}{\alpha_1(1 + \alpha_2 + \alpha_2\alpha_3)} \overrightarrow{CN}\end{aligned}$$

Isto é, a ceviana \overline{CN} contém o ponto P . Portanto, as cevianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes o que termina a prova do teorema. ■

5.4 Coordenadas Baricêntricas

Nesta seção introduziremos e discutiremos o conceito de coordenadas baricêntricas para um ponto do plano cartesiano, em função dos vértices de um dado triângulo de referência.

Este tipo de coordenadas foram apresentadas pelo matemático alemão August Ferdinand Möbius em 1827 e, como veremos, elas possuem propriedades muito convenientes. Coordenadas baricêntricas estão intimamente ligadas ao conceito de área. Essa técnica pode ser muito útil, por exemplo, em problemas que envolvam alguns pontos notáveis do triângulo, pois as fórmulas das coordenadas baricêntricas para tais pontos são muito simples.

Apresentaremos alguns resultados básicos relacionados com este tema, e as demonstrações dos Teoremas de Ceva e Menelaus usando coordenadas baricêntricas (homogêneas).

As referências usadas nesta seção são [?], [6], [11] e [18].

Observação 5.5 *Sejam A , B e C os vértices de um triângulo não degenerado no plano. Então*

os vetores \vec{AB} e \vec{AC} formam uma base de \mathbb{E}^2 ; logo para qualquer ponto P do plano existem únicos escalares α e β tais que

$$\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AB} + \beta \cdot \vec{AC}$$

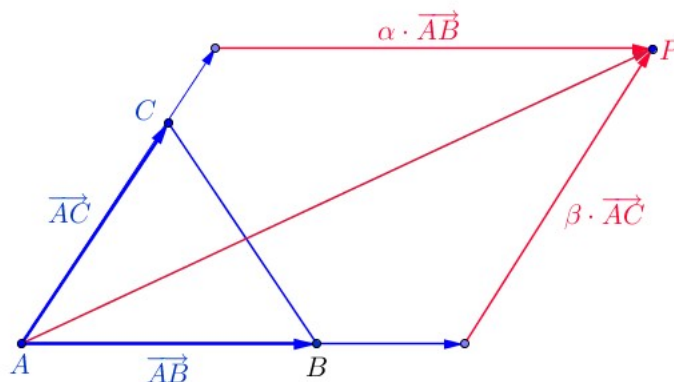


Figura 5.8

Logo, para qualquer ponto O do plano temos:

$$\vec{AO} + \vec{OP} = \alpha \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) + \beta \cdot (\vec{AO} + \vec{OC})$$

Portanto,

$$\vec{OP} = (1 - \alpha - \beta) \cdot \vec{OA} + \alpha \cdot \vec{OB} + \beta \cdot \vec{OC}$$

Definição 5.12 Sejam A , B e C os vértices de um triângulo não degenerado. Para quaisquer ponto O , seja P o ponto do plano tal que

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}, \quad \text{com } x + y + z = 1$$

A terna ordenada (x, y, z) são as coordenadas baricêntricas do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$. Denotaremos as coordenadas baricêntricas de P por $\check{P} = (x, y, z)$

Observação 5.6 As coordenadas baricêntricas do ponto P não dependem do ponto O . De fato, se para os números reais x , y e z com $x + y + z = 1$, tivermos

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC} \quad \text{e} \quad \vec{O'P} = x \cdot \vec{O'A} + y \cdot \vec{O'B} + z \cdot \vec{O'C}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P'} - \overrightarrow{OP} &= x \cdot (\overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{OA}) + y \cdot (\overrightarrow{O'B} - \overrightarrow{OB}) + z \cdot (\overrightarrow{O'C} - \overrightarrow{OC}) \\ &= x \cdot \overrightarrow{O'O} + y \cdot \overrightarrow{O'O} + z \cdot \overrightarrow{O'O} \\ &= (x + y + z) \cdot \overrightarrow{O'O} \\ &= \overrightarrow{O'O}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{O'P'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} \Rightarrow \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow P' = P$$

Observação 5.7 As coordenadas baricêntricas do ponto P são únicas. De fato, se tivermos,

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}, \quad \text{com } x + y + z = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} &= x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + z \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} &= (x + y + z) \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AP} &= y \cdot \overrightarrow{AB} + z \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Sendo \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} uma base para \mathbb{E}^2 os escalares y e z são unicamente determinados pela relação acima. O mesmo acontece para o valor de $x = 1 - y - z$.

Exemplo 5.1 As coordenadas baricêntricas dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ são:

$$\check{A} = (1, 0, 0), \quad \check{B} = (0, 1, 0), \quad \check{C} = (0, 0, 1),$$

pois:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA} &= 1 \cdot \overrightarrow{AA} + 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}, & \overrightarrow{AB} &= 0 \cdot \overrightarrow{AA} + 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AC} &= 0 \cdot \overrightarrow{AA} + 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Definição 5.13 Sejam A , B e C os vértices de uma triângulo não degenerado e sejam u , v , w números reais tais que $u + v + w \neq 0$. Para qualquer ponto O do plano, seja P o ponto do

plano tal que

$$(u + v + w) \cdot \overrightarrow{OP} = u \cdot \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{OB} + w \cdot \overrightarrow{OC} \quad (5.18)$$

A terna $(u; v; w)$ são as coordenadas baricêntricas homogêneas do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$. Denotaremos as coordenadas baricêntricas homogêneas do ponto P por $\check{P} = (u; v; w)$.

Observação 5.8 Note que na relação (5.18), o ponto P não depende de O . Com efeito, se tivermos para outro ponto O' a relação

$$(u + v + w) \cdot \overrightarrow{O'P'} = u \cdot \overrightarrow{O'A} + v \cdot \overrightarrow{O'B} + w \cdot \overrightarrow{O'C} \quad (5.19)$$

Então, tomando a diferença entre as equação (5.18) e (5.19), obtemos

$$\begin{aligned} (u + v + w) \cdot (\overrightarrow{O'P'} - \overrightarrow{OP}) &= u \cdot (\overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{OA}) + v \cdot (\overrightarrow{O'B} - \overrightarrow{OB}) + w \cdot (\overrightarrow{O'C} - \overrightarrow{OC}) \\ &= u \cdot \overrightarrow{O'O} + v \cdot \overrightarrow{O'O} + w \cdot \overrightarrow{O'O} \\ &= (u + v + w) \cdot \overrightarrow{O'O} \end{aligned}$$

Logo,

$$\overrightarrow{O'P'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} \Rightarrow \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow P' = P$$

Observação 5.9 As coordenadas baricêntricas homogêneas do ponto P em relação a um triângulo de referência $\triangle ABC$ não são únicas, pois

$$(u + v + w) \cdot \overrightarrow{OP} = u \cdot \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{OB} + w \cdot \overrightarrow{OC}$$

se, e somente se, para todo $\lambda \neq 0$

$$(\lambda u + \lambda v + \lambda w) \cdot \overrightarrow{OP} = \lambda u \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda v \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda w \cdot \overrightarrow{OC}$$

Proposição 5.5 Sejam $\check{P}_1 = (u_1; v_1; w_1)$ e $\check{P}_2 = (u_2; v_2; w_2)$ as coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos P_1 e P_2 em relação a um triângulo de referência $\triangle ABC$. Então $P_1 = P_2$ se, e somente se, existe um número real λ , não nulo, tal que $u_2 = \lambda u_1$, $v_2 = \lambda v_1$ e $w_2 = \lambda w_1$.

Prova. Para qualquer ponto O do plano, temos

$$(u_1 + v_1 + w_1)\overrightarrow{OP_1} = u_1\overrightarrow{OA} + v_1\overrightarrow{OB} + w_1\overrightarrow{OC}$$

$$(u_2 + v_2 + w_2)\overrightarrow{OP_2} = u_2\overrightarrow{OA} + v_2\overrightarrow{OB} + w_2\overrightarrow{OC}$$

Em particular, fazendo $O = A$ e $O = B$, obtemos respectivamente:

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{u_1 + v_1 + w_1} (v_1\overrightarrow{AB} + w_1\overrightarrow{AC}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{u_2 + v_2 + w_2} (v_2\overrightarrow{AB} + w_2\overrightarrow{AC}),$$

$$\overrightarrow{BP_1} = \frac{1}{u_1 + v_1 + w_1} (u_1\overrightarrow{BA} + w_1\overrightarrow{BC}) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BP_2} = \frac{1}{u_2 + v_2 + w_2} (u_2\overrightarrow{BA} + w_2\overrightarrow{BC})$$

Assim,

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1}{u_1+v_1+w_1} = \frac{u_2}{u_2+v_2+w_2}, \\ \frac{v_1}{u_1+v_1+w_1} = \frac{v_2}{u_2+v_2+w_2}, \\ \frac{w_1}{u_1+v_1+w_1} = \frac{w_2}{u_2+v_2+w_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \lambda u_1, \\ v_2 = \lambda v_1, \\ w_2 = \lambda w_1 \end{cases} \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{u_2+v_2+w_2}{u_1+v_1+w_1}$$

Observação 5.10 Segue da proposição anterior que se $\check{P}_1 = (u_1; v_1; w_1)$ e $\check{P}_2 = (u_2; v_2; w_2)$ são as coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos P_1 e P_2 respectivamente e se $u_1 \neq 0$, $v_1 \neq 0$ e $w_1 \neq 0$. Então:

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$$

Definição 5.14 Sejam A , B e C três pontos no plano. Se A , B e C forem colineares, definimos a área com sinal $[ABC]$ do triângulo $\triangle ABC$ como sendo 0 (triângulo degenerado). Se os três pontos não são colineares, então definimos $[ABC]$ por:

$$[ABC] = \begin{cases} S_{ABC} & \text{se os pontos } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido anti-horário;} \\ -S_{ABC} & \text{se os pontos } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido horário} \end{cases}$$

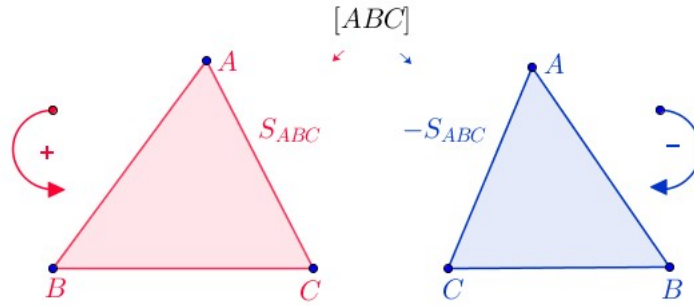


Figura 5.9: $[ABC]$ Área com sinal

O seguinte teorema estabelece as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto P em relação a um triângulo de referência. Para ver uma prova deste teorema, usando coordenadas cartesianas e as propriedades do determinante, recomendamos as referências [7] e [18]. Usando as propriedades da área de um triângulo (Lema 2.2 e Proposição 2.1), em [11] tal teorema é provado, quando P é um ponto interior do triângulo de referencia. Nossa prova é no caso geral e segue as ideias de [11].

Teorema 5.3 (Coordenadas Baricêntricas Homogêneas de um ponto no plano)

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo não degenerado. Então as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto P do plano são dadas por:

$$\check{P} = ([PBC]; [PCA]; [PAB]) \tag{5.20}$$

Demonstração: Quando P é um dos vértices do triângulo $\triangle ABC$, a prova é imediata. Vamos dividir a prova do teorema, segundo a posição do ponto P em relação ao triângulo $\triangle ABC$

Caso 1. P está no interior do $\triangle ABC$:

Seja \overline{AL} a ceviana que contém o ponto P . Denotemos por a, b, c e d os comprimentos dos segmentos $\overline{AP}, \overline{PL}, \overline{BL}$ e \overline{LC} respectivamente. Isto é:

$$a = AP, \quad b = PL, \quad c = BL \quad \text{e} \quad d = LC$$

Veja figura ilustrativa abaixo

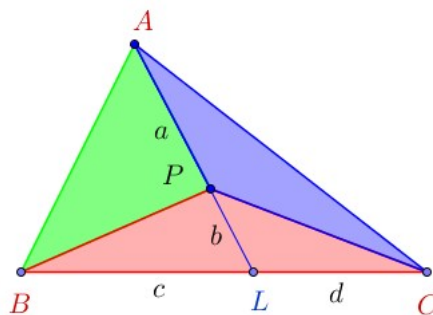


Figura 5.10: P no interior do $\triangle ABC$

Temos:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AL}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{c}{c+d} \overrightarrow{BC}$$

Assim,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+d} \overrightarrow{BC}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AL} = \frac{a}{a+b} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+d} \overrightarrow{BC} \right) = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB} + \frac{ac}{(a+b)(c+d)} \overrightarrow{BC}$$

Por esta relação, segue que

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \frac{ac}{(a+b)(c+d)} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \left(1 - \frac{a}{a+b} \right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{a}{a+b} - \frac{ac}{(a+b)(c+d)} \right) \overrightarrow{OB} + \frac{ac}{(a+b)(c+d)} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{b}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{ad}{(a+b)(c+d)} \overrightarrow{OB} + \frac{ac}{(a+b)(c+d)} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Concluimos que

$$[b(c+d) + ad + ac] \overrightarrow{OP} = b(c+d) \overrightarrow{OA} + ad \overrightarrow{OB} + ac \overrightarrow{OC}$$

Portanto,

$$\check{P} = (b(c+d); ad; ac) \tag{5.21}$$

Assim, para estabelecer o prova neste caso, basta mostrar que

$$\frac{[PBC]}{b(c+d)} = \frac{[PCA]}{ad} = \frac{[PAB]}{ac} \quad (5.22)$$

Ora, como P está no interior do $\triangle ABC$, temos

$$[PBC] = S_{PBC}, \quad [PCA] = S_{PCA}, \quad [PAB] = S_{PAB}$$

Agora pela Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{BL}{LC} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{[PAB]}{c} = \frac{[PCA]}{d} \\ &\Rightarrow \frac{[PAB]}{ac} = \frac{[PCA]}{ad} \end{aligned}$$

Que prova a segunda igualdade de (5.22). Por outra parte, pelo Lema 2.2, temos

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{a}{b} = \frac{S_{PCA}}{S_{PLC}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{b(c+d)}{ad} &= \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{a} \\ &= \frac{S_{PBL}}{S_{PBA}} \cdot \frac{S_{PBA}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PLC}}{S_{PCA}} \\ &= \frac{S_{PBL}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PLC}}{S_{PCA}} \\ &= \frac{S_{PBL} + S_{PLC}}{S_{PCA}} \\ &= \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{[PBC]}{b(c+d)} = \frac{[PCA]}{ad}$$

Isto prova a primeira igualdade de (5.22) que finaliza a prova deste caso.

