É Matemática, OXENTE!

O Jornal de Matemática Olímpica

Número 27, volume 1, julho de 2023

ISSN 2526-8651

Editorial

Caros Leitores,

Com prazer estamos lhes apresentando a segunda edição do É Matemática, OXENTE! no ano de 2023. Entre uma edição e outra sempre vem à tona várias ideias e novidades, gerando um diálogo muito rico no âmbito da equipe de redação.

Nesse período apresentamos à Universidade Federal Rural de Pernambuco a renovação do projeto do Jornal, considerando sua crescente aceitação por um público alvo cada vez maior. Além disso, o conteúdo veiculado tem servido de base de consulta em algumas disciplinas do nosso curso de Licenciatura em Matemática.

Esta 27ª edição traz na seção artigo um trabalho intitulado Progressão Aritmética e Triângulo Aritmético de Números Ímpares, de autoria do discente Pedro Henrique Sales Vital (USP-IME) e dos professores Thiago Yukio Tanaka (UFRPE) e Gabriel Araújo Guedes (UFRPE). O texto nos insere no âmbito da Teoria dos Números, um campo que desde a Escola Pitagórica atrai a atenção de quem se interessa pela Matemática.

A seção curiosidade, traz a contribuição do professor Hiller Alves Fernandes (SEE-MG) e aborda o que Sheldon Cooper - personagem fictício do seriado norte americano The Big Bang Theory - considerava "o melhor número". Sabemos que essa denominação é muito vaga pois não existem números melhores ou piores, entretanto, pelo fato dele apresentar algumas características curiosas recebeu do Sheldon esse "apelido".

A indicação de filme chega com Alexandria, cujo enredo aborda a vida de Hipátia, talvez a primeira matemática que a história registra, e já naquela época, vítima da violência de gênero.

A seção Quem pergunta, quer saber! apresenta uma equação cuja solução envolve álgebra e trigonometria, quebrando um modo muito comum e equivocado de ver a matemática, formada por compartimentos separados.

Finalizamos a edição, como de costume, com as Soluções da OPEMAT 2021 nível 2, os informes sobre eventos e as nossas tradicionais questões propostas e resolvidas, fruto da contribuição dos nossos leitores.

Como desdobramento da elaboração do jornal, em alusão ao Dia Internacional da Mulher na Matemática, foi realizada no dia 9 de maio uma live intitulada "Sobre a participação feminina na matemática: uma conversa sobre textos publicados no Jornal É Matemática, Oxente!". O evento contou com a participação das professoras do Departamento de Matemática da UFRPE, Lorena Freitas, Maité Kulesza e Michele Novais.

Um agradecimento especial a todos e todas que colaboraram com essa edição e desejamos que aproveitem ao máximo a leitura.

A Redação.

Sumário

1. Artigo

Progressão Aritmética e Triângulo Aritmético de Números Ímpares

Pedro Henrique Sales Vital
USP - IME
Campus São Paulo
(05508-090) - São Paulo - SP - Brasil

Thiago Yukio Tanaka & Gabriel Araújo Guedes
UFRPE - CEGEN - Departamento de Matemática
52171-900 - Recife - PE - Brasil

Introdução

As olimpíadas de matemática prezam pelo desenvolvimento da maturidade matemática de estudantes, seja no aprofundamento da teoria ou na aquisição de técnicas de resoluções não triviais para os problemas olímpicos e assim, o(a)s encoraja a se desafiar, procurar novas soluções e compartilhar ideias que complementem seus estudos. Neste meio, as *Sequências Numéricas* aparecem de forma abundante. Por exemplo, a *Sequência de Fibonacci*, as *Sequências Recorrentes* e as *Progressões Aritméticas* são o foco de diversos problemas olímpicos.

Em particular, este artigo se propõe a explorar o tema das *Progressões Aritméticas (PAs)* a partir de materiais retirados de olimpíadas, sites e livros de treinamento olímpicos tanto nacionais quanto internacionais, com o intuito de servir como uma fonte de estudo e pesquisa para discentes ou docentes que estão diretamente ligados com treinamento olímpico. Faremos também um aprofundamento em uma questão proposta no vestibular do IME 96/97 que foi reformulada em diferentes contextos em diversos outros vestibulares, aparecendo, inclusive, no contexto das olimpíadas de matemática. Esta questão trata de uma estrutura de números ímpares dispostos em formato triangular semelhante ao triângulo de Pascal e a partir desta trabalharemos diversos conceitos de PAs de primeira e segunda ordem de uma forma extremamente interessante.

Progressões Aritméticas

As *Progressões Aritméticas* no contexto olímpico constituem um forte pilar de grande parte das questões envolvendo sequências numéricas. Quando os problemas envolvem uma abordagem direta deste conteúdo, a preocupação geralmente é direcionada para algum aspecto como o termo geral, soma dos primeiros termos, interpolação de termos, entre outros. Por outro lado, sua aparição pode ser indireta, por meio de questões que envolvam outros conteúdos não se limitando apenas na área de Álgebra. Apresentaremos nesta seção elementos importantes desta teoria destacando sua utilização em exemplos extraídos de materiais de treinamento olímpico.

Definição 1.1 (Sequência)**.** Uma *sequência infinita* de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real a_n chamado de *n-ésimo termo* da sequência.

Escreve-se $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é a_n.

Por outro lado, uma *sequência finita* de números reais é uma função $a : [n] \to \mathbb{R}$, onde $[n] = \{x \in \mathbb{N}; x \leq n\}$. Assim, a associa os n primeiros naturais a um número real.

Escrevemos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ou $(a_i)_{i=1}^{n}$ para indicar uma sequência finita com n termos.

A partir da Definição 1.1 vamos apresentar progressão aritmética do jeito tradicional.

Definição 1.2 (Progressão Aritmética)**.** Uma *Progressão Aritmética (PA)* é uma sequência (seja ela finita ou infinita) em que a diferença de um termo com o seu antecessor é constante. Essa diferença constante é chamada de *Razão da PA*, comumente representada por r.

A Definição 1.2 nos permite resolver as questões mais diretas de vestibulares e nos dá a maturidade matemática necessária para explorar as questões de olimpíadas. Tente resolver a questão abaixo, proposta no vestibular de 2015 do IFPE que foi adaptada como exercício introdutório do material do Portal da OBMEP.

Exemplo 1.1 (IFPE, 2015, [12])**.** Na progressão aritmética $(\ldots, 3, 15, 27, 39, 51, \ldots)$, sabe-se que $a_{36} = 231$. Observando a posição do termo $a_y = 27$, qual o valor de y?

Solução: Como a sequência dada é uma PA, a diferença entre dois termos consecutivos é, por definição, constante. Com a informação dada, conclui-se que a razão $r = 15 - 3 = 12$. Como $a_{36} - a_{35} = r = 12$, então $a_{35} = 231 - 12$. Analogamente, $a_{34} = 231 - 2 \cdot 12$. Seguindo esse raciocínio, queremos descobrir quantas vezes devemos subtrair 12 de 231 para chegar em 27.

$$231 - 12x = 27 \Rightarrow 12x = 204 \Rightarrow x = 17.$$

Logo, $a_y = 231 - 17 \cdot 12$. Portanto, y é o elemento que aparece 17 posições antes da 36ª.

$$y = 36 - 17 = 19.$$

Conclui-se que, na sequência dada, para que $a_{36} = 231$, $a_{19} = 27$. Assim, o número procurado é 19.

No Exemplo 1.1, vimos um exemplo numérico de uma sequência infinita. Nem sempre este é o caso. Tente resolver o exercício abaixo para praticar a definição.

Problema 1.1 (POTI, Álgebra, Nível 2, Aula 4, [8])**.** Os quatro primeiros termos de uma PA são a, x, b e $2x$. Determine o valor da razão $\frac{a}{b}$.

Solução: Sabemos que $(a, x, b, 2x, \ldots)$ é uma PA. Assim, pela definição, $2x - b = b - x$. Portanto, $3x = 2b \Rightarrow x = \frac{2}{3}b$. Analogamente, $x - a = b - x$, de onde podemos deduzir que $2x = a + b \Rightarrow x = \frac{1}{2}(a + b)$. Juntando as duas informações, temos que $\frac{2}{3}b = \frac{1}{2}(a + b) \Rightarrow 4b = 3a + 3b \Rightarrow b = 3a$. Logo, $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

É preciso se apropriar da definição de PA e treinar a intuição com exemplos simples a fim de desenvolver a maturidade matemática necessária para abordar questões de olimpíadas. O Problema 1.1 nos ajuda a entender como trabalhar com PAs nessas situações. Com o que praticamos até aqui, tente resolver e acompanhe a solução da questão abaixo, proposta no material da *University College Dublin (UCD)*, que não usa nada além da definição de PA e uma ideia inteligente.

Problema 1.2 (Treinamento *UCD*, [1])**.** Sejam x, y e z reais tais que x^2, y^2 e z^2 formam uma progressão aritmética, mostre que os números $\dfrac{1}{y+z}$, $\dfrac{1}{z+x}$ e $\dfrac{1}{x+y}$ também formam uma progressão aritmética.

Solução: Queremos mostrar que $\dfrac{1}{y+z}$, $\dfrac{1}{z+x}$ e $\dfrac{1}{x+y}$ formam uma PA. Se de fato o forem, então a diferença entre o segundo e o primeiro deve ser igual a diferença entre o terceiro e o segundo. Assim, considere a diferença

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+x} - \frac{1}{y+z} &= \frac{(y+z) - (z+x)}{(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{y-x}{(y+z)(z+x)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Da mesma forma, concluímos que

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{z+x} \quad = \quad \frac{z-y}{(x+y)(z+x)}. \qquad (2)$$

A fim de mostrar que (1) é de fato igual a (2), precisamos usar a nossa hipótese de que x^2, y^2 e z^2 formam uma PA. Ou seja, existe uma razão r tal que $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = r$. Para fazer que esses números apareçam nas equações acima, podemos utilizar o produto notável $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Note,

$$\begin{aligned}\frac{y-x}{(y+z)(z+x)} &= \frac{y-x}{(y+z)(z+x)}\cdot\frac{y+x}{y+x}\\ &= \frac{y^2-x^2}{(y+z)(z+x)(y+x)}\\ &= \frac{r}{(y+z)(z+x)(y+x)}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{z-y}{(x+y)(z+x)} = \frac{r}{(x+y)(z+x)(z+y)}.$$

Como as diferenças são iguais, podemos afirmar que $\frac{1}{y+z}$, $\frac{1}{z+x}$ e $\frac{1}{x+y}$ formam uma PA de razão

$$\frac{r}{(y+x)(z+x)(z+x)}.$$

A partir da Definição 1.2, podemos criar ferramentas que nos auxiliam a entender o funcionamento das sequências. Uma ferramenta fundamental para problemas de PAs é a chamada *Lei de Formação*: a descrição de um termo qualquer da sequência a partir da sua posição. Dado o primeiro termo da sequência e a razão da PA, qual o quinto elemento dela? Qual o centésimo elemento? Qual o valor do termo que ocupa a posição 2^9? Utilizando o *Princípio de Indução Finita (PIF)* é possível mostrar que essas duas informações são suficientes para descobrir qualquer termo de uma PA.

Proposição 1.1 (Lei de Formação). *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de razão r, o n-ésimo termo a_n é descrito por uma lei de formação:*

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Demonstração: Usaremos o PIF. Tome como base de indução o caso $n = 2$. Note que, de fato,

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + (2-1)r\\ &= a_1 + (a_2 - a_1)\\ &= a_2.\end{aligned}$$

Suponha verdadeira a relação

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Está será nossa hipótese de indução. Façamos o passo de indução para mostrar que a relação vale para $n+1$ e, consequentemente, para todo $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)r\\ &= a_1 + (n-1)(a_{n+1} - a_n)\\ &= a_1 + n(a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} + a_n.\end{aligned}$$

Subtraindo a_n dos dois lados da equação e somando a_{n+1} dos dois lados, temos que

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_1 + n(a_{n+1} - a_n)\\ &= a_1 + nr.\end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF, vale a Proposição 1.1.

É importante fixar a ideia com exemplos simples, pois este resultado é extremamente útil para entender o comportamento da PA. Observe o exemplo abaixo e experimente refazê-lo com outras sequências.

Exemplo 1.2. Considere a PA $(1, -1, -3, -5, \ldots)$. Encontre a razão da PA e escreva a lei de formação dela. Qual o valor do termo que ocupa a posição 2^9?

Solução: Pegue quaisquer dois termos consecutivos para encontrar a razão. Para essa sequência, $r = (-1) - 1 = -2$. Assim escrevemos a lei de formação $a_n = 1 + (n-1)(-2) = 3 - 2n$. Logo, $a_{512} = 3 - 2\cdot 2^9 = -1021$.

Além disso, a soma dos elementos de uma PA é uma outra ferramenta poderosa que se mostra presente em uma grande parcela das questões que envolvem essas sequências. Como Gauss supostamente percebeu quando criança [18], somas de PAs nos levam a abordagens engenhosas que podem simplificar bastante uma solução.

Proposição 1.2 (Soma dos Termos de uma PA)**.** *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de razão r, a soma dos seus n primeiros termos é $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.*

Demonstração: Seja S o valor da soma dos n primeiros termos de (a_n),

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Como a quantidade de termos somados é finita, podemos reorganizar o somatório. Então, invertendo a ordem da soma, também temos

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}.$$

Juntando essas duas informações,

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{n+1-i}). \end{aligned}$$

Usando o resultado da Proposição 1.1 temos que

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{n+1-i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ([a_1+(i-1)r] \\ &\qquad +[a_1+(n+1-i-1)r]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} (a_1+a_1+(i-1+n+1-i-1)r) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_1+a_1+(n-1)r) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_1+a_n) = n(a_1+a_n), \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

Vale ressaltar que o método usado na demonstração acima é chamado de Pareamento de Gauss. Ele consiste em somar os elementos da sequência na ordem contrária. Dessa forma, somamos o primeiro com o último, o segundo com o penúltimo e assim por diante, obtendo, portanto, o dobro do valor da soma original. Dividindo essa soma por dois obtemos o resultado esperado. Utilize a Proposição 1.2 para resolver o problema que a professora de Gauss supostamente passou para a turma.

Exemplo 1.3. Reza a lenda que a professora de Gauss, a fim de ocupar os seus alunos, pediu para que eles somassem todos os números de 1 a 100. O que a surpreendeu foi a rapidez com que o jovem Gauss achou o resultado. Qual foi o número encontrado pelo menino prodígio?

Dica Aplicar a Proposição 1.2. Você deve encontrar 5050 como resposta.

A princípio, essas duas ferramentas nos dão o necessário para abordar uma grande parte dos problemas que envolvem progressões aritméticas. Veja a aplicação das proposições em uma questão do material do POTI.

Problema 1.3 (POTI, Álgebra, Nível 2, Aula 4, [8])**.** A sequência 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2,1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, ... consiste de 1s separados por blocos de 2s, com n 2s no n-ésimo bloco. Determine a soma dos 1234 primeiros termos dessa sequência.

Solução: Note que o primeiro 1 da sequência ocupa a posição 1 da sequência. O segundo 1, por sua vez, aparece 2 posições depois e o terceiro 1 aparece 3 posições depois do segundo 1. De forma geral, a distância vai aumentando de 1 em 1. Para saber a posição do n-ésimo 1, basta somar essas distâncias. Isto é equivalente a achar a soma dos n primeiros termos da PA $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, pela Proposição 1.2,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}(1+n).$$

Considere os primeiros 1234 elementos da sequência dada. O último 1 que aparece deve ser tal que $S_n < 1234$. Perceba,

$$\frac{49 \cdot 50}{2} < 1234 < \frac{50 \cdot 51}{2}.$$

Assim, existem 49 números 1s nos primeiros 1234 termos da sequência. Como a sequência era composta apenas por 1s e por 2s, existem $1234 - 49 = 1185$ números 2s. Portanto, a soma dos 1234 primeiros termos da sequência é $49 + 2 \cdot 1185 = 2419$.