Caso 2. P está sobre a reta suporte do segmento \overline{BC} :

Neste caso distinguimos três situações. Veja figura ilustrativa abaixo

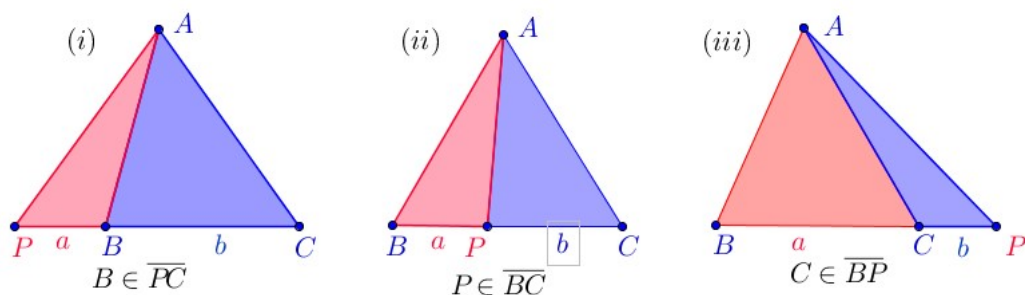


Figura 5.11: P sobre a reta suporte do segmento \overline{BC}

Prova do caso 2 (i): Pondo $PB = a$ e $BC = b$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PB} &= \frac{a}{a+b} \overrightarrow{PC} \\ \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} &= \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) \\ -\overrightarrow{OP} - \frac{a}{a+b} \overrightarrow{PO} &= -\overrightarrow{OB} + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OC} \\ -\frac{b}{a+b} \overrightarrow{OP} &= -\overrightarrow{OB} + \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$b\overrightarrow{OP} = 0\overrightarrow{OA} + (a+b)\overrightarrow{OB} - a\overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \check{P} = (0; (a+b); -a) \quad (5.23)$$

Assim, para mostrar (5.20), neste caso, basta mostra que

$$\frac{[PCA]}{a+b} = \frac{[PAB]}{-a} \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{S_{PCA}}{a+b} = \frac{S_{PAB}}{a}$$

Ora, pela Proposição 2.1, podemos estabelecer

$$\frac{S_{PCA}}{S_{PAB}} = \frac{S_{PBA} + S_{BCA}}{S_{PAB}} = 1 + \frac{S_{BCA}}{S_{PAB}} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}$$

Que estabelece (5.20) neste caso.

Prova do caso 2 (ii): Pondo $BP = a$ e $PC = b$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP} &= \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} - \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Portanto,

$$(a+b)\overrightarrow{OP} = 0\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \check{P} = (0; b; a) \quad (5.24)$$

Logo, (5.20) fica provado, se mostrarmos que

$$\frac{[PCA]}{b} = \frac{[PAB]}{a} \quad \text{ou equivalentemente} \quad \frac{S_{PCA}}{b} = \frac{S_{PAB}}{a}$$

e está última igualdade segue pela Proposição 2.1.

Prova do caso 2 (iii): Pondo $BC = a$ e $CP = b$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BP} \\ \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} &= \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) \\ -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BO} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$a\overrightarrow{OP} = 0\overrightarrow{OA} - b\overrightarrow{OB} + (a+b)\overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \check{P} = (0; -b; a+b) \quad (5.25)$$

Assim, (5.20) fica provado se mostrarmos que

$$\frac{[PCA]}{-b} = \frac{[PAB]}{a+b} \quad \text{ou equivalentemente,} \quad \frac{S_{PCA}}{b} = \frac{S_{PAB}}{a+b}.$$

Esta última igualdade é estabelecida usando o Lema 2.2, pois

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PCA} + S_{ABC}}{S_{PCA}} = 1 + \frac{S_{ABC}}{S_{PCA}} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$$

Caso 3. P está abaixo, em relação ao ponto A , da reta suporte do segmento \overline{BC} :

Neste caso distinguimos três situações. Veja figura ilustrativa abaixo.

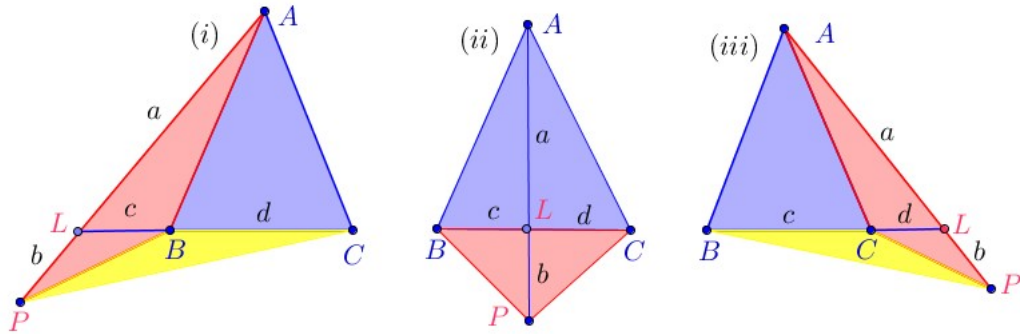


Figura 5.12: P abaixo, em relação ao ponto A , da reta suporte do segmento \overline{BC}

Prova do caso 3 (i): Pondo $AL = a$, $LP = b$, $BL = c$ e $LC = d$, temos

$$\overrightarrow{AL} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AP} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{LB} = \frac{c}{d} \overrightarrow{BC}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LB} &= \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AP} + \frac{c}{d} \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} &= \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) + \frac{c}{d} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} &= \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \frac{c}{d} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OP} &= \left(\frac{a}{a+b} - 1 \right) \overrightarrow{OA} + \left(1 + \frac{c}{d} \right) \overrightarrow{OB} - \frac{c}{d} \overrightarrow{OC} \\ \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OP} &= -\frac{b}{a+b} \overrightarrow{OA} + \frac{c+d}{d} \overrightarrow{OB} - \frac{c}{d} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Portanto,

$$ad\overrightarrow{OP} = -bd\overrightarrow{OA} + (a+b)(c+d)\overrightarrow{OB} - c(a+b)\overrightarrow{OC} \quad (5.26)$$

$$\check{P} = (-bd; (a+b)(c+d); -c(a+b)) \quad (5.27)$$

Assim, para mostrar (5.20), basta verificar que:

$$\frac{[PBC]}{-bd} = \frac{[PCA]}{(a+b)(c+d)} = \frac{[PAB]}{-c(a+b)}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{S_{PBC}}{bd} = \frac{S_{PCA}}{(a+b)(c+d)} = \frac{S_{PAB}}{c(a+b)} \quad (5.28)$$

Inicialmente, note que o Lema 2.2, fornece:

$$\frac{a}{b} = \frac{S_{LBA}}{S_{LPB}} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{S_{LPB}}{S_{PBC}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{c(a+b)}{bd} &= \frac{ac}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{S_{LBA}}{S_{LPB}} \cdot \frac{S_{LPB}}{S_{PBC}} + \frac{S_{LPB}}{S_{PBC}} \\ &= \frac{S_{LBA}S_{LPB} + (S_{LPB})^2}{S_{LPB}S_{PBC}} \\ &= \frac{S_{LPB}(S_{LBA} + S_{LPB})}{S_{LPB}S_{PBC}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{S_{PBC}}{bd} = \frac{S_{PBA}}{c(a+b)}.$$

Que prova uma das igualdades em (5.28). Por outra parte, o Lema 2.2 também fornece

$$\frac{S_{ABC}}{S_{LBA}} = \frac{d}{c} = \frac{S_{PBC}}{S_{PBL}} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{S_{ABC} + S_{PBL}}{S_{LBA} + S_{PBL}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(c+d)}{c(a+b)} &= \frac{c+d}{c} = 1 + \frac{d}{c} \\ &= 1 + \frac{S_{ABC} + S_{PBL}}{S_{LBA} + S_{PBL}} \\ &= \frac{S_{LBA} + S_{PBL} + S_{ABC} + S_{PBL}}{S_{LBA} + S_{PBL}} \\ &= \frac{S_{PCA}}{S_{PBA}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{S_{PCA}}{(a+b)(c+d)} = \frac{S_{PAB}}{c(a+b)}.$$

Chegando na prova da segunda igualdade de (5.28) completando a prova neste caso.

Prova do caso 3 (ii): Pondo $AL = a$, $LP = b$, $BL = c$ e $LC = d$, temos

$$\overrightarrow{AL} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AP}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{c}{c+d}\overrightarrow{BC}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{BL} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AP} - \frac{c}{c+d}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LB} &= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{AP} + \frac{c}{c+d}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} &= \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) + \frac{c}{c+d}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} &= \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) + \frac{c}{c+d}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) \\ \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OP} &= \left(-1 + \frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{c}{c+d}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{c}{c+d}\overrightarrow{OC} \\ \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OP} &= -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{d}{c+d}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{c+d}\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a(c+d)\overrightarrow{OP} = -b(c+d)\overrightarrow{OA} + d(a+b)\overrightarrow{OB} + c(a+b)\overrightarrow{OC} \quad (5.29)$$

$$\check{P} = (-b(c+d); d(a+b); c(a+b)) \quad (5.30)$$

Assim, (5.20) fica provado se mostrarmos que

$$\frac{[PBC]}{-b(c+d)} = \frac{[PCA]}{d(a+b)} = \frac{[PAB]}{c(a+b)}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{S_{PBC}}{b(c+d)} = \frac{S_{PCA}}{d(a+b)} = \frac{S_{PAB}}{c(a+b)} \quad (5.31)$$

A segunda igualdade de (5.31) segue do Lema 2.2, pois

$$\frac{S_{PCA}}{S_{PAB}} = \frac{d}{c} = \frac{d(a+b)}{c(a+b)}$$

Agora para a primeira, usando que

$$\frac{S_{LBP}}{S_{LPC}} = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{S_{LCA}}{S_{LPC}} = \frac{a}{b},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{b(c+d)}{d(a+b)} &= \frac{bc}{d(a+b)} + \frac{bd}{d(a+b)} \\ &= \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{S_{LBP}}{S_{LPC}} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{a}{b}} \\ &= \frac{S_{LBP}}{S_{LPC}} \cdot \frac{1}{1+\frac{S_{LCA}}{S_{LPC}}} + \frac{1}{1+\frac{S_{LCA}}{S_{LPC}}} \\ &= \frac{S_{LBP}}{S_{LPC}} \cdot \frac{S_{LPC}}{S_{LPC}+S_{LCA}} + \frac{S_{LPC}}{S_{LPC}+S_{LCA}} \\ &= \frac{S_{LBP}+S_{LPC}}{S_{LPC}+S_{LCA}} \\ &= \frac{S_{PCB}}{S_{PCA}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{S_{PCA}}{d(a+b)} = \frac{S_{PAB}}{c(a+b)}.$$

Que estabelece a segunda igualdade de (5.31) completando a prova neste caso

Prova do caso 3 (iii): Pondo $AL = a$, $LP = b$, $BC = c$ e $CL = d$, temos

$$\overline{AL} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AP} \quad \text{e} \quad \overline{CL} = \frac{d}{c} \overrightarrow{BC}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{AL} - \overline{CL} &= \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AP} - \frac{d}{c} \overrightarrow{BC} \\ \overline{AC} &= \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) - \frac{d}{c} (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ \overline{AO} + \overline{OC} &= \frac{a}{a+b} (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) - \frac{d}{c} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OP} &= \left(\frac{a}{a+b} - 1 \right) \overrightarrow{OA} - \frac{d}{c} \overrightarrow{OB} + \left(1 + \frac{d}{c} \right) \overrightarrow{OC} \\ \frac{a}{a+b} \overrightarrow{OP} &= -\frac{b}{a+b} \overrightarrow{OA} - \frac{d}{c} \overrightarrow{OB} + \frac{c+d}{c} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Portanto,

$$ac\vec{OP} = -bc\vec{OA} - d(a+b)\vec{OB} + (a+b)(c+d)\vec{OC} \quad (5.32)$$

$$\vec{P} = (-bc; -d(a+b); (a+b)(c+d)) \quad (5.33)$$

Assim, para mostrar (5.20), basta verificar

$$\frac{[PBC]}{-bc} = \frac{[PCA]}{-d(a+b)} = \frac{[PAB]}{(a+b)(c+d)}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{S_{PBC}}{bc} = \frac{S_{PCA}}{d(a+b)} = \frac{S_{PAB}}{(a+b)(c+d)}. \quad (5.34)$$

Note que o Lema 2.2, fornece

$$\frac{S_{CLA}}{S_{PLC}} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{S_{PLC}}{S_{PCB}} = \frac{d}{c}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d(a+b)}{bd} &= \frac{ad}{bc} + \frac{d}{c} = \frac{S_{CLA}}{S_{PLC}} \cdot \frac{S_{PLC}}{S_{PBC}} + \frac{S_{PLC}}{S_{PBC}} \\ &= \frac{S_{CLA} + S_{PLC}}{S_{PBC}} = \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}} \end{aligned}$$

Isto estabelece

$$\frac{S_{PBC}}{bc} = \frac{S_{PCA}}{d(a+b)}.$$

Que é a primeira igualdade de (5.34). Também o Lema 2.2 fornece:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACL}} = \frac{c}{d} = \frac{S_{PCB}}{S_{PLC}} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{S_{ABC} + S_{PBC}}{S_{ACL} + S_{PLC}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(c+d)}{d(a+b)} &= 1 + \frac{c}{d} = 1 + \frac{S_{ABC} + S_{PBC}}{S_{ACL} + S_{PLC}} \\ &= \frac{S_{ACL} + S_{PLC} + S_{ABC} + S_{PBC}}{S_{ACL} + S_{PLC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{S_{PCA}}{d(a+b)} = \frac{S_{PAB}}{(a+b)(c+d)}.$$

Que é a segunda igualdade de (5.31) e isto, completa a prova neste caso.

O restante dos casos se prova de forma análoga aos casos 2 e 3, mudando o ponto de referência.

■

Observação 5.11 (Sinal das Coordenadas Baricêntricas Homogêneas)

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo não degenerado. O sinal das coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto P do plano dependem da posição que P possui em relação ao triângulo $\triangle ABC$. Veja figura ilustrativa abaixo

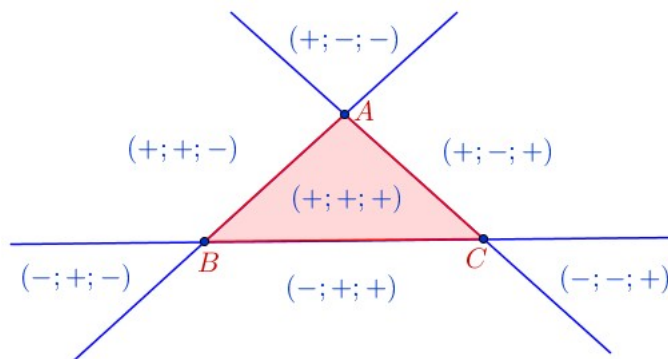


Figura 5.13: Sinal da coordenadas de \check{P}

Além disso, temos $S_{ABC} = [ABC] = [PBC] + [PCA] + [PAB]$. Portanto, as coordenadas baricêntricas de P são

$$\text{Coordenadas Baricêntricas de } P: \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]} \right)$$

Corolário 5.1 Sejam L, M e N pontos sobre os lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} respectivamente do triângulo $\triangle ABC$. Então, as coordenadas baricêntricas homogêneas de L, M e N são:

$$\check{L} = (0; LC; BL), \quad \check{M} = (CM; 0; MA), \quad \check{N} = (NB; AN; 0)$$

Prova. Segue do teorema anterior e o Lema 2.2.