No problema acima, perceba que a posição dos 1s forma a sequência $(1, 3, 6, 10, \dots)$, que não é uma PA. No entanto, a diferença entre seus termos consecutivos forma a sequência $(2, 3, 4, \dots)$ que é uma PA. De que forma poderíamos trabalhar com a primeira sequência para obter o resultado desejado? Qual a sua relação com a PA? Para nos aprofundarmos no assunto precisamos dar forma a essas estruturas que possuem uma relação intrínseca com PAs. A fim de generalizar a nossa definição tradicional e atiçar novas abordagens para resolução de problemas, definiremos:

Definição 1.3 (Operador Diferença)**.** O *Operador Diferença* é a função $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, onde n é o índice do elemento da sequência no qual o operador é aplicado. Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chamamos Δa_n de *primeira diferença* de a_n. De forma análoga, a *segunda diferença* de a_n é $\Delta(\Delta a_n) = \Delta^2 a_n$. Recursivamente, definimos a *k-ésima diferença* de a_n como $\Delta^k a_n$.

Definição 1.4 (Sequência de Operadores)**.** Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vamos definir a *k-ésima sequência de operadores de a_n* como a sequência $\left(\Delta^k a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, de forma que cada elemento da sequência seja o resultado da aplicação do operador diferença k vezes ao n-ésimo elemento de a_n.

Definição 1.5 (Ordem de uma PA)**.** Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será uma PA de ordem k se a k-ésima sequência de operadores de a_n for constante. Caso não seja especificada a ordem de uma PA, assume-se que ela é de primeira ordem.

Perceba que essa definição expande a definição tradicional de PA e abre margem para as sequências mais robustas que constituem as PAs de ordem superior. Sob essa nova perspectiva, tente resolver o seguinte problema.

Problema 1.4. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $a_n = n^2$ e S_n denota a soma dos n primeiros termos dessa sequência, prove que $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$. Mostre que a sequência (a_n) é de ordem 2.

Solução: Usaremos o PIF. Tome como base de indução o caso $n = 1$. Note que, de fato,

$$\frac{1}{6}(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1 = 1^2 = a_1 = S_1.$$

Vamos supor que a equação

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1), \tag{3}$$

vale para n. Está será a nossa hipótese de indução. Façamos o passo de indução para mostrar que, sob a hipótese, a equação também vale para $n+1$ e, consequentemente, para todo $n \geq 1$.

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+1} + S_n.$$

Como $a_{n+1} = (n+1)^2$ e, pela hipótese de indução, vale (3), então

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= (n+1)^2 + \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{n+1}{6}[6(n+1) + n(2n+1)] \\
&= \frac{n+1}{6}[6n + 6 + 2n^2 + n)] \\
&= \frac{n+1}{6}[2n(n+2) + 3(n+2)] \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{n+1}{6}[(n+1)+1][2(n+1)+1].
\end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF, vale (3). Para mostrar que a (a_n) é PA de segunda ordem basta calcular

$(\Delta a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}\Delta a_n &= a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2\\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1.\end{aligned}$$

Note que (Δa_n) vai ser a PA dos ímpares a partir do 3. É fácil verificar que $(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,\dots)$. Portanto, pela definição de ordem de uma PA, (a_n) é uma PA de ordem 2.

Observação 1.1. Para encontrar a expressão sem usar indução veja a p.45, Exemplo 16 de [7]. A demonstração do livro é o primeiro passo para chegar no Teorema 1.4 que enunciaremos logo mais.

Nos últimos dois problemas vimos PAs de segunda ordem que surgem da soma dos elementos de uma PA. No Problema 1.3 a distância entre os 1s cresce de 1 em 1, assim como no caso dos quadrados perfeitos, onde a diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos forma a sequência $(3,5,7,\dots)$. Nesses dois casos, o número total de elementos, dado pela soma dos elementos de uma PA, forma uma PA de segunda ordem. Observe a proposição abaixo que generaliza o resultado e nos permite chegar em PAs de ordem maiores.

Proposição 1.3 (Sequência das Somas Parciais)**.** *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que*

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

então (b_n) é uma PA de ordem $k+1$.

Demonstração. Temos que, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\\ &= a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\\ &= a_{n+1}.\end{aligned}$$

Portanto, $(\Delta b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)$. Como (a_n) é uma PA de ordem k, sabemos que será necessário aplicar o operador diferença mais k vezes para chegar em uma sequência constante. Dessa forma, (b_n) é uma PA de ordem $k+1$. □

Exemplo 1.4. No Problema 1.4, é possível observar uma PA de terceira ordem surgir a partir da sequência de quadrados perfeitos. Nas condições do problema mencionado, verifique que a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 3.

O resultado apresentado já nos permite analisar com mais propriedade as PAs de segunda ordem. Como fizemos no começo deste artigo, queremos criar ferramentas e métodos para estudar essas sequências. Use o que foi mostrado para resolver o problema abaixo.

Problema 1.5 (*Les Forums de la Science*, [4])**.** Encontre o máximo divisor comum entre

$$1+2+3+\cdots+2016$$

e

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+2016^2.$$

Solução: Sabemos pela Proposição 1.2 que a soma dos termos da PA $(1,2,3,\dots,2016)$ é $1008\cdot 2017$. Ademais, pelo que foi mostrado no Problema 1.4, a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Para $n = 2016$, a soma dos termos é $336\cdot 2017\cdot 4033$. Assim, o máximo divisor comum entre os dois números dados é $336\cdot 2017 = 677712$.

Precisamos refinar nossas ferramentas para abordar os problemas com PAs de ordem superior. Como veremos, o teorema abaixo é um resultado extremamente forte que nos permitirá simplificar bastante o raciocínio.

Teorema 1.4 (Termo Geral de PA de Ordem k)**.** *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem k, então seu termo geral a_n é um polinômio de grau k na variável n.*

Demonstração: Ver p.47, Corolário 3.8 de [7].

Proposição 1.5. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2, chamaremos $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $r = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nessas condições,*

$$a_n = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}r.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.4, o termo geral pode ser escrito como um polinômio do segundo grau, $a_n = an^2 + bn + c$, de onde obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a + b + c = a_1, \\ 4a + 2b + c = a_2, \\ 9a + 3b + c = a_3. \end{cases}$$

Note que, por definição, $a_2 - a_1 = b_1$ e $a_3 - a_2 = b_2$. Logo, subtraindo a primeira linha da segunda e a segunda da terceira, chegamos no sistema

$$\begin{cases} 3a + b = b_1, \\ 5a + b = b_2. \end{cases}$$

Por outro lado, $b_2 = b_1 + r$, pois (b_n) é uma PA. Assim, $b_2 - b_1 = r = 2a$. Portanto, $a = \frac{1}{2}r$. Substituindo esse resultado na primeira equação, obtemos $b = b_1 - \frac{3}{2}r$. Analogamente, $c = a_1 - b_1 + r$. Desta forma,

$$\begin{aligned} a_n &= an^2 + bn + c \\ &= \left(\frac{1}{2}r\right)n^2 + \left(b_1 - \frac{3}{2}r\right)n \\ &\quad + (a_1 - b_1 + r) \\ &= \frac{1}{2}rn^2 + b_1 n - \frac{3}{2}rn + a_1 - b_1 + r \\ &= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{1}{2}r(n^2 - 3n + 2) \\ &= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r \\ &= \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}r. \end{aligned}$$

□

Observe a aplicação da proposição acima em uma questão da Competição Estadunidense de Matemática. Note que ela poderia ter sido resolvida da mesma forma que as questões 1.3 e 1.4. Compare os métodos e pondere sobre as vantagens e desvantagens de cada um.

Problema 1.6 (*American Mathematics Competition (AMC)*, 2000, 10, Problema 12 [2]). Considere as figuras abaixo com 1, 5, 13 e 25 quadradinhos unitários não sobrepostos. Qual a fórmula f_n do total de quadradinhos unitários em cada figura?

Figura 1.1: Imagem do Problema 1.6. Fonte: Art of Problem Solving [2].

Solução: Temos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 5, 13, 25, \dots)$. Perceba que $(\Delta f_n) = (4, 8, 12, \dots)$ é uma PA. De fato, uma figura é obtida da anterior através do acréscimo de quadradinhos aos lados. Observe que a dimensão de uma lateral nova é uma unidade maior que a anterior. Daí, a sequência (f_n) é uma P.A. de segunda ordem. Usando a Proposição 1.5, podemos encontrar uma expressão para o termo geral. Note, nas condições estabelecidas na Proposição 1.5, $b_1 = r = 4$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} f_n &= \binom{n-1}{0}f_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}r \\ &= 1 + 4(n-1) + 4\frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= 1 + 4(n-1)\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) \\ &= 1 + 4(n-1)\frac{n}{2} \\ &= 1 + 2n(n-1). \end{aligned}$$

Achamos, portanto, uma fórmula para f_n.

Problemas Resolvidos

Problema 1.7 (OPEMAT, 2016, 2ª Fase, Nível 3, Problema 7, [11]). Solução disponível no Jornal "É Matemática, Oxente!", Número 3, p.5, [6].

Problema 1.8 (EsPCEx, 2019, [13]). Sabe-se que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ estão em progressão aritmética. Encontre o valor de $\frac{k}{2}$.

Solução: Usaremos a relação de Girard para equações do terceiro grau. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, então $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = 3$ no nosso caso. Como as raízes formam uma PA, então $x_3 - x_2 = r$ e $x_2 - x_1 = r$, logo $x_1 = x_2 - r$ e $x_3 = x_2 + r$. Substituindo esses resultados na relação de Girard, temos que $x_2 = 1$. Assim, sabemos que a equação vale para $x = 1$. Usando essa informação, podemos encontrar o valor de k.

$$P(1) = 1 - 3 - 6 + k = 0 \Leftrightarrow k = 8.$$

Logo, o valor procurado, $\frac{k}{2}$, é igual a 4.

Problema 1.9 (*IMO*, 2019, 60ª Edição, Problema 1, [5])**.** Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a e b, $f(2a)+2f(b) = f(f(a+b))$.

Solução: Considere uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que para quaisquer inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Então, tomando $a = 0$, sabemos que vale

$$f(0) + 2f(b) = f(f(b)). \tag{4}$$

Pelo mesmo argumento, se tomarmos $a = 1$,

$$f(2) + 2f(b) = f(f(1 + b)).$$

Se chamarmos $b' = 1 + b$, temos pela equação (4) que

$$\begin{aligned} f(f(b')) &= f(0) + 2f(b') \\ &= f(0) + 2f(1 + b). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(2) + 2f(b) &= f(0) + 2f(1 + b). \\ \therefore f(b + 1) - f(b) &= \frac{f(2) - f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{2}(f(2) - f(0))$ é uma constante, que denotaremos por r. Suponha sem perda de generalidade que $r \geq 0$. Podemos construir duas sequências: dado um $c \in \mathbb{Z}$ definimos,

$$(f(c), f(c + 1), f(c + 2), \dots)$$
$$\text{e}$$
$$(f(c), f(c - 1), f(c - 2), \dots).$$

Com certeza, em uma delas $r \geq 0$. Assim, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos escolher um c tal que $f(2a)$ e $f(b)$ pertençam a uma PA de razão positiva r cujo termo inicial é $f(c)$. Pela Proposição 1.1, existe uma lei de formação que descreve $f(2a)$ e $f(b)$ a partir desses parâmetros. Seja $k = f(c)$, então

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= k + 2ar + 2(k + br) \\ &= 3k + 2r(a + b). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(f(a + b)) &= f(k + (a + b)r) \\ &= k + (k + (a + b)r)r \\ &= (a + b)r^2 + (r + 1)k. \end{aligned}$$

Juntando essas duas informações, temos que $3k+2r(a+b) = (a+b)r^2+(r+1)k$. Como a igualdade tem que valer para qualquer valor de $a + b$, podemos montar o sistema

$$\begin{cases} 2r = r^2, \\ 3k = (r + 1)k, \end{cases}$$

que nos dá duas soluções, uma quando $r, k = 0$ e outra quando $r = 2$ e k é um inteiro qualquer. Portanto, as funções que obedecem à condição são a função nula $f(x) = 0$ e aquelas da forma $f(x) = 2x + k$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

O Triângulo Aritmético de Números Ímpares

Como dito na introdução, utilizaremos os conceitos desenvolvidos na seção anterior para solucionar diversas questões envolvendo a estrutura de números ímpares organizados em formato de triângulo.

Até onde podemos comprovar, nacionalmente, este problema foi primeiramente proposto no vestibular de 96/97 do Instituto Militar de Engenharia [14]. Depois de mais de uma década, o problema foi resgatado por outros vestibulares, aparecendo em 2007 na prova da Mackenzie [16] e em 2013 na da

EsPCEx [13]. Sob essa redescoberta, as propriedades interessantes dessa estrutura ganharam força no contexto olímpico sendo compilada em 2012 no material do POTI [8], aparecendo na primeira fase da OBMEP de 2013 [10] e apresentada como problema proposto na revista oxente no artigo intitulado *Recorrências Lineares* [19].

Vamos então apresentar o problema que pode ter variações no texto inicial, mas são todos análogos.

Problema 1.10. Observe a disposição, abaixo, da sequência dos números naturais ímpares.

E de acordo com o material, é pedido algo conforme abaixo:

Mackenzie 2007: O quarto termo da vigésima linha é:

(a) 395 **(c)** 387 **(e)** 399

(b) 371 **(d)** 401

OBM 2013: Em qual linha aparecerá o 2013?

IME 96/97: Encontre uma função de n, nesta linha (n-ésima linha), a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

POTI Álgebra Nível 2: Determine o quarto termo da vigésima linha.

EsPCEx 2013-2014: O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

Artigo Oxente "Recorrências Lineares":

(a) O primeiro termo da décima linha.

(b) A fórmula de recorrência para o primeiro termo da linha que está na posição $n+1$.

Encoraja-se a resolução dos problemas acima, pois estes serão deixados como Problemas Propostos ao final deste artigo.

Vamos nos apropriar da estrutura proposta na questão para explorar sequências e progressões aritméticas de primeira e segunda ordem.

Problema 1.11. Encontre:

1. a expressão para o primeiro termo de cada linha.
2. a soma dos termos de uma n-ésima linha.
3. a média aritmética dos termos da n-ésima linha.

Solução: Vamos resolver o item 1. Olhando pela sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada pelos elementos na primeira coluna do triângulo, temos que $(c_n) = (1, 3, 7, 13, 21, \dots)$. Note que $(\Delta c_n) = (2, 4, 6, 8, \dots)$ é uma PA. De fato, como cada linha tem um termo a mais que a anterior, a diferença entre dois termos consecutivos da primeira coluna cresce de forma constante. Assim, (c_n) é, por construção, uma PA de segunda ordem. Logo, pela Proposição 1.5, sabemos que

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + (n-1)2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)2 \\ &= 1 + (n-1)(2+n-2) \\ &= 1 + n(n-1). \end{aligned}$$

Agora, vamos resolver o item 2. Perceba que cada linha forma uma PA de razão 2 com n termos. Seja $(a_i)_{i=1}^n$ esta PA, podemos usar a Proposição 1.2 para afirmar que a soma dos termos, S_n, é tal que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)2) \\ &= n(a_1 + n - 1). \end{aligned}$$

Portanto, basta saber o primeiro termo da n-ésima linha para calcular a soma. Do item anterior, temos que o primeiro termo de cada linha é $1 + n(n-1)$, logo

$$S_n = n(n(n-1) + n) = n^3.$$

Com isso, podemos resolver o item 3. Pelo item anterior, sabemos que a soma de todos os termos da n-ésima linha é n^3. Como cada linha tem, por construção, n elementos, a média aritmética será $\frac{n^3}{n} = n^2$.

Problema 1.12. Calcule a soma dos termos de uma n-ésima linha.

Solução: Perceba que cada linha forma uma PA de razão 2 com n termos. Seja $(a_i)_{i=1}^n$ esta PA, podemos usar a Proposição 1.2 para afirmar que a soma dos termos, S_n, é tal que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)2) \\ &= n(a_1 + n - 1). \end{aligned}$$

Portanto, basta saber o primeiro termo da n-ésima linha para calcular a soma. Do problema anterior, temos que o primeiro termo de cada linha é $1 + n(n-1)$, logo

$$S_n = n(n(n-1) + n) = n^3.$$

Problema 1.13. Calcule a média aritmética dos termos da n-ésima linha.