■

Vejamos agora alguns exemplos de coordenadas baricêntricas homogêneas

Exemplo 5.2 Coordenadas baricêntricas homogêneas do baricentro. *O baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ tem coordenadas baricêntricas homogêneas $\check{G} = (1; 1; 1)$*

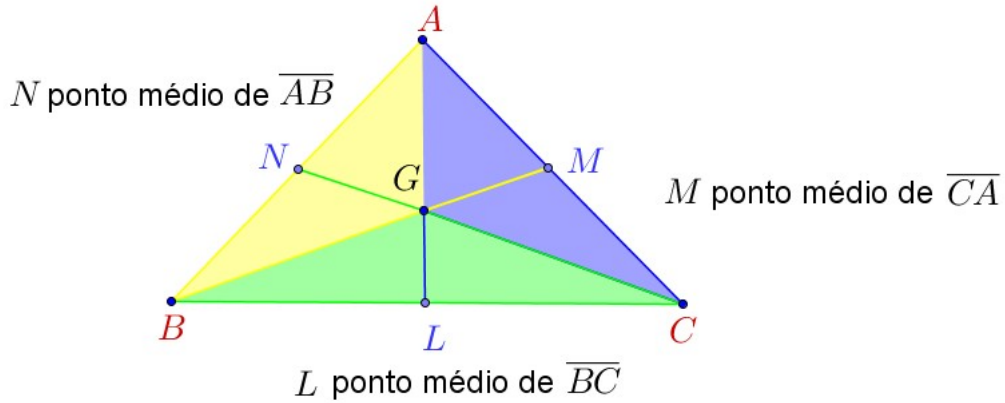


Figura 5.14: G Baricentro do $\triangle ABC$

Observe que, pelo teorema anterior $\check{G} = (S_{GBC}; S_{GCA}; S_{GAB})$. Agora usando a proposição 2.1 e o fato que L , M e N são os pontos médios dos lados BC , CA e AB respectivamente, obtemos que

$$S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB}$$

Exemplo 5.3 Coordenadas baricêntricas homogêneas do incentro. *O incentro I do triângulo $\triangle ABC$ tem coordenadas baricêntricas homogêneas $\check{I} = (BC; CA; AB)$*

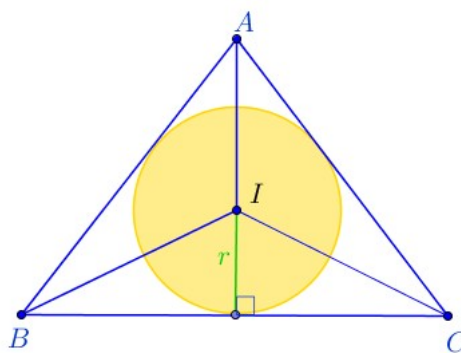


Figura 5.15: I Incentro do $\triangle ABC$

Pelo teorema anterior, temos $\check{I} = (S_{IBC}; S_{ICA}; S_{IAB})$. Sendo r o raio do círculo inscrito no triângulo $\triangle ABC$, temos

$$S_{IBC} = \frac{r}{2} \cdot BC, \quad S_{ICA} = \frac{r}{2} \cdot CA, \quad S_{IAB} = \frac{r}{2} \cdot AB$$

Daí segue $\check{I} = (BC; CA; AB)$.

Exemplo 5.4 Coordenadas baricêntricas homogêneas do circuncentro. *O circuncentro O do triângulo $\triangle ABC$ tem coordenadas baricêntricas homogêneas*

$$\check{O} = (BC \cos \hat{A}; CA \cos \hat{B}; AB \cos \hat{C})$$

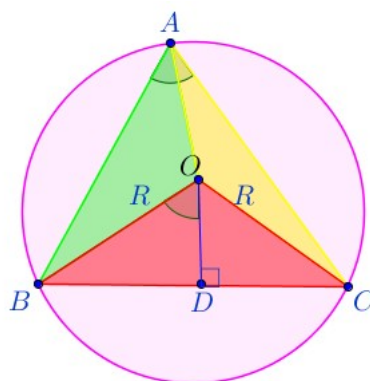


Figura 5.16: O Circuncentro do $\triangle ABC$

Pelo teorema anterior, temos $\check{O} = (S_{OBC}; S_{OCA}; S_{OAB})$. Sendo R o raio do círculo circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$, temos que a altura $h = OD$ e a área do triângulo $\triangle OBC$ são:

$$h = R \cos(\angle BOD) = R \cos \hat{A}, \quad S_{OBC} = \frac{R}{2} BC \cos \hat{A}$$

Analogamente,

$$S_{OCA} = \frac{R}{2} CA \cos \hat{B} \quad e \quad S_{OAB} = \frac{R}{2} AB \cos \hat{C}$$

Daí segue que $\check{O} = (BC \cos \hat{A}; CA \cos \hat{B}; AB \cos \hat{C})$.

O seguinte resultado estabelece as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto sobre uma ceviana.

Corolário 5.2 *Seja P um ponto sobre a ceviana \overline{AL} do triângulo $\triangle ABC$. Então, P divide o segmento \overline{LA} na razão simples $-k$ (ou seja, $\frac{LP}{PA} = k$) se, e somente se, as coordenadas baricêntricas homogêneas de P são $\check{P} = (kBC; LC; BL)$*

Prova.

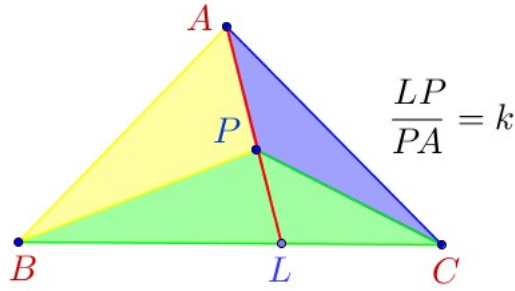


Figura 5.17: P divide \overline{LA} na razão k

Pelo teorema anterior, temos $\check{P} = (S_{PBC}; S_{PCA}; S_{PAB})$. Suponha que o ponto P divide a ceviana \overline{LA} na razão simples $-k$ (i.e., $\frac{LP}{PA} = k$). Para mostrar que $\check{P} = (kBC; LC; BL)$, basta mostrar que

$$\frac{S_{PBC}}{kBC} = \frac{S_{PCA}}{LC} = \frac{S_{PAB}}{BL} \quad (5.35)$$

Pela Proposição 2.1, temos

$$\frac{S_{PCA}}{S_{PAB}} = \frac{LC}{BL} \Rightarrow \frac{S_{PCA}}{LC} = \frac{S_{PAB}}{BL}$$

Que prova a segunda igualdade de (5.35). Por outra parte, temos

$$k \frac{BC}{LC} = \frac{LP}{PA} \cdot \frac{BL + LC}{LC} = \frac{LP \cdot BL + LP \cdot LC}{PA \cdot LC} = \frac{LP \cdot BL}{PA \cdot LC} + \frac{LP}{PA}$$

Agora, pelo Lema 2.2 e a proposição 2.1, obtemos, respectivamente

$$\frac{LP}{PA} = \frac{S_{PBL}}{S_{PAB}} = \frac{S_{PLC}}{S_{PCA}} \quad \text{e} \quad \frac{BL}{LC} = \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}}$$

Assim, a igualdade acima torna-se,

$$k \frac{BC}{LC} = \frac{LP \cdot BL}{PA \cdot LC} + \frac{LP}{PA} = \frac{S_{PBL}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PLC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBL} + S_{PLC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}}$$

Donde obtemos

$$\frac{S_{PBC}}{kBC} = \frac{S_{PCA}}{LC}$$

Isto é, a primeira igualdade em (5.35) o que finaliza a prova.

Reciprocamente, suponha que as coordenadas baricêntricas homogêneas do ponto P na ceviana \overline{LA} sejam $\check{P} = (kBC; LC; BL)$. Pelo teorema anterior, segue que

$$\frac{S_{PBC}}{kBC} = \frac{S_{PCA}}{LC} = \frac{S_{PAB}}{BL}$$

Portanto,

$$\frac{kBC}{LC} = \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{kBC}{LC} &= \frac{S_{PBC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBL} + S_{PLC}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBL}}{S_{PAB}} \cdot \frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} + \frac{S_{PLC}}{S_{PCA}} \\ &= \frac{LP}{PA} \cdot \frac{BL}{LC} + \frac{LP}{PA} = \frac{LP}{PA} \left(\frac{BL}{LC} + 1 \right) = \frac{LP}{PA} \cdot \frac{BL + LC}{LC} = \frac{LP}{PA} \cdot \frac{BC}{LC} \end{aligned}$$

Donde concluímos que $k = \frac{LP}{PA}$ ■

5.5 Ceva em coordenadas baricêntricas homogêneas

A referência usada para a prova do teorema de Ceva em coordenadas baricêntricas homogêneas foi a [22].

Definição 5.15 *Seja P um ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$. Os pontos onde as cevianas do triângulo $\triangle ABC$ passando por P cortam os lados opostos do triângulo de referência são denominados traços de P .*

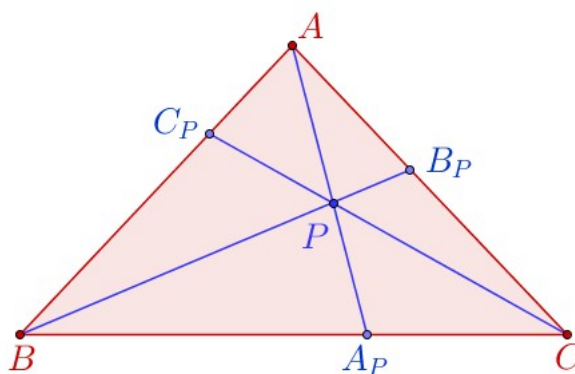


Figura 5.18: Traços do ponto P no interior do $\triangle ABC$

Lema 5.2 *Seja P um ponto interior ao triângulo $\triangle ABC$. Se P tem coordenadas baricêntricas homogêneas $\check{P} = (x; y; z)$, os traços A_P , B_P e C_P tem coordenadas baricêntricas homogêneas:*

$$\check{A}_P = (0; y; z), \quad \check{B}_P = (x; 0; z), \quad \check{C}_P = (x; y; 0) \quad (5.36)$$

Prova. De fato, pelo teorema anterior, temos:

$$\begin{aligned} \check{P} &= (S_{PBC}; S_{PCA}; S_{PAB}) \\ \check{A}_P &= (S_{A_PBC}; S_{A_PCA}; S_{A_PAB}) = (0; S_{A_PCA}; S_{A_PAB}) \\ \check{B}_P &= (S_{B_PBC}; S_{B_PCA}; S_{B_PAB}) = (S_{B_PBC}; 0; S_{B_PAB}) \\ \check{C}_P &= (S_{C_PBC}; S_{C_PCA}; S_{C_PAB}) = (S_{C_PBC}; S_{C_PCA}; 0) \end{aligned}$$

Assim, como $\check{P} = (x; y; z)$, temos

$$\frac{S_{PBC}}{x} = \frac{S_{PCA}}{y} = \frac{S_{PAB}}{z} \quad (5.37)$$

Para mostrar (5.36), teríamos que verificar:

$$\frac{S_{A_PCA}}{y} = \frac{S_{A_PAB}}{z}, \quad \frac{S_{B_PBC}}{x} = \frac{S_{B_PAB}}{z}, \quad \frac{S_{C_PBC}}{x} = \frac{S_{C_PCA}}{y}$$

Mas, pela proporcionalidade em (5.37), basta provar que

$$\frac{S_{PCA}}{S_{A_PCA}} = \frac{S_{PAB}}{S_{A_PAB}}, \quad \frac{S_{PBC}}{S_{B_PBC}} = \frac{S_{PAB}}{S_{B_PAB}}, \quad \frac{S_{PBC}}{S_{C_PBC}} = \frac{S_{PCA}}{S_{C_PCA}} \quad (5.38)$$

Agora pelo Lema 2.2 junto com a Proposição 2.1, pois

$$\begin{aligned} \frac{S_{PCA}}{S_{PAB}} &= \frac{S_{A_PCA}}{S_{A_PAB}} = \frac{A_PC}{B_AP} \\ \frac{S_{PBC}}{S_{PAB}} &= \frac{S_{B_PBC}}{S_{B_PAB}} = \frac{C_BP}{B_PA} \\ \frac{S_{PCA}}{S_{PBC}} &= \frac{S_{C_PCA}}{S_{C_PBC}} = \frac{A_CP}{C_PB} \end{aligned}$$

O que estabelece (5.38) e prova o corolário. ■

Usando este resultado e o corolário anterior, podemos estabelecer

Observação 5.12 *Sejam L , M e N pontos sobre os lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} respectivamente do triângulo $\triangle ABC$. Se L , M e N são traços, então*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

De fato, pelo lema anterior temos

$$\check{L} = (0; y; z), \quad \check{M} = (x; 0; z), \quad \check{N} = (x; y; 0)$$

e pelo corolário da seção anterior, também temos

$$\check{L} = (0; LC; BL), \quad \check{M} = (CM; 0; MA), \quad \check{N} = (NB; AN; 0)$$

Portanto,

$$\frac{LC}{y} = \frac{BL}{z}, \quad \frac{CM}{x} = \frac{MA}{z}, \quad \frac{NB}{x} = \frac{AN}{y}$$

Logo,

$$\frac{AN}{NB} = \frac{y}{x}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{z}{y}, \quad \frac{CM}{MA} = \frac{x}{y}$$

Donde concluímos que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1$$

Teorema 5.4 (Ceva em coordenadas baricêntricas homogêneas). *Os pontos L , M e N são os traços do ponto P , de coordenadas baricêntricas homogêneas $\check{P} = (x; y; z)$, sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} de um triângulo $\triangle ABC$ se, e somente se, as coordenadas baricêntricas homogêneas de L , M e N são da forma:*

$$\check{L} = (0; y; z), \quad \check{M} = (x; 0; z) \quad e \quad \check{N} = (x; y; 0)$$

Demonstração. Supondo que os pontos L , M e N são os traços do ponto P , o lema 5.2 fornece que as coordenadas baricêntricas homogêneas de L , M e N são da forma:

$$\check{L} = (0; y; z), \quad \check{M} = (x; 0; z) \quad e \quad \check{N} = (x; y; 0)$$

Reciprocamente, suponha que as coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos L , M e N são dadas respectivamente por

$$\check{L} = (0; y; z), \quad \check{M} = (x; 0; z) \quad \text{e} \quad \check{N} = (x; y; 0)$$

Então, considerando o ponto P de coordenadas baricêntricas homogêneas $\check{P} = (x; y; z)$, obtemos, usando o lema 5.2, que os traços A_P , B_P e C_P do ponto P sobre os lados do triângulo tem coordenadas baricêntricas homogêneas

$$\check{A}_P = (0; y; z), \quad \check{B}_P = (x; 0; z), \quad \check{C}_P = (x; y; 0)$$

Donde concluímos que L , M e N são justamente esses traços. ■

5.6 Menelaus em coordenadas baricêntricas homogêneas

A prova do teorema de Menelaus em coordenadas baricêntricas homogêneas, a seguir, é nossa (do autor junto com o orientador).

Teorema 5.5 (Menelaus em coordenadas baricêntricas homogêneas). *Sejam M e N pontos sobre os lados \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$; e seja L um ponto sobre o prolongamento do lado \overline{BC} . Os pontos L , M e N são colineares se, e somente se, as coordenadas baricêntricas homogêneas dos pontos L , M e N são da forma:*

$$\check{L} = (0; -y; z), \quad \check{M} = (x; 0; z) \quad \text{e} \quad \check{N} = (x; y; 0) \quad (5.39)$$

Demonstração. Suponha que os pontos L , M e N são colineares. Considere a figura ilustrativa abaixo

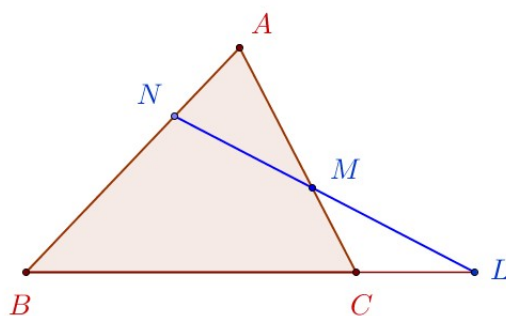


Figura 5.19: Menelaus em coordenadas baricêntricas

Temos pelo teorema (5.3) que

$$\check{L} = (0; -S_{LCA}; S_{LAB}), \quad \check{M} = (S_{MBC}; 0; S_{MAB}) \quad \text{e} \quad \check{N} = (S_{NBC}; S_{NCA}; 0). \quad (5.40)$$

Considere

$$x = S_{MBL}, \quad y = S_{MLA} \quad \text{e} \quad z = S_{MAB} + S_{MLA} \quad (5.41)$$

Para mostrar (5.39), basta verificar que

$$\frac{S_{LCA}}{S_{MLA}} = \frac{S_{LAB}}{S_{MAB} + S_{MLA}}, \quad \frac{S_{MBC}}{S_{MBL}} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAB} + S_{MLA}} \quad \text{e} \quad \frac{S_{NBC}}{S_{MBL}} = \frac{S_{NCA}}{S_{MLA}} \quad (5.42)$$

Para a primeira igualdade em (5.42), temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{LCA}}{S_{MLA}} = \frac{S_{LAB}}{S_{MAB} + S_{MLA}} &\Leftrightarrow \frac{S_{MAB} + S_{MLA}}{S_{MLA}} = \frac{S_{LAB}}{S_{LCA}} = \frac{S_{LAC} + S_{ABC}}{S_{LCA}} \\ &\Leftrightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MLA}} + 1 = 1 + \frac{S_{ABC}}{S_{LCA}} \\ &\Leftrightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MLA}} = \frac{S_{ABC}}{S_{LCA}} \quad \left(= \frac{BC}{CL} \right) \end{aligned}$$

Que segue, usando o lema 2.2 e a proposição 2.1. Para a segunda igualdade em (5.42), temos

$$\begin{aligned} \frac{S_{MBC}}{S_{MBL}} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAB} + S_{MLA}} &\Leftrightarrow \frac{S_{MBC} + S_{MCL}}{S_{MBC}} = \frac{S_{MBL}}{S_{MBC}} = \frac{S_{MAB} + S_{MLA}}{S_{MAB}} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{S_{MCL}}{S_{MBC}} = 1 + \frac{S_{MLA}}{S_{MAB}} \\ &\Leftrightarrow \frac{S_{MCL}}{S_{MBC}} = \frac{S_{MLA}}{S_{MAB}} \quad \left(= \frac{CL}{BC} \right) \end{aligned}$$

Novamente, a igualdade acima, segue usando Lema 2.2 e Proposição 2.1. Para a terceira igualdade em (5.42), temos

$$\frac{S_{NBC}}{S_{MBL}} = \frac{S_{NCA}}{S_{MLA}} \Leftrightarrow \frac{S_{NBC}}{S_{NCA}} = \frac{S_{MBL}}{S_{MLA}} \quad \left(= \frac{NB}{AN} \right)$$

E a igualdade acima, segue usando Lema 2.2 e Proposição 2.1. Assim, fica provado (5.39).

Reciprocamente, suponha que as coordenadas baricêntricas homogêneas de L , M e N podem ser escritas na forma (5.39). Portanto, para qualquer ponto O do plano, temos

$$\begin{aligned}(z - y)\overrightarrow{OL} &= -y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \\ (x + z)\overrightarrow{OM} &= x\overrightarrow{OA} + z\overrightarrow{OC} \\ (x + y)\overrightarrow{ON} &= x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

Em particular, para $O = A$, as identidades acima tornam-se,

$$(z - y)\overrightarrow{AL} = -y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}, \quad (x + z)\overrightarrow{AM} = z\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad (x + y)\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AB}$$

Agora, substituindo as duas últimas na primeira, obtemos

$$\begin{aligned}(z - y)\overrightarrow{AL} &= -(x + y)\overrightarrow{AN} + (x + z)\overrightarrow{AM} \\ z(\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AM}) &= x(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}) + y(\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AN}) \\ z\overrightarrow{ML} &= x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NL} \\ z\overrightarrow{ML} &= x\overrightarrow{NM} + y(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML}) \\ (z - y)\overrightarrow{ML} &= (x + y)\overrightarrow{NM}\end{aligned}$$

O que mostra que os pontos L , M e N são colineares e finaliza o teorema. ■

Capítulo 6

Os teoremas de Menelaus e Ceva no espaço

Vimos nos capítulos anteriores várias maneiras de demonstrar os teoremas de Menelaus e Ceva. Desde as demonstrações tradicionais relativas à geometria no plano, passando pela apresentação em coordenadas baricêntricas e a bela apresentação dos teoremas a partir da geometria vetorial. Neste estágio do nosso trabalho, vamos apresentar as versões espaciais dos teoremas de Menelaus e Ceva. Sabe-se que alguns teoremas da geometria plana tem sua forma análoga na geometria espacial, a exemplo do teorema de Pitágoras, entre outros. Essa analogia é relevante no sentido que se um teorema geométrico com aplicação no plano resolve muitos problemas, é de se imaginar que o análogo espacial desse teorema também será de utilidade na formulação e resolução de problemas semelhantes na geometria aplicada em dimensões 3.

As referências usadas neste capítulo são [20] e [32].

6.1 O teorema de Menelaus na versão espacial

Apresentamos a seguir o teorema de Menelaus em dimensão 3. Enquanto a versão plana trata da colinearidade de três pontos, dois sobre os lados de um triângulo e o outro sobre a reta suporte do terceiro lado, no análogo para o caso espacial trata da coplanaridade de quatro pontos sobre as arestas de um tetraedro. Assim, fazendo a analogia do caso planar com o caso espacial, os lados de um triângulo se tornam arestas de um tetraedro e a reta que intersecta os lados do triângulo torna-se um plano que intersecta as arestas do tetraedro.

Teorema 6.1 Menelaus no espaço *Seja $ABCD$ um tetraedro tal que os pontos X, Y, Z e W estão sobre as arestas \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente. Os pontos X, Y, Z e W são*

coplanares se, e somente se,

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1.$$

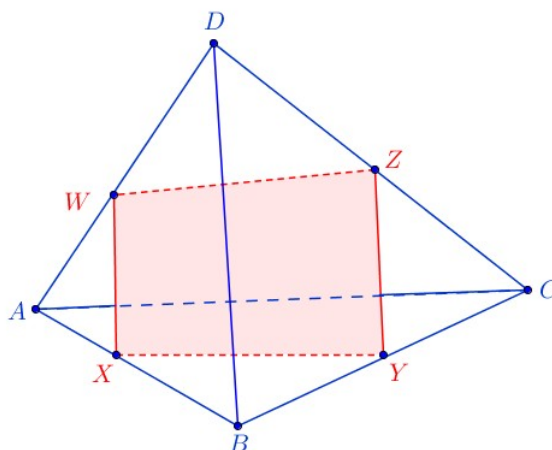


Figura 6.1: Menelaus no espaço

Demonstração. Suponha que os pontos X, Y, Z e W são coplanares e considere a reta s perpendicular ao plano $XYZW$, que passa pelo ponto W . Sejam os pontos D' e A' as respectivas projeções ortogonais dos pontos D e A sobre a reta s . Veja a figura ilustrativa abaixo.

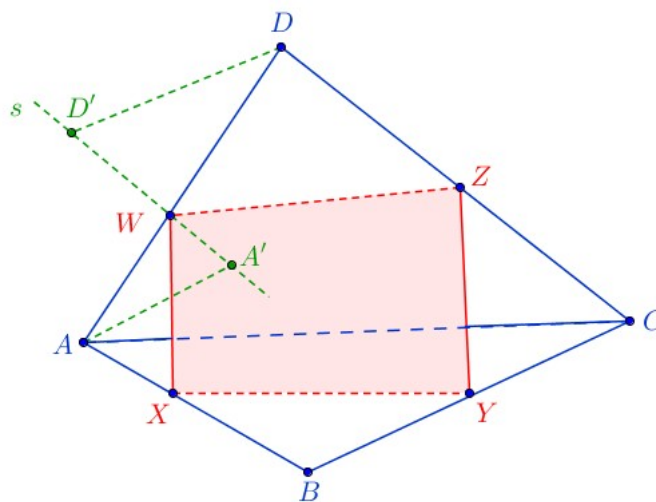


Figura 6.2: Projeções ortogonais

Como os triângulos $\triangle DD'W$ e $\triangle AA'W$ são semelhantes (ângulos $\angle D'WD$ e $\angle A'WA$ são opostos pelo vértice e ângulos $\angle DD'W$ e $\angle AA'W$ são retos), temos

$$\frac{WD'}{WA'} = \frac{WD}{WA} \tag{6.1}$$

Seja $k \in \mathbb{R}$, o valor da medida da área do quadrilátero $XYZW$. Note que WD' é o valor da altura da pirâmide de base o quadrilátero $XYZW$ e vértice D . Veja figura ilustrativa abaixo.

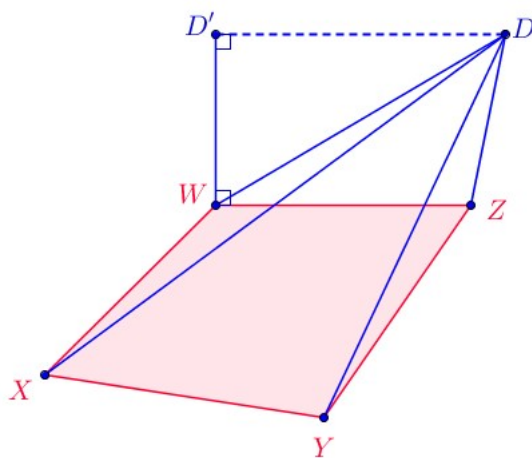


Figura 6.3: Volume de pirâmide

Logo, se $V(DXYZW)$ representa o volume da pirâmide $DXYZW$, temos:

$$V(DXYZW) = \frac{k}{3} \cdot WD'.$$

Analogamente,

$$V(AXYZW) = \frac{k}{3} \cdot WA'.$$

Portanto, segue de (6.1),

$$\frac{V(DXYZW)}{V(AXYZW)} = -\frac{WD}{WA}. \quad (6.2)$$

De modo análogo, obtemos as expressões dos volumes relativos as pirâmides $DXYZW$ e $CXYZW$ de base o quadrilátero $XYZW$

$$\frac{V(CXYZW)}{V(DXYZW)} = -\frac{ZC}{ZD}. \quad (6.3)$$

Também para os volumes relativos as pirâmides $CXYZW$ e $BXYZW$ de base o quadrilátero $XYZW$, temos

$$\frac{V(BXYZW)}{V(CXYZW)} = -\frac{YB}{YC}. \quad (6.4)$$

Finalmente, para os volumes relativos as pirâmides $BXYZW$ e $AXYZW$ de base o quadrilátero $XYZW$, temos

$$\frac{V(AXYZW)}{V(BXYZW)} = -\frac{XA}{XB}. \quad (6.5)$$

Agora multiplicando membro a membro as relações (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5), obtemos

$$\frac{V(DXYZW)}{V(AXYZW)} \cdot \frac{V(CXYZW)}{V(DXYZW)} \cdot \frac{V(BXYZW)}{V(CXYZW)} \cdot \frac{V(AXYZW)}{V(BXYZW)} = \frac{WD}{WA} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{XA}{XB},$$

que simplificando obtemos a expressão desejada

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1.$$

Para provar a recíproca, considere que o plano determinado pelos pontos X , Y e Z intersecta o segmento \overline{DA} no ponto S . Veja figura ilustrativa abaixo.

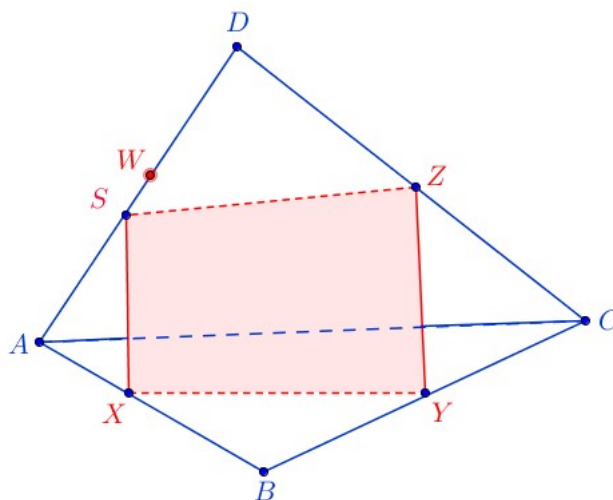


Figura 6.4: Menelaus espacial - recíproca

Então, pela primeira parte do teorema de Menelaus (versão espacial), mostrado acima, vale que

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1. \quad (6.6)$$

Agora, por hipótese, temos

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1. \quad (6.7)$$

Segue, comparando (6.6) com (6.7),

$$\frac{SD}{SA} = \frac{WD}{WA},$$

e daí concluímos que S e W são coincidentes pela unicidade do ponto que divide um segmento numa determinada razão simples, conforme Lema 2.1. Portanto os pontos X, Y, Z e W são coplanares. ■

6.2 O teorema de Ceva na versão espacial

Uma vez que o teorema de Ceva no plano trata da concorrência de três cevianas, o análogo espacial, trata da concorrência de quatro planos construídos a partir dos extremos de cada aresta até um ponto na aresta oposta.