Solução: Pelo problema anterior, sabemos que a soma de todos os termos da n-ésima linha é n^3. Como cada linha tem, por construção, n elementos, a média aritmética será $\frac{n^3}{n} = n^2$.

Problemas Propostos

Problema 1.14. Resolva as quatro versões do Problema 1.10 apresentados na seção O Triângulo Aritmético de Números Ímpares.

Problema 1.15. Use as propriedades encontradas para encontrar uma expressão para

(a) O segundo termo de cada linha.

(b) O penúltimo termo de cada linha.

(c) O último termo de cada linha.

Problema 1.16 (OBM, 2009, 1ª Fase, Nível 3, Problema 25, [9])**.** Sabe-se que no triângulo ABC os lados estão em progressão aritmética de razão t. Qual a distância entre o incentro, I, e o baricentro, G, deste triângulo, em função de t?

Dica É possível mostrar que $G = \dfrac{A+B+C}{3}$ e $I = \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$ onde a, b e c são as medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Sabendo que $a = b - t$ e $c = b + t$, tente encontrar a norma do vetor $\overrightarrow{IG}$.

Problema 1.17 (*IMO*, 2009, 50ª Edição , Problema 3, [5])**.** Seja $s_1, s_2, s_3, \ldots$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsequências $s_{s1}, s_{s2}, s_{s3}, \ldots$ e $s_{s1+1}, s_{s2+1}, s_{s3+1}, \ldots$ são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sequência $s_1, s_2, s_3, \ldots$ também é uma progressão aritmética.

Dica Como existem subsequências infinitas que formam PAs, então a diferença entre dois termos de s_n é limitada superiormente pela razão das PAs. Considere $d_n = s_{n+1} - s_n$ e r e r' as razões das progressões.

Problema 1.18 (ITA, 2014, Prova de Matemática, Problema 6, [15])**.** Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a que tripla ordenada?

Dica Use a mesma ideia do Problema 1.8.

Problema 1.19 (Jornal "É Matemática, Oxente!", Número 7, p.7, [6])**.**

Problema 1.20 (*IMO*, 1983, 24ª Edição , Problema 5, [5])**.** É possível escolher 1983 inteiros distintos menores ou iguais a 10^5 tal que três deles não sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética?

Dica Considere a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde a_n na base 3 tem os mesmos dígitos que n na base 2. Exemplo: $a_6 = 110_3$ pois $6 = 110_2$.

Problema 1.21 (Retirado de [20], p.16, Exemplo 5)**.** Considere a sequência de reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e arrumea de forma similar ao Problema 1.10.

$$\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \dots & & & \end{array}$$

Considere $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_4, a_7, \dots)$ e assuma que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ é tal que } \frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1 \ \forall \ n \geq 2.$$

Prove que a sequência $(1/S_n)$ é uma PA e ache uma expressão para b_n em função de n.

Referências

[1] *ARITHMETIC PROGRESSIONS TRAINING PROBLEMS*. Disponível em: <https://www.ucd.ie/t4cms/arithmetic_progressions.pdf>. Acesso em 23/02/2023.

[2] *Art of Problem Solving Wiki - 2000 AMC 10 Problems*. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2000_AMC_10_Problems>. Acesso em: 23/02/2023.

[3] E. L. Lima, *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides, 13, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[4] *Futura-Sciences: les forums de la science*. Disponível em: <https://forums.futura-sciences.com/mathematiques-college-lycee/758878-exercice-dolympiades-suites.html>. Acesso em: 23/02/2023.

[5] International Mathematical Olympiad. Disponível em: <https://www.imo-official.org/>. Acesso em 25/02/2023.

[6] Jornal É Matemática, Oxente!. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/repositorio/>. Acesso em 26/05/2023.

[7] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] Material POTI - Recorrências - Parte I. Disponível em: <https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/cg5bhn7jgkoos.pdf>. Acesso em: 10/02/2023.

[9] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em 25/02/2023.

[10] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 24/02/2023.

[11] Olimpíada Pernambucana de Matemática. Disponível em: <https://www.opemat.com.br/>. Acesso em 25/02/2023.

[12] Portal da Matemática OBMEP - Módulo de Progressões Aritméticas. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/d8ialpjidz40k.pdf>. Acesso em: 10/02/2023.

[13] Provas Anteriores EsPCEx. Disponível em: <https://espcex.eb.mil.br/index.php/provas-anteriores>. Acesso em: 10/02/2023.

[14] Prova IME de 96/97. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/arquivos/Admissao/Vestibular_CFG/Provas_Anteriores/provas96_97/mat.pdf>. Acesso em: 10/02/2023.

[15] Provas Anteriores ITA. Disponível em: <https://www.vestibular.ita.br/provas.htm>. Acesso em: 23/02/2023.

[16] Prova Mackenzie de 2007. Disponível em: <http://download.uol.com.br/vestibular2/mack2007_prova13_12_2006.pdf>. Acesso em: 27/01/2023.

[17] ROCHA, Rogério. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR. Professor de Matemática Online, ano 2018, v. 6, p. 35-49, 11 jul. 2018. DOI <https://doi.org/10.21711/2319023X2018/pmo63>. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/11/art3_vol6_2018_SBM_PMO.pdf>. Acesso em: 14/09/2022.

[18] SARTORIUS, Wolfgang. *Gauss zum Gedächtnis.* Leipzig: S. Hirzel Verlag, 1856.

[19] SANTOS, H. P. de S.; ARAÚJO, Y. L. R. Recorrências Lineares. É Matemática, Oxente!, v. 1, n. 23, p. 2 – 10, 06 2022.

[20] X. Jiagu, *Lecture Notes On Mathematical Olympiad Courses: For Senior Section - Volume 2*, Mathematical Olympiad Series, World Scientific Publishing Company, 2012.

2. Curiosidades

O Melhor Número Segundo Sheldon Cooper

Hiller Alves Fernandes [1]

Figura 2.1: Sheldon Cooper

Caro leitor, você tem um número favorito? Por exemplo, muitos artistas gregos gostavam da razão áurea: $\phi = 1,61803...$. O autor que vos fala tem um carinho especial pela constante de Euler: $e = 2,71828...$. O matemático cearense Diego Marques Ferreira [2] já confessou que seu número favorito é o $\ln(\pi)$.

Então é natural se perguntar: Qual é o melhor número? Dica, segundo Sheldon Cooper, existe resposta certa. O melhor número é o 73! O 73 é o vigésimo primeiro número primo (21°). Seu reverso, 37, é o décimo segundo número primo (12°). E o reverso de 12, 21, pode ser expresso como o produto de $7 \cdot 3$. Além disso, em binário 73 é um palíndromo 1001001, pois seu reverso é o próprio número.

A charada aqui apresentada é na verdade uma piada proferida pelo personagem Sheldon Cooper (papel desempenhado por Jim Parsons) que ocorre na série da Warner chamada The Big Bang Theory. A série é voltada para o público nerd, principalmente aos descendentes intelectuais de Arquimedes (físicos e Matemáticos). Seus protagonistas são cientistas, mas a trama caiu no gosto popular.

Era apenas uma piada, mas em 2019 a afirmação de que 73 é o único primo com as propriedades citadas acima foi demonstrada por Carl Pomerance [3] e Chris Spicer [4], provando assim que a conjectura de Sheldon é verdadeira. Além disso, o 73° dia de um ano não bissexto, 14 de março, é conhecido como o dia do PI, pois na notação americana para a data (03/14), é a maior aproximação de uma data para a constante π, que é igual a $3,14159...$.

De modo formal, não existe melhor número, aliás, melhor não é uma definição matemática. Melhor tem um significado subjetivo, isto é, 73 é melhor em que aspecto? Para Sheldon o melhor está relacionado com beleza, simetria e pela fascínio dos números primos. Números estes que despertam a curiosidade desde a Grécia Antiga e ainda possuem diversos mistérios que não foram desvendados pelos matemáticos.

Referências

[1] POMERANCE, Carl; SPICER, Chris. Proof of the Sheldon conjecture. The American Mathematical Monthly, v. 126, n. 8, p. 688-698, 2019.

[1] SEE MG - hiller20111@hotmail.com

[2] Professor da UNB. Entrou para o RankBrasil em 2009, pela mais rápida formação em doutorado de Matemática.