Teorema 6.2 Teorema de Ceva: versão espacial. *Seja $ABCD$ um tetraedro tal que os pontos X, Y, Z e W estão sobre as arestas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{DA} , respectivamente. Os planos AZB, BWC, CXD e DYA intersectam-se em exatamente um ponto se, e somente se,*

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1.$$

Demonstração. Seja P o ponto de interseção dos planos AZB, BWC, CXD e DYA . Veja figura abaixo.

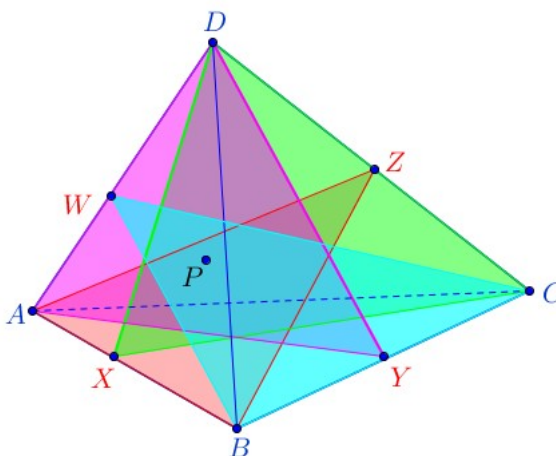


Figura 6.5: Ceva espacial

Denote por C' o ponto de interseção dos segmentos \overline{DX} e \overline{WB} ; A' , o ponto de interseção dos segmentos \overline{DY} e \overline{BZ} . Os pontos P , A' e C' determinam um plano que intersecta o segmento \overline{BD} no ponto T . Assim,

$$A' \in \overline{BZ} \cap \overline{DY} \quad \text{e} \quad C' \in \overline{BW} \cap \overline{DX}$$

Note que:

(i) O segmento $\overline{AA'}$ está contido na interseção dos planos AZB e AYD , pois o ponto A pertence por natureza aos dois planos e $A' \in \overline{BZ} \cap \overline{DY}$, pertencerá também a interseção desses planos uma vez que os segmentos \overline{BZ} e \overline{DY} estão contidos nos planos AZB e AYD , respectivamente.

(ii) O segmento $\overline{CC'}$ está contido na interseção dos planos CXD e CWB , pois C pertence por natureza aos planos CXD e CWB e como $C' \in \overline{BW} \cap \overline{DX}$, e os segmentos \overline{DX} e \overline{BW} estão contidos nos planos CXD e CWB respectivamente, implica que o ponto C' também pertence aos referidos planos.

(iii) Como P é a interseção dos planos AZB , AYD , CXD e CWB , por (i) e (ii), segue que $P \in \overline{AA'} \cap \overline{CC'}$. Veja figura ilustrativa a seguir.

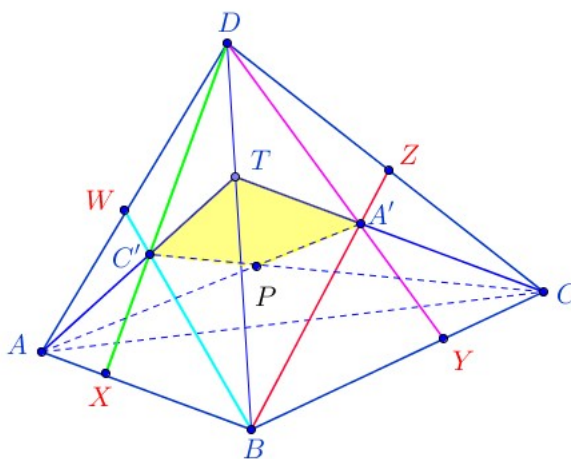


Figura 6.6: Ceva espacial: Plano $PC'A'$

Observe ainda que os pontos A , C' e T são colineares, pois pertencem à interseção dos planos ADB e $PA'C'$. Assim, como os pontos C , A' e T são colineares já que estão na interseção dos planos DBC e $PA'C'$.

Agora aplicando o teorema de Ceva (no plano) nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$, obtemos respectivamente. Veja figura ilustrativa abaixo.

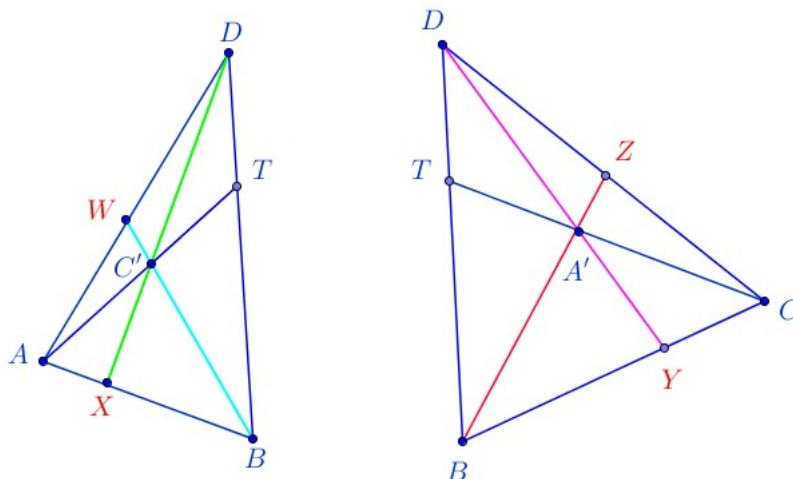


Figura 6.7: Ceva espacial: $\triangle DAB$ e $\triangle DBC$

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{TB}{TD} \cdot \frac{WD}{WA} = -1, \tag{6.8}$$

$$\frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{TD}{TB} = -1. \tag{6.9}$$

Multiplicando membro a membro as equações (6.8) e (6.9), obtemos:

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{TB}{TD} \cdot \frac{WD}{WA} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{TD}{TB} = 1,$$

que após simplificação, fica

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1.$$

Reciprocamente, considere a ceviana \overline{AT} que parte do vértice A e passa por C' , onde C' é a interseção das cevianas \overline{BW} e \overline{DX} . Veja figura ilustrativa abaixo.

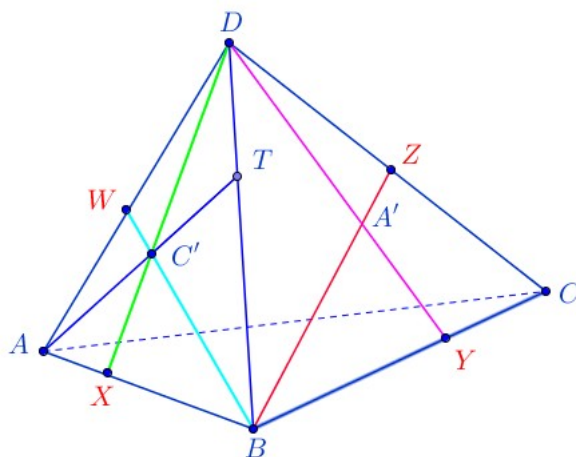


Figura 6.8: Ceva espacial: Recíproca

Pelo teorema de Ceva (no plano) no triângulo $\triangle ABD$, temos

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{TB}{TD} \cdot \frac{WD}{WA} = -1 \tag{6.10}$$

e por hipótese,

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1. \tag{6.11}$$

Invertendo a expressão da hipótese e multiplicando estas equações, obtemos após simplificação,

$$\frac{TB}{TD} \cdot \frac{ZD}{ZC} \cdot \frac{YC}{YB} = -1. \tag{6.12}$$

Pela recíproca do teorema de Ceva no $\triangle BCD$, concluímos que a ceviana \overline{CT} passa por A' ($A' \in \overline{BZ} \cap \overline{DY}$). Este resultado leva também à conclusão que os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$ estão no plano ATC , porque os pontos das extremidades de cada segmento pertencem a este plano. Além disso, eles intersectam-se no ponto P , já que C está no semi-plano oposto de C' , tendo o segmento $\overline{AA'}$ como o segmento que separa o plano ATC em dois semi-planos. Finalmente como o segmento $\overline{AA'}$ é a interseção dos planos ADY e AZB ; $\overline{CC'}$ é a interseção dos planos BWC e DCX , segue daí que esses quatro planos se intersectam em P . Veja figura ilustrativa abaixo.

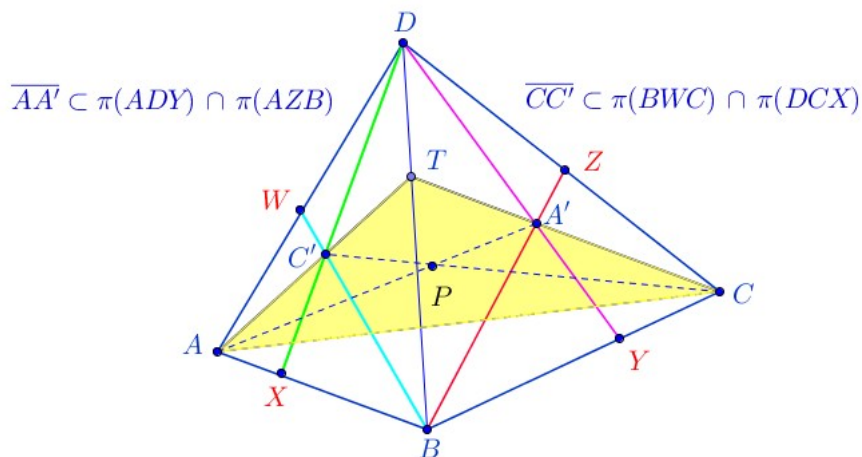


Figura 6.9: Ceva espacial: Recíproca final

Onde na figura $\pi(ADY)$ indica o plano ADY . ■

6.3 Aplicações dos Teoremas de Menelaus e Ceva espacial

Apresentamos a seguir duas aplicações que ilustram os teoremas de Menelaus e Ceva no espaço. Nos enunciados percebe-se a partir das condições dos problemas, tratar-se de questões que se enquadram no raio de ação dos teoremas.

Aplicação 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero no espaço de modo que \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} sejam tangentes a uma esfera ξ nos pontos X, Y, Z e W . Prove que estes pontos são coplanares.

Solução.

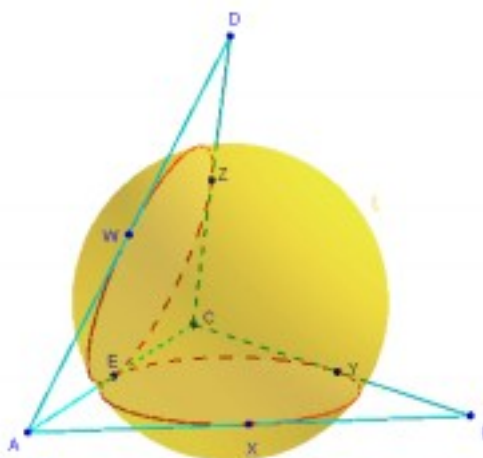


Figura 6.10: Aplicação 1: Menelaus espacial

Observando a figura, note que a esfera ξ intersecta o plano ACD e determina um círculo do qual temos:

$$ZD = WD, \quad WA = EA, \quad \text{e} \quad EC = ZC.$$

Da mesma forma a esfera ξ intersecta o plano ABC em outro círculo tal que

$$XB = YB, \quad EA = XA \quad \text{e} \quad YC = EC$$

Ora, como $WA = EA$ e $EA = XA$, segue que $WA = XA$.

Analogamente, $EC = YC$ e $EC = ZC$. Logo, $YC = ZC$. Assim, podemos escrever,

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1. \tag{6.13}$$

Segue da recíproca do teorema de Menelaus, que os pontos X, Y, Z e W são coplanares.

Aplicação 2. Seja $PABC$ um tetraedro e sejam A_1, B_1 e C_1 os pontos médios das arestas \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} respectivamente. Seja α um plano paralelo a face ABC que intercepta as arestas \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{PC} nos pontos A_2, B_2 e C_2 respectivamente. Prove que $\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ concorrem em um ponto D .

Solução. Seja α , o plano paralelo ao plano ABC . Veja figura ilustrativa abaixo.

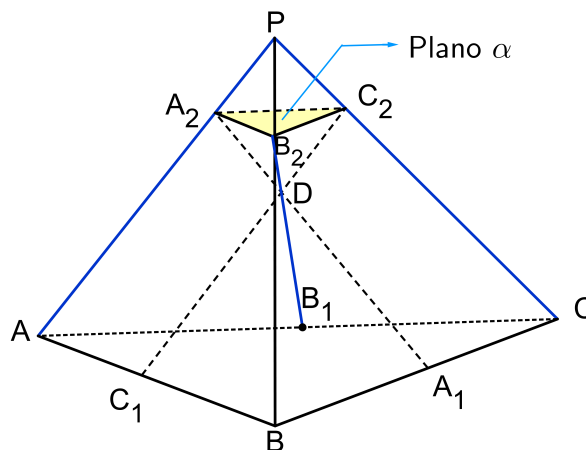


Figura 6.11: Aplicação 2: Menelaus espacial

Temos:

$$\alpha // \text{plano } ABC \Rightarrow \triangle PA_2B_2 \sim \triangle PAB,$$

logo

$$\frac{A_2P}{A_2A} = \frac{B_2P}{B_2B}, \quad \text{ou equivalentemente} \quad \frac{A_2A}{A_2P} \cdot \frac{B_2P}{B_2B} = 1.$$

Além disso, como A_1 e B_1 são pontos médios dos segmentos \overline{BC} e \overline{CA} respectivamente, podemos escrever

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1.$$

Daí, multiplicando essas duas últimas expressões, obtemos,

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_2A}{A_2P} \cdot \frac{B_2P}{B_2B} = 1 \quad (6.14)$$

Com um raciocínio análogo para os triângulos semelhantes, $\triangle PB_2C_2 \sim \triangle PBC$, obtemos,

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{C_2C}{C_2P} \cdot \frac{A_2P}{A_2A} = 1 \quad (6.15)$$

e pela semelhança dos triângulos $\triangle PA_2C_2 \sim \triangle PAC$, obtemos,

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_2B}{B_2P} \cdot \frac{C_2P}{C_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1. \quad (6.16)$$

Do exposto em (6.14), (6.15) e (6.16) podemos concluir que:

- O segmento $\overline{C_1C_2}$ é a interseção dos planos $C_1A_1C_2A_2$ e $C_1B_1C_2B_2$;
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ é a interseção dos planos $C_1B_1C_2B_2$ e $B_1A_1B_2A_2$.
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é a interseção dos planos $C_1A_1C_2A_2$ e $B_1A_1B_2A_2$.

Isto é suficiente para que os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{C_1C_2}$ concorram no ponto D .

Capítulo 7

Aplicações dos teoremas de Menelaus e Ceva

Apresentamos neste capítulo algumas aplicações envolvendo os teoremas de Menelaus e Ceva. Na primeira aplicação apresentamos a construção do conjugado harmônico e mostramos algebricamente, usando os teoremas de Menelaus e Ceva, que de fato tal construção fornece o conjugado harmônico do ponto. As demais aplicações tratam de questões oriundas de concursos e olimpíadas de matemática, além de demonstrações de proposições envolvendo os conceitos referentes a colinearidade e a concorrência entre pontos e retas no plano que se enquadrem nas condições de utilização desses teoremas. Os exercícios apresentados são acompanhados de figuras ilustrativas e totalmente resolvidos .

7.1 Construção do Conjugado Harmônico

Apresentamos a seguir construção do conjugado harmônico de um ponto M em relação a um segmento \overline{AB} . Faremos em primeiro lugar a construção quando o ponto M está no interior do segmento \overline{AB} e, em seguida, quando M é exterior. Por último provamos algebricamente que a construção dada fornece, de fato, o conjugado harmônico do ponto M .

As referências usadas nesta seção são [12] e [13]

Passemos inicialmente a lembrar do conceito de conjugado harmônico.

Definição 7.1 *Sejam M , N , A e B pontos colineares. Dizemos que os pontos M e N dividem*

harmonicamente o segmento \overline{AB} quando

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$$

Dizemos também que N é o conjugado harmônico de M ou que M é o conjugado harmônico de N em relação ao segmento \overline{AB} . Dizemos ainda que os pontos A, N, M e B acima formam uma quádrupla harmônica.

Observações 7.1

- Note que se $t = \frac{MA}{MB}$, então os pontos M e N dividem o segmento \overline{AB} na razão simples t e $-t$ respectivamente.
- Conforme mostramos no Capítulo 2, o conjugado harmônico de um ponto em relação a um segmento é único. Isto resulta porque o conjugado harmônico é um ponto que divide um segmento numa razão simples dada (veja Lema 2.1).
- Note também que o ponto médio M do segmento \overline{AB} , que divide o segmento \overline{AB} na razão simples -1 , não possui conjugado harmônico, pois caso existisse tal conjugado harmônico, existiria um ponto N tal que $\frac{NA}{NB} = 1$, teríamos que $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB}$ o que implica que $A = B$ que é um absurdo. Dizemos que o conjugado harmônico do ponto médio do segmento \overline{AB} está no infinito (a construção a seguir justificará essa denominação).

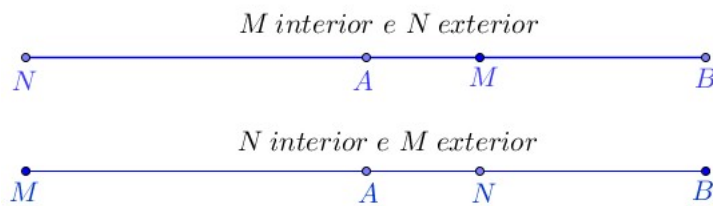


Figura 7.1: N conjugado harmônico de M em relação a \overline{AB}

Passemos agora à descrição dos passos da construção geométrica do conjugado harmônico do ponto M em relação ao segmento \overline{AB} .

Construção Geométrica 7.1 Conjugado harmônico de M interior ao segmento \overline{AB} .

1. Considere os pontos A, M e B nesta ordem sobre uma reta suporte l dada.
2. Trace as retas r e s "livres", a partir do ponto A , de modo que $\sphericalangle(s, l) < \sphericalangle(r, l) < \pi$.

3. A partir dos pontos M e B trace, respectivamente, as retas t e u , de modo que elas cortem a reta s e se encontrem na reta r num ponto Q .

4. Marque os pontos Y e Z tais que $\{Y\} = u \cap s$ e $\{Z\} = t \cap s$.

5. Trace a semirreta com ponto inicial B e que passa por Z . Marque o ponto X onde essa semirreta corta a reta r .

6. Finalmente, trace a semirreta com ponto inicial X que passa por Y . Essa semirreta corta a reta suporte l no ponto M que é o conjugado harmônico de N em relação ao segmento \overline{AB}

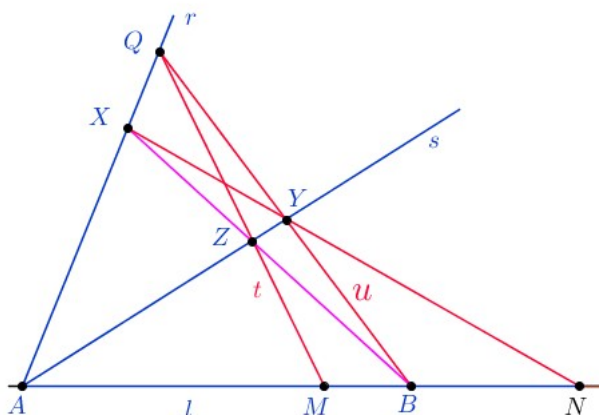


Figura 7.2: Construção do conjugado harmônico: M interior a \overline{AB}

Passemos agora à descrever os passos da construção geométrica do conjugado harmônico do ponto M , em relação ao segmento \overline{AB} , quando M é exterior ao segmento

Construção Geométrica 7.2 Conjugado harmônico de M exterior ao segmento \overline{AB} .

1. Tome os pontos A, B e M nesta ordem, sobre uma reta suporte l dada.
2. Trace duas retas r e s "livres", a partir do ponto A , de modo que $\sphericalangle(s, l) < \sphericalangle(r, l) < \pi$.
3. A partir do ponto B trace a reta u , de modo que ela intersecta a reta r no ponto Q e marque ainda, o ponto Y tal que $\{Y\} = u \cap s$.
4. Trace a reta \overleftrightarrow{MY} , e marque o ponto X tal que $\{X\} = \overleftrightarrow{MY} \cap r$.
5. Trace o segmento \overline{BX} , e marque o ponto Z , interseção de \overline{BX} com a reta s .
6. Por fim marque o ponto N na interseção entre as retas \overleftrightarrow{QZ} e l . O ponto N é precisamente, o conjugado harmônico do ponto M , em relação a \overline{AB} e está no interior do segmento \overline{AB} .

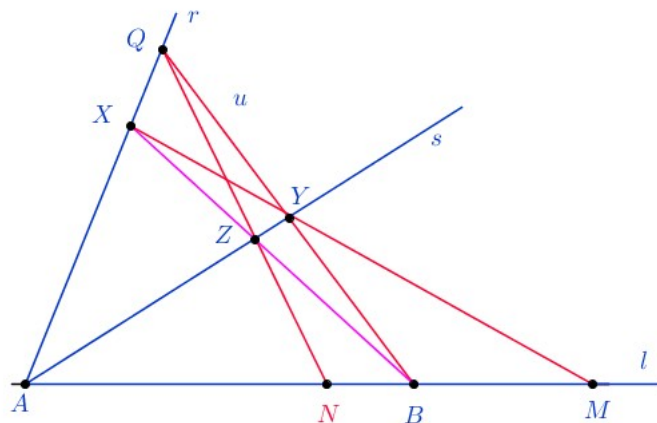


Figura 7.3: Construção do conjugado harmônico: M exterior a \overline{AB}

Observe que a construção geométrica para esta situação é similar à anterior.

Passemos agora a demonstrar que, de fato, a construção dada fornece o conjugado harmônico de M em relação ao segmento \overline{AB} .

Demonstração algébrica da construção do conjugado hamônico

Para tal devemos mostrar que $\frac{AM}{MB} = -\frac{AN}{NB}$

Caso M interior a \overline{AB}

Observe que no caso em que M é interior ao segmento \overline{AB} , eliminando os excessos, temos a seguinte figura ilustrativa.

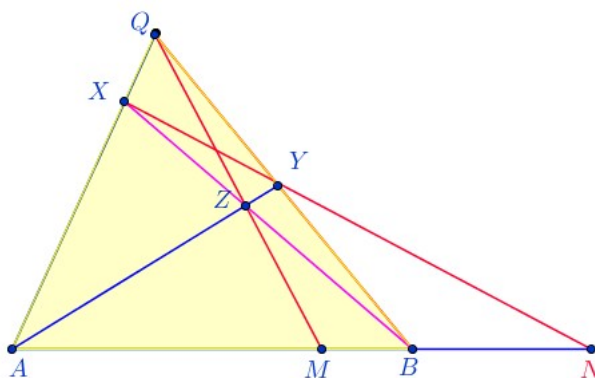


Figura 7.4

Aplicando o teorema de Ceva no triângulo $\triangle QAB$, temos

$$\frac{XQ}{QA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{YB}{YQ} = -1$$

Agora aplicando o teorema de Menelaus ao mesmo triângulo com relação à transversal \overleftrightarrow{XYN} ,

temos

$$\frac{XQ}{XA} \cdot \frac{NA}{NB} \cdot \frac{YB}{YQ} = 1$$

Das igualdades acima, obtemos

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$$

Caso M exterior a \overline{AB}

Neste caso temos a seguinte figura ilustrativa

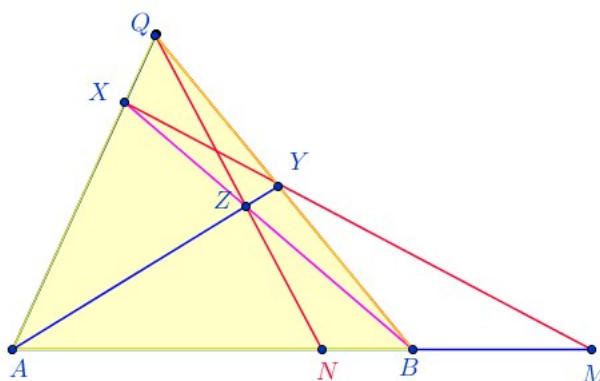


Figura 7.5

Aplicando o teorema de Ceva no triângulo $\triangle QAB$, temos

$$\frac{XQ}{XA} \cdot \frac{NA}{NB} \cdot \frac{YB}{YQ} = -1$$

Agora aplicando o teorema de Menelaus ao mesmo triângulo com relação à transversal \overleftrightarrow{XYM} , temos

$$\frac{XQ}{XA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{YB}{YQ} = 1$$

Das igualdades acima, obtemos

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$$

Observação 7.1 Se o ponto M é o ponto médio do segmento \overline{AB} , então não é possível obter o seu conjugado harmônico. De fato, ao copiar a construção dada quando M é um ponto interior do segmento \overline{AB} , obtemos que a reta \overleftrightarrow{XY} é paralela à reta \overleftrightarrow{AB} , o que justifica o nome de infinito para o conjugado harmônico do ponto médio do segmento \overline{AB} . Ver figura a seguir.

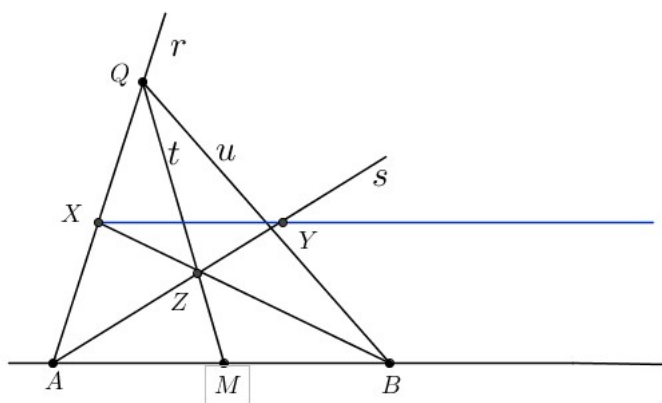


Figura 7.6

7.2 Aplicações do teorema de Menelaus

Para esta seção usamos as referências [7], [13], [19], [27], [30] e [34].

Aplicação 1. O triângulo $\triangle PQR$ da figura abaixo é equilátero e tem 48 cm de perímetro. O segmento \overline{RS} mede 8 cm. M é ponto médio do lado \overline{PQ} , determine o valor do segmento \overline{TR} .

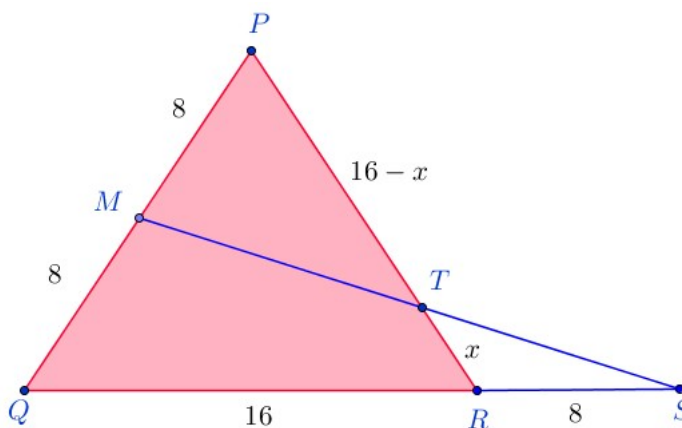


Figura 7.7: Aplicação 01: Menelaus

Solução:

Cada lado do triângulo $\triangle PQR$ mede 16 cm, pois o perímetro é 48 cm e o triângulo é equilátero. Seja $x = RT$, os comprimentos dos segmentos restantes estão listados na figura ilustrativa. Como os pontos M, T e S são colineares, do teorema de Menelaus aplicado ao triângulo $\triangle PQR$, segue

$$\frac{SQ}{SR} \cdot \frac{TR}{TP} \cdot \frac{MP}{MQ} = 1$$

Agora, usando os valores escrito na figura, obtemos

$$\frac{16 + 8}{8} \cdot \frac{x}{16 - x} \cdot \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow 3x = 16 - x \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4.$$

Resposta: O segmento \overline{TR} mede 4 cm.

Aplicação 2. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BFD$ têm o vértice B em comum como indica a figura a seguir. Determine o valor de $x = EF$, sabendo que:

$$AF = 4 \cdot FB, \quad 2 \cdot DC = 3 \cdot BC \quad \text{e} \quad DE = 15.$$

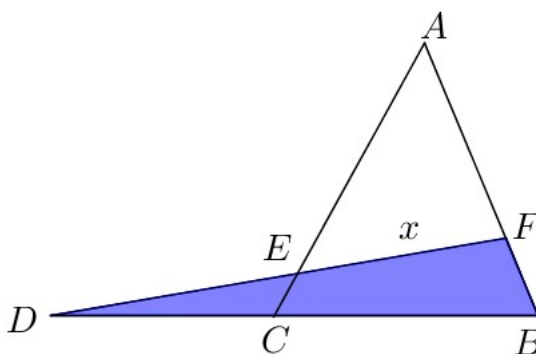


Figura 7.8: Aplicação 02: Menelaus

Solução:

Denote BF por y e considere z tal que $BC = 2z$. Assim, pelas hipóteses, obtemos $AF = 4y$ e $DC = 3z$. A transversal \overleftrightarrow{AEC} intercepta os lados \overline{DB} e \overline{DF} e o prolongamento do lado \overline{FB} do triângulo $\triangle BDF$. Assim, aplicando o teorema de Menelaus nesta situação, temos

$$\frac{AB}{AF} \cdot \frac{EF}{ED} \cdot \frac{CD}{CB} = 1. \text{ Agora, substituindo os valores acima nessa equação, obtemos } \frac{5y}{4y} \cdot \frac{x}{15} \cdot \frac{3z}{2z} = 1.$$

$$\text{Simplificando segue } \frac{5}{4} \cdot \frac{x}{15} \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow x = 8$$

Resposta: $x = 8$.