[3] Professor de matemática emérito do John G. Kemeny Parents no Dartmouth College e também professor pesquisador emérito da Universidade da Geórgia.

[4] Professor associado de matemática na Morningside College. Ele recebeu seu Ph.D. da Universidade do Estado de Dakota do Norte em 2010.

3. Indicações de Leituras

Alexandria

Heloisa Cardoso Barbosa Gomes [5]

No decorrer da minha graduação, em uma das disciplinas de educação, tive a oportunidade de conhecer o grandioso filme Alexandria (2009). É um filme de produção espanhola e retrata a vida e morte de Hipátia (interpretada pela atriz Rachel Weisz), que nasceu por volta do ano de 370 d.C. e que é considerada a primeira mulher matemática documentada [1].

O longa-metragem retrata também o conflito político-religioso entre as forças pagãs, de religiões politeístas greco-romanas, cristãs e judaicas do período, mostrando conflitos, muitas desavenças e mortes. É um filme grandioso em vários sentidos e muito interessante para se pensar a sociedade antiga, os direitos e os papéis da mulher e do homem nesse período na sociedade greco-romana.

Hipátia era uma mulher sábia que estudava e lecionava matemática, filosofia, lógica e astronomia. O filme destaca o quão ela era determinada em desvendar os mistérios da nossa cosmologia, em especial em como se dava o movimento dos planetas ao redor do Sol. Foi seu pai, Theon, matemático e erudito da época, quem ensinou tudo o que sabia a sua filha, que por volta dos seus trinta anos, assumiu a direção da escola platônica em Alexandria. Apesar de ser uma mulher respeitada e influente, ela era considerada como desafiadora dos dogmas da Igreja, o que incomodava os cristãos, que pregavam que mulheres não poderiam ter acesso ao conhecimento, muito menos a ensinar. No geral, tudo o que conhecemos de Hipátia vem de terceiros, pois muitos de seus projetos e estudos foram perdidos durante a destruição do Templo de Serápis, que possuía uma grande biblioteca.

A morte de Hipátia foi trágica. Ela foi acusada de bruxaria e perseguida pelo Bispo Cirilo, que era patriarca de Alexandria e cristão radical perseguidor de seitas cristãs, sendo morta apedrejada e depois queimada na fogueira por fanáticos seguidores de Cirilo. Confesso que esse filme me gerou uma certa revolta, pois a história dessa sábia mulher, que estava à frente do seu tempo, que não seguia padrões de gênero impostos pela sociedade grega e que produziu conhecimento matemático e científico muito significativo, pouco se é falada. Porém, a trajetória dela é uma inspiração para mim e, por este e outros motivos, gostaria que mais pessoas conhecessem a história de Hipátia e suas contribuições para a matemática e, em especial, para as mulheres matemáticas.

Referências

[1] FABRO, Nathalia. Conheça Hipátia de Alexandria, a primeira mulher matemática da história. Revista Galileu, 20 de agosto de 2019. Disponível em: https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/Historia/noticia/2019/08/conheca-hipatia-de-alexandria-primeira-mulher-matematica-da-historia.html. Acesso em 17/05/2023.

[2] ALEXANDRIA. Direção: Alejandro Amenábar. Produção: Fernando Bovaira; Álvaro Augustin. Plataforma: Adorocinema. 23 de fevereiro de 2011. 02h06min. Disponível em: https://www.adorocinema.com/filmes/filme-134194/.

[5] Discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco

4. Quem pergunta, quer saber!

Revista do Professor de Matemática (RPM, nº 39, p.58)

Severino Barros de Melo[6]

Encontramos algumas vezes em cursos preparatórios para vestibular, professores que diziam: "ensino álgebra" ou "sou professor de trigonometria". A rigor, sobretudo na matemática do ensino fundamental e médio, não parece correta esta separação. Muitas vezes os problemas se apresentam com estas áreas de "mãos dadas". A pergunta seguinte, feita por um leitor de Campinas (SP) à Revista do Professor de Matemática (RPM n. 39, p.58) confirma esse ponto de vista.

Pergunta: Encontre todos os valores reais de x e y satisfazendo $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$.

Resposta da RPM:

Considerando a expressão acima como uma equação de segundo grau em x, queremos achar suas raízes reais. Para isso, o discriminante $\Delta = 16\cos^2 y - 16$ deve satisfazer $\Delta \geq 0$, ou seja: $16\cos^2 y - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 y \geq 1 \Leftrightarrow \cos y = \pm 1$.

Para $\cos y = 1$ temos $y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, e a equação inicial se reduz a $x^2 + 4x + 4 = 0$, cuja única solução é $x = -2$.

Para $\cos y = -1$ e, portanto, $y = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, a equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ tem uma única raiz $x = 2$.

Concluímos que as soluções da equação dada são todos os pares ordenados $(2, (2k+1)\pi)$ e $(-2, 2k\pi)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

5. Soluções de Olimpíadas

OPEMAT 2021 - Nível 2

Nesta edição apresentaremos a resolução das questões discursivas e de verdadeiro ou falso da prova da Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT) do ano de 2021 referentes ao nível 2.

1. No decorrer dos anos, muitas vezes nos deparamos com datas curiosas como 10/02/2001, que ao desconsiderarmos as barras, lidas da esquerda para direita ou da direita para esquerda resultam no mesmo número. Números com essa característica são chamados de *palíndromos*. Em 2020, por exemplo, tivemos uma data que formou um número palíndromo

02/02/2020.

Verifique as afirmações a seguir atribuindo (V) se a afirmação for VERDADEIRA ou (F) se a afirmação for FALSA.

A – (V) (F) A próxima data que forma um número palíndromo é 12/02/2021.

B – (V) (F) A última data que formou um número palíndromo, antes de 02/02/2020 foi 21/02/2012.

C – (V) (F) Nesta década, de 01/01/2020 à 31/12/2029 teremos 6 datas que formam números palíndromos.

D – (V) (F) O último palíndromo do milênio será 13/12/2131.

E – (V) (F) Durante este século, 01/01/2001 à 31/12/2100 temos 30 datas que formam números palíndromos.

Resposta: V V F F F

[6] Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco

Solução:

A – (V) Afirmação verdadeira. Como o próximo ano é 2021 que lido da direita para a esquerda resulta em 1202, então a próxima data a formar um número palíndromo será 12/02/2021.

B – (V) Afirmação verdadeira. A data procurada é da forma $YX/02/20XY$. Como o número YX deve ser no máximo 28 ou 29 (a depender do ano) e, o número XY deve ser no máximo 19, analisando as possibilidades chegamos na data 21/02/2012

C – (F) Afirmação falsa. Temos 3 datas

$$02/02/2020, 12/02/2021 \text{ e } 22/02/2022.$$

D – (F) A afirmação é falsa. O último palíndromo do milênio será em

$$29/12/2192.$$

E – (F) Afirmação falsa. Como de 01/01/2091 à 31/12/2100 teremos 2 datas que formam números palíndromos e, nas outras décadas temos 3, então a resposta é $9 \cdot 3 + 2 = 29$. (Lembrando que o ano de 2092 será bissexto).

2. Em um determinado país as cédulas de dinheiro são de \$5 e de \$9 apenas.

(A) É possível comprar algo, que custa \$31, sem receber troco ou pagar a mais por isso? Justifique.

(B) A partir de que valor, sempre é possível pagar com notas de \$5 e \$9 sem que seja necessário receber trocos?

Solução:

(A) Considere a seguinte equação diofantina:

$$5x + 9y = 1.$$

Para resolvê-la, usaremos o algoritmo estendido de Euclides:

$$\begin{aligned} 9 &= 5 \cdot 1 + 4 \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Logo, obtemos $1 = 2 \cdot 5 - 9$. Multiplicando tudo por 31, ficamos com

$$5 \cdot (31 \cdot 2) + 9 \cdot (-31) = 31.$$

Assim, obtemos a solução geral:

$$(x, y) = (62 + 9k, -31 - 5k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Queremos encontrar $k \in \mathbb{Z}$, tal que, $62 + 9k \geq 0$ e $62 + 9k \geq 0$. Fazendo as contas obtemos $k \geq -6$ e $k \leq -7$. Portanto, não existe solução em $\mathbb{Z}$.