Aplicação 3. $ABCD$ é um quadrado, N e M são pontos médios dos lados \overline{DC} e \overline{CB} respectivamente, conforme figura abaixo. Determine a fração da área do quadrado $ABCD$ limitada pelo quadrilátero $NCMP$ proveniente da interseção dos segmentos \overline{AM} e \overline{BN} com os lados \overline{CB} e \overline{DC} .

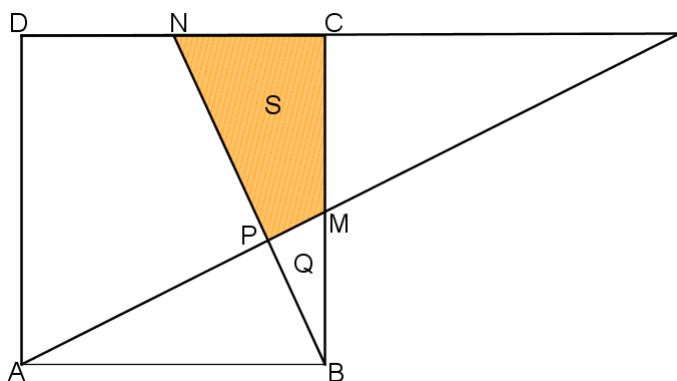


Figura 7.9: Aplicação 03: Menelaus

Solução:

Seja S , a área do quadrilátero procurado e Q a área do $\triangle PBM$. Como N é ponto médio de \overline{DC} , obtemos

$$S + Q = \frac{1}{4} \cdot (\text{área do quadrado } ABCD) = \frac{1}{4} \cdot [ABCD].$$

Prolongando os segmentos \overline{DC} e \overline{AM} até encontrarem-se no ponto L . Representando por x a medida do lado do quadrado $ABCD$. Sendo N e M os pontos médios dos segmentos \overline{DC} e \overline{CB} respectivamente, temos que $NC = CM = \frac{x}{2}$ e os triângulos: $\triangle CML$ e $\triangle MBA$ são congruentes (são triângulos retângulos, hipotenusas de mesmo valor e um ângulo agudo comum), portanto $AB = CL = x$.

Aplicando o teorema de Menelaus no $\triangle NCB$ e o segmento transversal \overleftrightarrow{PML} , obtemos:

$$\frac{LC}{LN} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1,$$

onde substituindo as medidas dos segmentos, obtemos,

$$\frac{x}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{PN}{PB} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1,$$

que nos dá

$$\frac{PN}{PB} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}.$$

Aplicando propriedade das proporções temos:

$$\frac{PB}{PB + PN} = \frac{2}{2 + 3} \Rightarrow \frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}.$$

Note que as alturas H do $\triangle BCN$ e h do $\triangle PMB$ satisfazem $\frac{h}{H} = \frac{PB}{BN}$. Segue que

$$\frac{Q}{1/4[ABCD]} = \frac{S_{PMB}}{S_{BCN}} = \frac{PB}{BN} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Portanto, $Q = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}[ABCD] = \frac{1}{20}[ABCD]$. Como a área do quadrilátero $NCMP$ é a diferença entre as áreas dos triângulos: $\triangle NCB$ e $\triangle PBM$, concluímos que

$$S = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right)[ABCD] = \frac{1}{5}[ABCD]$$

Resposta: A área do quadrilátero $NCMP$, representa $\frac{1}{5}$ da área do quadrado $ABCD$.

Aplicação 4. (OBM). No $\triangle ABC$, D é o ponto médio de \overline{AB} , o ponto E está sobre \overline{BC} , tal que $\overline{BE} = 2\overline{EC}$. Sabendo que o ângulo $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor do ângulo $\angle BAC$:

Solução:

Consideremos as figuras abaixo que ilustram as etapas da resolução.

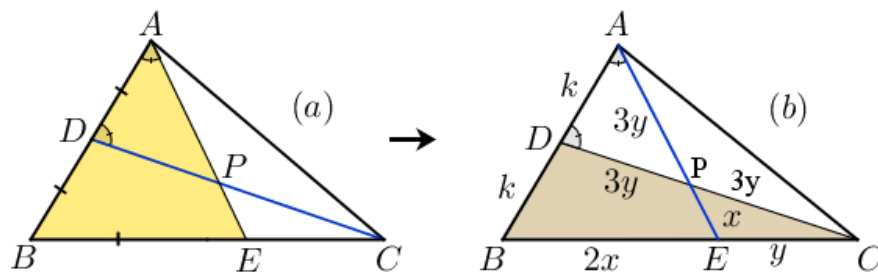


Figura 7.10: Aplicação 04: Menelaus

Como D é ponto médio de \overline{AB} , temos $AD = DB = k$, $EC = x$, $BE = 2 \cdot EC = 2x$, com k , x números reais positivos. Aplicando o teorema de Menelaus:

- No $\triangle ABE$ e a reta transversal \overleftrightarrow{CPD} (parte (a)), temos

$$\frac{CE}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} \cdot \frac{PA}{PE} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3x} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{PA}{PE} = 1 \Rightarrow PA = 3 \cdot PE.$$

Tomando $PE = y \Rightarrow PA = 3y$.

- No $\triangle CBD$ e a reta transversal \overleftrightarrow{APE} (parte (b)), temos:

$$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PD} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2k} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{PC}{PD} = 1 \Rightarrow PC = PD.$$

Do triângulo isósceles $\triangle APD$, se tem $\overline{PD} = 3y$ e $\overline{PC} = \overline{PD} = 3y$. Daí se tem que \overline{AP} é mediana do $\triangle DAC$, a partir do vértice A e é metade da medida do lado \overline{DC} , logo se conclui que o triângulo $\triangle DAC$ é retângulo em A , portanto o ângulo $\angle A$ é reto.

Resposta: O ângulo $\angle A = 90^\circ$.

Aplicação 5. Dado um triângulo $\triangle ABC$ não isósceles, mostre que as bissetrizes internas de dois ângulos quaisquer desse triângulo e a bissetriz externa do terceiro ângulo intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

Solução:

Consideramos o triângulo $\triangle ABC$ não isósceles da figura a seguir, no qual temos desenhado também os segmentos:

- \overline{AQ} bissetriz do ângulo $\angle BAC$, onde o ponto Q está sobre o lado \overline{BC} .
- \overline{CR} bissetriz do ângulo $\angle ACB$ com $R \in \overline{AB}$.
- \overline{BP} bissetriz externa com relação ao ângulo $\angle SBC$ e o ponto P é a interseção das retas suportes dos segmentos \overline{AC} e \overline{RQ} .

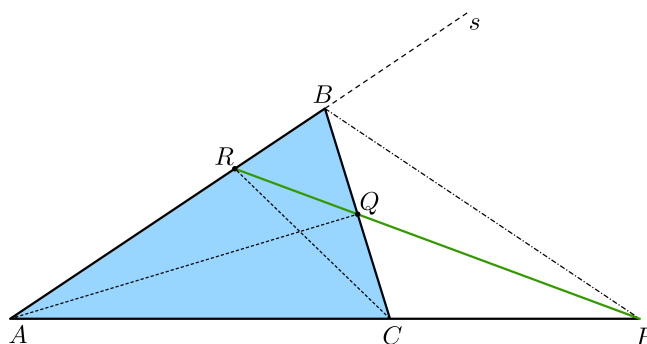


Figura 7.11: Aplicação 05: Menelaus

Pelo teorema de Menelaus, aplicado ao triângulo $\triangle BAC$ com a transversal \overleftrightarrow{RQP} , para mostrar que os pontos P , Q e R são colineares, basta mostrar que

$$\frac{PC}{PA} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{QB}{QC} = 1$$

Note que:

- Aplicando o teorema da bissetriz interna à bissetriz \overline{AQ} do triângulo $\triangle ABC$, temos

$$\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC} \quad (7.1)$$

- Pelo mesmo teorema, agora aplicado à bissetriz \overline{RC} do triângulo $\triangle ABC$, temos:

$$\frac{RA}{RB} = \frac{AC}{BC} \quad (7.2)$$

- Finalmente, aplicando o teorema da bissetriz externa à bissetriz \overline{RP} do triângulo $\triangle ABC$,

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{AB} \quad (7.3)$$

Efetuando as multiplicações membro a membro entre as igualdades (7.1), (7.2) e (7.3), temos:

$$\frac{QB}{QC} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

Portanto, pela recíproca do teorema de Menelaus, os pontos P , Q e R são colineares.

7.3 Aplicações do teorema de Ceva

Para esta seção usamos as referências [7], [13], [19], [17], [34] e [35].

Aplicação 1. Prove que as bissetrizes de um triângulo qualquer $\triangle ABC$ são concorrentes.

Prova:

Considere o triângulo $\triangle ABC$ da figura abaixo e \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são as bissetrizes correspondentes aos ângulos, $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente.

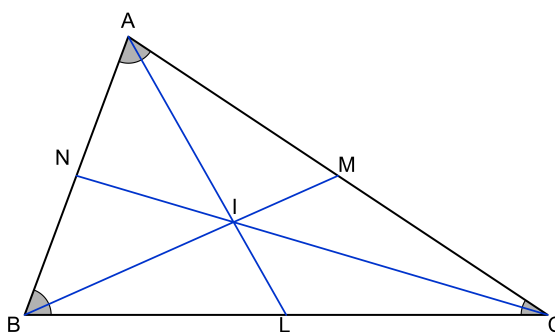


Figura 7.12: Aplicação 01: Ceva

Sabemos pela recíproca do teorema de Ceva que se ocorrer:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1,$$

então as bissetrizes \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} concorrem em um único ponto, que é denominado **incentro**.

Ora, pelo teorema da bissetriz interna aplicada à bissetriz \overline{CN} , temos:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} \quad (7.4)$$

Aplicando o mesmo teorema, à bissetriz interna \overline{AL} , obtemos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{AC}{BC} \quad (7.5)$$

E finalmente a partir da bissetriz \overline{BM} pelo mesmo motivo:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AC}{BC} \quad (7.6)$$

Daí, efetuando as multiplicações membro a membro das relações (7.4), (7.5) e (7.6), obtemos, após simplificação, o resultado desejado, ou seja,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

O que implica que as bissetrizes \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes.

Aplicação 2. Mostre que as medianas de um triângulo concorrem em um ponto denominado **baricentro** e que as alturas de um triângulo também se intersectam em um ponto denominado **ortocentro**.

Prova:

Será provado primeiro, o caso da interseção das medianas. Considerando-se o triângulo $\triangle ABC$ da figura a seguir:

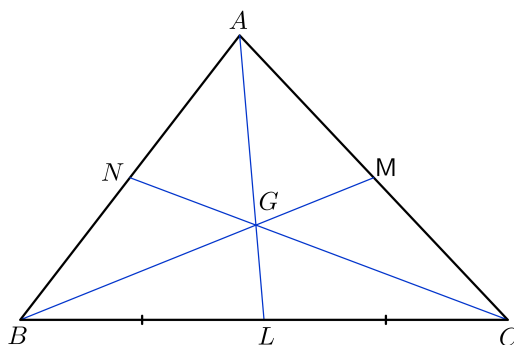


Figura 7.13: Aplicação 02: Ceva - Baricentro

Sejam, \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} as medianas relativas, respectivamente, aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . Logo, como cada mediana divide o lado oposto em segmentos congruentes, temos:

$$\overline{NA} = \overline{NB}, \quad \overline{LB} = \overline{LC} \quad \text{e} \quad \overline{MC} = \overline{MA}.$$

Portanto,

$$\frac{NA}{NB} = 1, \quad \frac{LB}{LC} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{MC}{MA} = 1.$$

Assim, efetuando o produto das igualdades acima,

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Pela recíproca do teorema de Ceva, as medianas \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes.

Provaremos agora o caso das alturas do triângulo $\triangle ABC$, veja a figura abaixo.

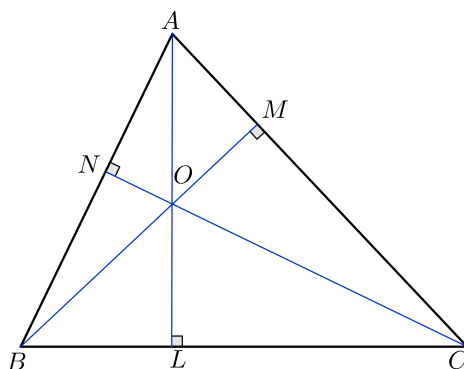


Figura 7.14: Aplicação 02: Ceva - Ortocentro

Usando a definição do cosseno de um ângulo em um triângulo retângulo aplicado aos triângulos $\triangle ABL$, $\triangle ALC$, $\triangle BCM$, $\triangle BMA$, $\triangle BCN$ e $\triangle CAN$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 NA &= AC \cdot \cos \angle NAC = AC \cos \angle BAC & NB &= BC \cdot \cos \angle NBC = BC \cdot \cos \angle ABC \\
 LB &= AB \cdot \cos \angle ABL = AB \cdot \cos \angle ABC & LC &= AC \cdot \cos \angle LCA = AC \cdot \cos \angle BCA \\
 MC &= BC \cdot \cos \angle MCB = BC \cdot \cos \angle ACB & MA &= AB \cdot \cos \angle BAM = AB \cdot \cos \angle BAC
 \end{aligned}$$

Dai, temos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{AC \cdot \cos \angle BAC}{BC \cdot \cos \angle ABC} \cdot \frac{AB \cdot \cos \angle ABC}{AC \cdot \cos \angle BCA} \cdot \frac{BC \cdot \cos \angle BCA}{AB \cdot \cos \angle BAC} = 1$$

Portanto, pela recíproca do teorema de Ceva, as alturas de um triângulo concorrem em um único ponto.

Aplicação 3. No triângulo $\triangle ABC$, da figura a seguir, traça-se uma bissetriz interna \overline{AQ} , Uma mediana \overline{BM} e a ceviana \overline{CP} , as três concorrentes. Se $BP = 4$, $BQ = 6$ e $QC = 9$. Determine o valor de PQ .