(B) Observe que

$$\begin{aligned} \bullet\, 5 \cdot 1 + 9 \cdot 3 &= 32 \quad \Rightarrow \\ 5 \cdot (1 + t) + 9 \cdot 3 &= 32 + 5t, \quad t \in \mathbb{N}; \\ \bullet\, 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 &= 33 \quad \Rightarrow \\ 5 \cdot (3 + t) + 9 \cdot 2 &= 33 + 5t, \quad t \in \mathbb{N}; \\ \bullet\, 5 \cdot 5 + 9 \cdot 1 &= 34 \quad \Rightarrow \\ 5 \cdot (5 + t) + 9 \cdot 1 &= 34 + 5t, \quad t \in \mathbb{N}; \\ \bullet\, 5 \cdot 7 + 9 \cdot 0 &= 35 \quad \Rightarrow \\ 5 \cdot (7 + t) + 9 \cdot 0 &= 35 + 5t, \quad t \in \mathbb{N}; \\ \bullet\, 5 \cdot 0 + 9 \cdot 4 &= 36 \quad \Rightarrow \\ 5 \cdot (0 + t) + 9 \cdot 4 &= 36 + 5t, \quad t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, a partir de \$32, todos os valores podem ser obtidos com notas de \$5 e \$9.

3. Certo dia, o π-raia e seus amigos se reuniram para jogar um jogo de *RPG* chamado “Numbers & Dragons”. Durante a aventura imaginária, o π-raia encontra um aterrorizante dragão adormecido guardando um enorme tesouro. O mestre de jogo informa ao π-raia que o dragão tem 20 pontos de vida e que se em seis rodadas o π-raia não conseguir causar exatamente 20 pontos de dano ao dragão, ele será devorado na sétima rodada. A cada rodada, o π-raia pode usar aleatoriamente apenas uma dentre três opções:

(i) Uma espada que causa dano de 1 ponto de vida;

(ii) um arco e flecha que causa dano de 3 pontos de vida;

(iii) uma poderosa magia que causa dano de 7 pontos de vida.

De quantos modos é possível que o π-raia derrote o dragão em precisamente 6 rodadas?

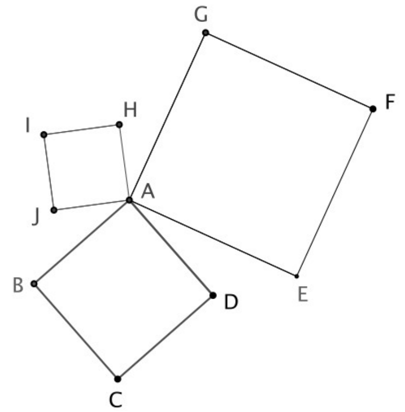
Solução:
Denotando por a, b e c a quantidade de vezes que a espada, o arco e flecha e a poderosa magia foram utilizadas, respectivamente, a condição de que o π-raia derrote o dragão em exatamente seis pode ser expressa por $a+b+c=6$. Além disso, como o π-raia precisa causar exatamente 20 pontos de dano ao dragão, temos $a+3b+7c=20$. Estas duas condições implicam que $2b+6c=14$, ou seja, $b=7-3c$. Como a, b e c são inteiros não-negativos, as únicas soluções possíveis são: (i) $a=1$, $b=4$ $c=1$; (ii) $a=3$, $b=1$ e $c=2$. Analisemos as possibilidades:

- No caso (i), temos 6 modos de escolher em que rodada será usada a espada e 5 modos de escolher em que rodada será utilizada a magia. Nas demais rodadas, o arco e flecha é utilizado. Pelo princípio multiplicativo, temos $6\cdot 5=30$ modos de montar a sequência de uso das armas.

- No caso (ii), temos 6 modos de escolher em que rodada será usado o arco e flecha. Há $5\cdot 4=20$ modos de se escolher as duas rodadas onde serão utilizadas a magia, porém, contando desta forma, cada escolha foi contada duas vezes. Logo, o número de escolhas para o uso da magia é $20/2=10$. Por fim, só há 1 modo de escolher as rodadas para se utilizar a espada, visto que só restam 3 rodadas para escolher e a espada foi utilizada 3 vezes. Pelo princípio multiplicativo, temos $6\cdot 10\cdot 1=60$ modos de montar a sequência de uso das armas.

Logo, pelo princípio aditivo, o dragão pode ser derrotado em seis rodadas de 90 maneiras diferentes.

4. Considere três quadrados arbitrários $\square ABCD$, $\square AEFG$ e $\square AHIJ$ tendo em comum apenas o vértice A, conforme mostra a figura abaixo.



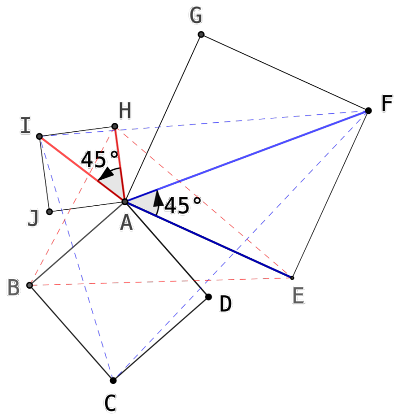
Se a área do triângulo ΔCFI é igual a 6, determine a área do triângulo ΔBEH.

Solução:

Podemos observar que o triângulo CFI é obtido do triângulo BEH por meio de uma rotação positiva de 45º, seguida de uma homotetia de centro A e razão $\sqrt{2}$. Ou seja, os vértices B, E e H são levados, respectivamente, nos vértices C, F e I por meio desta "Roto-homotetia".

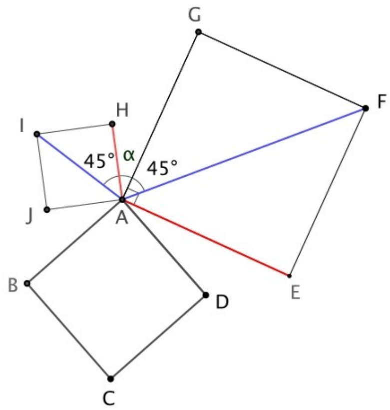
Sendo assim, os triângulos BEH e CFI são semelhantes com razão de semelhança igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Consequentemente, a razão entre suas áreas é igual a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$[BEH] = \frac{1}{2} \cdot [CFI] = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$



De outra forma, mais detalhada:

Seja $\alpha = \angle HAG$. Os triângulos IAF e HAE são semelhantes (critério LAL), pois $\frac{IA}{HA} = \frac{AF}{AE} = \sqrt{2}$ e $\angle IAF = \angle HAE = \alpha + 90$. (ou seja, o triângulo IAF é obtido do triângulo HAE por meio de uma rotação positiva de 45º, seguida de uma homotetia de centro A e razão $\sqrt{2}$.)



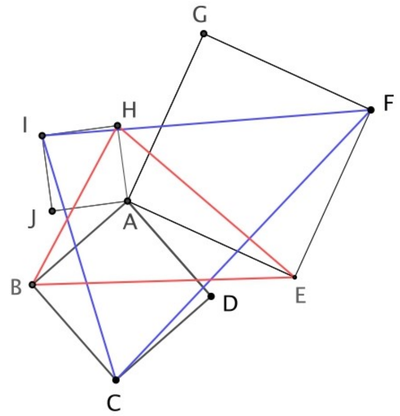
Daí, temos que

$$\frac{FI}{EH} = \sqrt{2}.$$

De maneira análoga, podemos concluir que $FAC \cong EAB$ e $CAI \cong BAH$, ou ainda, $\frac{CF}{BE} = \frac{IC}{HB} = \sqrt{2}$.

Logo,

$$\frac{FI}{EH} = \frac{CF}{BE} = \frac{IC}{HB} = \sqrt{2}.$$



Desta forma, os triângulos CFI e BEH são semelhantes (critério LLL) de razão de semelhança igual a $\sqrt{2}$. Consequentemente, a razão entre suas áreas é igual a $(\sqrt{2})^2 = 2$, ou seja,

$$[CFI] = 2 \cdot [BEH] \Rightarrow [BEH] = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

5. Considere um número $n > 10$ cuja representação decimal possui k dígitos todos não nulos. Um número n desta forma é dito *ancorado* se cada um dos inteiros obtidos quando excluímos um dígito de n é divisor de n. Por exemplo, o número 12 é ancorado enquanto que o número 13 não é ancorado.

(A) Encontre os números ancorados de dois dígitos.

(B) Prove que não existem números ancorados com mais de dois dígitos.

Solução:

(A) Escreva $n = 10a + b$ com $a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Quando deletamos b devemos ter $a | 10a + b$, logo $a | b$, portanto $b = ka$, com k inteiro. Por outro lado, removendo a de n, temos que $b | 10a + b$, logo $b | 10a$, portanto $k | 10$. Desse modo, k só pode ser igual a 1, 2, 5 ou 10. Como

$b \leq 9$, $k = 10$ não é possível. Se $k = 1$, então $a = b$ e 11, 22, 33, ..., 99 são soluções. Se $k = 2$, como $b < 10$, então $a < 5$. Logo $n = 12, 24, 36$ e 48 são soluções. Por fim, se $k = 5$ como $b < 10$, então $a < 2$, consequentemente a só pode ser 1, logo $n = 15$ é solução. Temos assim um total de 14 números ancorados com dois dígitos.

(B) Escreva $n = 10a + b$, com $b \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e a é um número com $k-1$ dígitos não nulos. Removendo o último dígito de n, por hipótese, como n é ancorado, segue que $a|10a + b$, daí $a|b$. Se $k \geq 3$, então a tem ao menos dois dígitos, ou seja $a > b$, mas como $a|b$ então $a \leq b$. Absurdo! Concluímos que se n é um número ancorado com k dígitos, então $k = 2$.

6. Eventos

Fiquem Ligados!!!

- **Brazil-China Joint Mathematical Meeting**
  - Local: Foz do Iguaçu - PR
  - Data: 17 a 21 de Julho de 2023
  - Mais informações: https://eventos.sbm.org.br/
- **III Encontro Pessoense do PROFMAT**
  - Local: Universidade Federal da Paraíba
  - Data: 10 a 12 de agosto de 2023
  - Mais informações: http://www.mat.ufpb.br/~encjpprofmat/index.html
- **Fórum Tocantinense de Formação Inicial de Professores que Ensinam Matemática (II FTPEM)**
  - Local:UFNT (Campus de Araguaína), UFT (Campus de Arraias), UNITINS (Campus de Palmas) e Online.
  - Data: 16 a 19 de agosto de 2023
  - Mais informações: https://ojs.sbemto.org/index.php/FTPEM
- **II Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática - II SiRPEM**
  - Local: Evento On-line (Universidade Estadual de Maringá - Maringá - PR)
  - Data: 23 a 25 de agosto de 2023
  - Mais informações: https://sirpem2.webnode.page
- **II Congresso Amazônida Marajoara de Matemática**
  - Local: Evento Online (Universidade Estadual de Maringá - Maringá - PR)
  - Data: 24 a 26 de agosto de 2023
  - Inscrições: dezembro de 2022 a julho de 2023
  - Submissão de trabalhos: 13/12/2022 a 30/06/2023
  - Mais informações: https://www.even3.com.br/congresso-amazonida-marajoara-de-matematica-298810/
- **XLII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) 2023**
  - Local: Centro de Convenções em Bonito MS
  - Data: 18 a 22 de setembro de 2023
  - Mais informações: http://www.cnmac.org.br/novo/

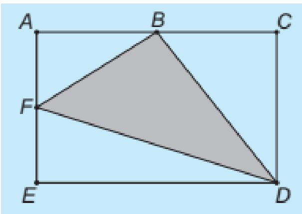
7. Problemas

Convidamos o leitor a responder alguns problemas. **Divirtam-se!!!**

Enviem as soluções dos problemas propostos para o e-mail: *ematematicaoxente@gmail.com*

Para que apreciemos sua solução e o seu nome apareça entre os solucionadores de questões, o envio do arquivo (.tex), no modelo disponível no site, deve ser realizado até **22/09/2023**.

Problema 1. (OBMEP 2015 - 1ª fase) O retângulo da figura possui área igual a $640\,cm^2$. Os pontos B e F são pontos médios dos lados AC e AE, respectivamente. Qual é a área do triângulo BDF?
a) $100\,cm^2$ b) $120\,cm^2$ c) $160\,cm^2$ d) $220\,cm^2$ e) $240\,cm^2$



Problema 2. (OBMEP - 2017 - 1º Fase - Nível 3) Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3?

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{6}{9}$ e) $\frac{7}{9}$

Problema 3. (OBRL - 2021 1ª Fase Nível Gama) Três distintos rapazes: Asteroide; Apocalipe e Artitty moravam cada um em uma cidade distinta: Barozopolis (PR); Xique-xique (BA) e Sem-peixe (MG), tendo cada um uma característica própria: Louro, Moreno e Ruivo, Cada um com uma única profissão: Escritor de bilhete da sorte; Testador de Colchão e Testador de toboágua. Sabe-se ainda:

I. Asteroide é Testador de Colchão, não mora em Xique-xique (BA) e não é Louro.

II. Artitty não é Escritor de bilhete da sorte, mora em Sem-peixe (MG) e é ruivo.

Então é correto afirmar que:

a) Apocalipe é moreno.

b) Apocalipe não mora em Xique-xique (BA).

c) Apocalipe é Escritor de bilhete da sorte.

d) Apocalipe é Ruivo.

e) Apocalipe é Testador de Colchão.

8. Soluções dos Problemas

Nesta edição apresentamos as soluções dos problemas propostos da publicação **vol. 1, n. 25, dezembro de 2022**.

Problema 1. (OBMEP 2015) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

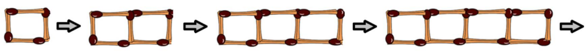
Solução. Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos dois premiados são: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \times 9 = 90$. □

Problema 2. (17^a OBMEP - 1^a FASE). Sejam a e b inteiros positivos tais que $a + 2$ é múltiplo de b e $b + 2$ é múltiplo de a. Qual é o maior valor possível para $a + b$?
a) 2 b) 4 c) 6 d) 10 e) 1

 ISSN 2526-8651

Solução. [7] Podemos supor sem perda de generalidade que $b \leq a$. Por hipótese $b|(a+2)$ como $b|b$ isso implica que $b|(a-b+2)$. Portanto, $b \leq a-b+2 \Rightarrow 2b-2 \leq a$. Por outro lado, ainda por hipótese, $a|(b+2) \Rightarrow a \leq b+2$. Por transitividade $2b-2 \leq b+2 \Rightarrow b \leq 4$. Consequentemente, $b \in \{1,2,3,4\}$. Quanto maior o valor de b maior é a soma de $a+b$, então vamos explorar o caso em que b assume o maior valor. Se $b = 4 \Rightarrow a|(6 = 2 \cdot 3) \Rightarrow a \in \{1,2,3,6\}$. Como $a \geq b = 4 \Rightarrow a = 6$. De fato, $4|(6+2)$ e $6|(4+2)$, portanto $a+b \leq 6+4 = 10$. Logo, a maior soma possível de $a+b$ é 10, assim a alternativa correta é a letra d). □

Problema 3. (OBRL - 2021 2ª Fase Nível Ômega) Usando palitos de fósforos inteiros é possível construir uma sucessão de figuras compostas por quadrados.



Observe a tabela que relaciona a correspondência entre o número de quadrados em função da quantidade de palitos.

Nº QUADRADOS	1	2	3	4	...	20	...	K	...	48
Nº PALITOS	4	7	10	W	...	61	...	97	...	Y

Descubra o valor da soma dos números que substituem corretamente as letras W, K e Y, sendo estes referentes à quantidade de palitos ou de quadrados necessária para a construção de figuras compostas.

a)190 b)214 c)145 d)177 e)233.

Solução. Observe que se n for o número de quadrados, devemos ter $4+3(n-1)$ palitos para a sua construção.
Assim, se $n = 4$, então $W = 4+3(4-1) = 13$ e se $n = 48$, então $Y = 4+3(48-1) = 145$.
Para descobrir o valor de K, basta resolver a equação $4+3(K-1) = 97$. Logo, $K = 32$ e, consequentemente, $W+K+Y = 190$.
Portanto, a alternativa correta é o item a). □

[7] Solução enviada por Hiller Alves Fernandes – Professor da SEE MG