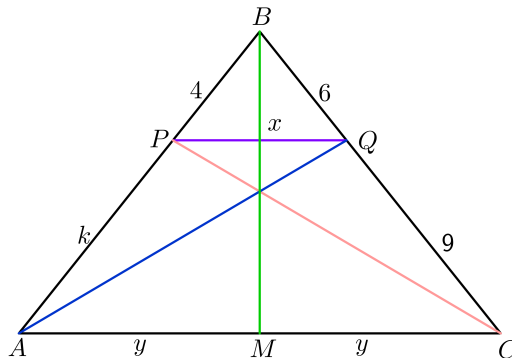


Figura 7.15: Aplicação 03: Ceva

Solução:

Tomamos $PA = k$ e $AM = MC = y$, como indica a figura. Como as cevianas são concorrentes, podemos aplicar o teorema de Ceva. Daí, temos

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{4}{k} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{9}{6} = 1 \Rightarrow 6k = 36 \Rightarrow k = 6$$

Portanto, $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC} = \frac{2}{3}$. Segue do teorema de Tales, que os segmentos \overline{PQ} e \overline{AC} são paralelos. Assim, os ângulos $\angle AQP$ e $\angle QAC$ são alternos internos, portanto são congruentes. Por \overline{AQ} ser bissetriz, os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle PQA$, também são congruentes, logo o triângulo $\triangle PAQ$ é isósceles e daí $x = k = 6$

Resposta: $x = 6$

Aplicação 4. do Teorema de Ceva Sejam L , M e N respectivamente os pontos de contato da circunferência inscrita em um triângulo $\triangle ABC$ com os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . Os segmentos \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} são concorrentes em um ponto que é denominado, *ponto de Gergonne*.

Prova:

Considerando a figura a seguir e como L , M e N são os pontos de tangência podemos escrever,

$$NA = MA = x, \quad NB = LB = y \quad \text{e} \quad MC = LC = z.$$

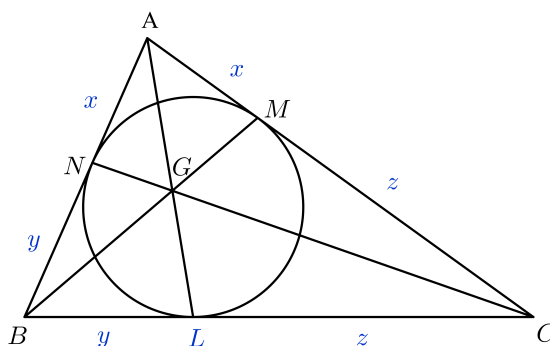


Figura 7.16: Aplicação 04: Ceva - Ponto de Gergonne

A partir dessas igualdades, temos

$$\frac{NA}{NB} = \frac{x}{y}, \quad \frac{LB}{LC} = \frac{y}{z} \quad \text{e} \quad \frac{MA}{MC} = \frac{z}{x}.$$

Multiplicando membro a membro essas igualdades, obtemos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

Logo, pela recíproca do teorema de Ceva, os segmentos \overline{AL} , \overline{BM} e \overline{CN} concorrem em um único ponto, sendo este chamado de *ponto de Gergonne*.

Aplicação 5. do Teorema de Ceva (OBM) Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que cada uma das diagonais \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} dividem o hexágono em duas regiões de mesma área. Prove que \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

Prova:

Consideremos a figura abaixo

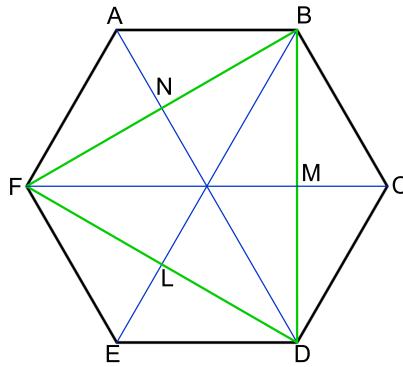


Figura 7.17: Aplicação 05: Ceva

Para que possamos adequar o problema ao uso do teorema de Ceva, vamos considerar, sem perda de generalidade, o triângulo $\triangle FBD$. Denotamos por L , M e N os pontos de interseção das diagonais \overline{BE} , \overline{FC} e \overline{AD} com os lados \overline{FD} , \overline{BD} e \overline{BF} respectivamente, do triângulo $\triangle FBD$.

Tomando a área do hexágono $[ABCDEF] = 2x$, para facilitar os cálculos, uma vez que cada diagonal por hipótese divide a área do hexágono em duas regiões de mesma área.

Aplicando as relações entre as razões de segmentos determinados pelas cevianas \overline{BL} , \overline{DN} e \overline{FM} sobre os lados \overline{FD} , \overline{BD} e \overline{BF} e suas respectivas razões entre áreas, no $\triangle FBD$, podemos escrever, usando propriedade das proporções,

$$\frac{LF}{LD} = \frac{S_{FLE}}{S_{DLE}} = \frac{S_{BFL}}{S_{BDL}} = \frac{S_{FLE} + S_{BFL}}{S_{DLE} + S_{BDL}} = \frac{S_{BFE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{2x}{2} - S_{AFB}}{\frac{2x}{2} - S_{BCD}} = \frac{x - S_{AFB}}{x - S_{BCD}}.$$

De maneira análoga estabelecemos as expressões das outras razões relativas aos lados \overline{BD} e \overline{BF} . Isto é,

$$\frac{MD}{MB} = \frac{x - S_{FED}}{x - S_{AFB}} \quad e \quad \frac{NB}{NF} = \frac{x - S_{BCD}}{x - S_{FED}}.$$

Daí, multiplicando membro a membro estas igualdades e simplificando, obtemos

$$\frac{LF}{LD} \cdot \frac{MD}{MB} \cdot \frac{NB}{NF} = \frac{x - S_{AFB}}{x - S_{BCD}} \cdot \frac{x - S_{FED}}{x - S_{AFB}} \cdot \frac{x - S_{BCD}}{x - S_{FED}} = 1$$

Logo, pela recíproca do teorema de Ceva, os segmentos \overline{BL} , \overline{FM} e \overline{ND} são concorrentes e pela mesma razão, as diagonais \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

7.4 Considerações finais

O objetivo principal desta dissertação foi apresentar os teoremas de Menelaus e Ceva dentro de um contexto acessível aos alunos do ensino médio, e estudiosos da geometria. Tentamos entregar os conceitos e resultados preliminares para que o texto seja autossuficiente e assim, o leitor não precise consultar outros textos para o entendimento e compressão dos resultados aqui expostos. A maioria das definições, lemas, proposições, teoremas e exercícios em geral, foram acompanhadas de figuras ilustrativas para facilitar o entendimento da situação estudada.

Esperamos que nosso trabalho tenha contribuído com o ensino da geometria e estimulado aqueles leitores que procuram conhecimentos na geometria plana e em especial para aqueles interessados em problemas que envolvem os assuntos de colinearidade de pontos e concorrência de retas.

Propomos como forte ingrediente para a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem da matemática e em particular da geometria, a utilização pelos professores, de tópicos relativos à história da matemática como elemento motivador para o ensino, destacando se possível, o desenvolvimento do conteúdo científico e os personagens que deram sua contribuição.

É bastante oportuno que esses enfoques passem também a ideia do lúdico, do lógico e da aplicação prática para a vida do aluno, desmistificando a aridez e a noção errônea de que aprender matemática e, em particular geometria, é para poucos e iluminados. Destacamos também a necessidade de estimular já nas séries finais do ensino fundamental, a prática das demonstrações geométricas, mesmo as mais elementares de tal modo que com a continuidade tornarão os jovens mais confiantes e mais criativos. Com isto, acreditamos, seja possível melhorar a qualidade do ensino da matemática e sobretudo da geometria em nosso país.

Finalmente, conclamamos aos professores de matemática do ensino médio e dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática a transmitir parte dos conteúdos aqui tratados que mais se adequem ao nível de escolaridade de seus alunos, como também os chamamos a acrescentar o teorema de Menelaus e Ceva nos programas das disciplinas de geometria.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, Sérgio, *O centro de massa de um triângulo*, Revista do professor de Matemática. São Paulo, pp. 40-46, (2010).
- [2] ÁVILA, G., G., *Reflexões sobre o ensino da geometria*, Revista do professor de Matemática. 71 pp., (2010).
- [3] ÁVILA, Geraldo; Euclides, *Geometria e Fundamentos*, Revista do Professor de matemática, 45, SBM.
- [4] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 10^a Ed., Rio de Janeiro; SBM, (2006).
- [5] BARBOSA, Régis Prado, *Coordenadas Baricêntricas*, Semana Olímpica, Baricêntricas, Profmat, (2011).
- [6] BERNARDINO, Luis Miguel de Freitas, *Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo*, Universidade do Algarve, Faro Portugal, (2008). Disponível no site: [https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/490/1/L%20Bernardino-Mestrado-Matematica %2006-05-2008.pdf](https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/490/1/L%20Bernardino-Mestrado-Matematica%2006-05-2008.pdf)
- [7] BORTOLOSSI, Humberto José, *Uma Contribuição da Matemática Chinesa: O Método da área para demonstrações Automáticas em Geometria Plana Afim*, II Bienal da SBM, Salvador BA, (2004).
- [8] BOSCO, João, *Capítulo 3 Cálculo vetorial*. Disponível no site: <http://www.mat.ufpb.br/bosco/2011 cvet/vetores.pdf>
- [9] BOULOS, Paulo, DE CAMARGO, Ivan *Geometria Analítica: Um tratamento vetorial*, 3^a Edição, Pearson, São Paulo SP, (2005).

- [10] BOYER, Carl B. *História da matemática*, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, ED. Da Universidade de São Paulo, (1974).
- [11] CAPITÁN, Francisco J. Garcia, *Coordenadas Baricêntricas*. Disponível no site: www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol202garcap/ab.pdf
- [12] CASTRO, Luciano Monteiro de, *Introdução à Geometria Projetiva*, revista Eureka!. Disponível no site: http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka8.pdf
- [13] CASTRO, Luciano Monteiro de, *Os Teoremas de Ceva e Menelaus*, Vídeos das aulas 7 e 8, 25/09/13, Polos Olímpicos de treinamento intensivo. Disponível no site: <https://www.youtube.com/watch?v=cwk80o6-V5I>
- [14] CHAPUT, Frere Ignace, *Elementos de Geometria*. F. Brriguiet §Cia Editores, 15ª edição, Rio de Janeiro RJ, (1957).
- [15] CHARLES, E Baker, *The Theorems of Ceva and Menelaus*, (jun 2014). Disponível no site: <https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/ceva-menelaus.pdf>
- [16] DELGADO, Jorge; Frensel, Katia; Crisaaff, Lhaylla, *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro RJ, (2013).
- [17] FIGUEIREDO, Luiz Henrique, CARVALHO, Paulo César Pinto, *Introdução à Geometria Computacional*, IMPA, Rio de Janeiro RJ, Disponível no site: http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/18CBM/18_CBM_91_06.pdf
- [18] FIGUEIREDO, José Osório de, *Usando Coordenadas Baricêntricas para estudar a Geometria do Triângulo*, Niterói RJ, (2008). Disponível no site: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2008.2/esp/2008-osorio-esp-uff.pdf>
- [19] FREITAS, Vinícius Paulo, *Alguns teoremas clássicos da Geometria Sintética e Aplicações*. Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, (2013). Disponível no site: http://bit.profmat_sbm.org.br/
- [20] GOLDBERG, Nadav, *Spatial Analogues of Ceva's Theorem and its Applications*, Rockville, MD 20852 USA.

- [21] JÚNIOR, José Edmar Bezerra, *Uma introdução ao estudo das Coordenadas Baricêntricas*, Profmat, (2011). Disponível no site: http://bit.profmat_sbm.org.br/
- [22] KAPITANOVAS, Regis, - *Coordenadas Baricêntricas e Aplicações* Dissertação de mestrado - Universidade Federal do ABC, SP 2013. Disponível no site: http://bit.profmat_sbm.org.br/
- [23] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cesar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César, *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 3, SBM, Rio de Janeiro (2006).
- [24] MACEDO, Darilene Maria Ribeiro, *Resgatando Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Plana*, UFC (2014). Disponível no site: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8990/1/2014_dis_dmr Macedo.pdf
- [25] MACIAS, Fernando Valdés e LARA, Hernando Parra, *Geometría Vectorial*, Coleccion Textos Académicos, Editorial UTP, Pereira, Colombia (2014).
- [26] MENDES, M., THIAGO, C., (GRUPO TEOREMA DE MATEMATICA), *Áreas Para Achar Razão de Segmentos* . Rio de Janeiro, SBM, EUREKA! 25, Maio, (2007).
- [27] MORGADO, A. C., WAGNER, E., JORGE, M., *Geometria II*, Vest seller, Fortaleza CE, (2008).
- [28] NETO, Antônio Caminha Muniz , *Geometria*, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 1ª Edição, Rio de Janeiro RJ, (2013).
- [29] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, (2012).
- [30] OLIVEIRA, Marcelo Mendes de, *Teoremas de Ceva e Menelaus*, Semana Olímpica - OBM, Goiânia (Janeiro/2003). Disponível no site: http://www.obm.org.br/opencms/semana_olimpica/VI.html
- [31] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de, *Coleção Elementos da Matemática 2, Geometria plana*, Editora Vest Seller, 3ª edição, Fortaleza CE, (2010).
- [32] PAIVA, Rui Eduardo Brasileiro e ALVES, Francisco Regis Vieira, *Redescobrimo Ceva e Menelaus em dimensão 3*, IFCE. SBM (2014). Disponível no site: http://www.sbhmat.org/wa_files/C71.pdf

- [33] SHINE, Carlos Yuzo. *21 Aulas de Matemática Olímpica*, Coleção Olimpíadas de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, (2009).
- [34] THIAGO, Cícero, *Curso de Geometria, Nível 2, Aula 14, Teorema de Ceva e Teorema Menelaus* Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, (2013). Disponível no site: <http://potiimpa.br/upload/Aula%2014%20-%20Ceva%20e%20Menelaus.pdf>
- [35] THIAGO, Cícero, *Curso de Geometria, Nível 3, Aula 7, Teorema de Ceva* Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, (2013). Disponível no site: <http://potiimpa.br/upload/Aula%2007%20-%20Teorema%20de%20Ceva.pdf>
- [36] THIAGO, Cícero, *Curso de Geometria, Nível 3, Aula 8, Teorema de Menelaus* Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, (2013). Disponível no site: <http://potiimpa.br/upload/Aula%2008%20-%20Teorema%20de%20Menelaus.pdf>
- [37] VENTURI, Jacir J., *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*, 9ª edição, UFPR, Curitiba. Disponível no site: www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf
- [38] WIKIPÉDIA, *A Enciclopédia livre: Menelau de Alexandria*, Disponível no site: https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau_de_Alexandria
- [39] WIKIPÉDIA, *A Enciclopédia livre: Giovanni Ceva*, Disponível no site: https://es.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva
- [40] *As crônicas de Nérdia: O Círculo, a Rotação e os Isogonais* SBM. http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2006/geometria-2005.pdf