3.1. FUNDAMENTOS GERAIS

1. Falso (**F**) ou Verdadeiro (**V**)? Justifique.

(a) Se a série $\sum c_n x^n$ diverge em $x = 2$, então ela diverge em $x = 3$.

(b) Se a série $\sum c_n x^n$ converge em $x = 2$, então ela converge em $x = 3$.

(c) Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente, então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $[-1, 1]$.

(d) Se uma série de potências é absolutamente convergente em um dos extremos de seu intervalo de convergência, então ela também converge absolutamente no outro extremo.

(e) Se R é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, então $\sqrt{R}$ é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$.

(f) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L > 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tem raio de convergência $1/L$.

(g) Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode convergir apenas em dois valores de x.

(h) Se uma série de potências converge em um extremo de seu intervalo de convergência e diverge no outro, então a convergência naquele extremo é condicional.

(i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência 2 e $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ tem raio de convergência 3, então o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$ é $R = 2$.

2. Em cada caso, determine o intervalo de convergência da série de potências.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^{2n}}{3^{2n-1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot x^{n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(\ln n)}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

(j) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!}$ (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{(n+1)3^n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{4n}}{n^{1/n}}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} n$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(n+1)^3}$ (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n + 5^{-n})(x+1)^{3n-2}}{n^2}$.

3. Começando com a fórmula $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, válida para $|x| < 1$, represente cada função por uma série de potências de x. Em cada caso determine o raio e o intervalo de convergência.

   (a) $\dfrac{1}{2+x}$ (b) $\dfrac{1}{1-x^4}$ (c) $\dfrac{1}{1-4x}$ (d) $\dfrac{x}{1-x^2}$

   (e) $\dfrac{x}{2-3x}$ (f) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (g) $\ln(1-x)$ (h) $\dfrac{x^3}{(1-x^4)^2}$

   (i) $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ (j) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$ (k) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ (l) $\dfrac{1}{6-x-x^2}$.

4. Use a série de e^x e calcule o valor da soma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!2^n}$.

5. Represente $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ em séries de potências de x e use o resultado para mostrar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$.

6. Represente $\dfrac{e^x - 1}{x}$ em série de potências de x e, por derivação termo a termo, prove que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

7. Represente $x^2 e^{-x}$ em série de potências de x e, derivando o resultado, prove que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = 8.$$

8. No intervalo $0 < x < 4$, mostre que:

$$\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n 2^n}.$$

9. Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências que representa a função xe^x, mostre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (n+2)} = \frac{1}{2}.$$

10. Com auxílio da série de potências de arctg x, mostre que:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}.$$

11. Em cada caso, use uma série de potências adequada e aproxime a integral com duas casas decimais.

   (a) $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^6}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{0.5} \exp\left(-x^3\right) dx.$

12. Identifique a função do cálculo definida pela série $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, no intervalo $|x|<1$.

3.2. SÉRIE DE TAYLOR & SÉRIE MACLAURIN

1. Represente as seguintes funções em séries de potências de x:

   (a) $f(x)=e^{-x^2}$ (b) $f(x)=x\operatorname{sen}x$ (c) $f(x)=3^{x+1}$ (d) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

   (e) $f(x)=x^2\operatorname{sen}x$ (f) $f(x)=\cos^2 x$ (g) $f(x)=e^{4-x}$ (h) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$

   (i) $f(x)=\operatorname{senh}x$ (j) $f(x)=\operatorname{sen}4x$ (k) $f(x)=\cosh x$ (l) $f(x)=\cos 3x$

2. Em estatística a função $E(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ recebe o nome de *Função Erro*. Encontre a Série de Maclaurin da função $E(x)$.

3. Determine as constantes a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4, de modo que:

$$3x^4-17x^3+35x^2-32x+17=a_4(x-1)^4+a_3(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0.$$

4. Em cada caso, encontre a expansão de Taylor da função f em torno do ponto indicado.

   (a) $f(x)=\sqrt{x}$; $a=9$ (b) $f(x)=\operatorname{tg}x$; $a=0$ (c) $f(x)=\cos x$; $a=\pi/3$

   (d) $f(x)=e^x$; $a=4$ (e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $a=1$ (f) $f(x)=\operatorname{sen}x$; $a=\pi/6$

   (g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; $a=1$ (h) $f(x)=\dfrac{1}{3x}$; $a=2$ (i) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$; $a=3$.

5. Qual a Série de Maclaurin do polinômio $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$?

6. Encontre uma série de potências de x para representar a função $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ e, usando o resultado, conclua que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

7. Determine uma série de potências de $x+1$ para a função $f(x)=e^{2x}$ e uma série de potências de $x-1$ para $g(x)=\ln x$.

8. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, infinitamente derivável, é tal que $f'(x)=2xf(x)$, $f(x)>0$, $\forall\, x$, e $f(0)=1$. Represente a função $f(x)$ por uma série de potências de x. Idem para uma função $g(x)$ com as propriedades: $g(0)=0$, $g'(0)=1$ e $g''(x)=-g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

9. Preencha a tabela com os valores das derivadas indicadas, considerando as seguintes funções: $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos\left(x^2\right)$, $h(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ e $p(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

$f^{(15)}(0)$	$f^{(28)}(0)$	$g^{(16)}(0)$	$h^{(20)}(0)$	$p^{(17)}(0)$

10. Estime o erro cometido ao substituir, no intervalo $|x| < 0.1$, o valor de cos por $1 - x^2/2$.

3.3. SÉRIE BINOMIAL

A expansão binomial

$$(x + y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}y^2 + \cdots + y^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{0.1}$$

simbolicamente representada por:

$$(x + y)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$$

e conhecida por *binômio de Newton*, foi generalizada por volta de 1665 por Newton, no caso em que o expoente k é um número fracionário positivo ou negativo, onde ele obteve uma expansão em série infinita para $(x + y)^k$. Motivados pela fórmula binomial de Newton (0.1) encontra-se a seguinte expansão em série de potências para a função $f(x) = (1 + x)^\alpha$, sendo α um número real qualquer, a qual será a série de Maclaurin de f:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^n}{n!} + \cdots, \quad |x| < 1. \tag{0.2}$$

cujo n-ésimo termo é $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^n}{n!}$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{\alpha - n}{n + 1}\right| = |x|$$

e, portanto, a série binomial converge absolutamente quando $|x| < 1$ e diverge quando $|x| > 1$.

Exemplo Uma maneira de obtermos um valor aproximado de $\sqrt{1 + x}$, para um dado valor de x no intervalo $(-1, 1)$, é usando a série binomial. Neste caso temos $\alpha = 1/2$, de modo que

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots$$

e, dependendo da situação, podemos considerar apenas os dois ou os três primeiros termos da série para a aproximação. Considerando $x = 0.2$ e aproximando a série por seus três primeiros termos, encontramos:

$$\sqrt{1.2} \simeq 1 + \tfrac{1}{2}(0.2) - \tfrac{1}{8}(0.2)^2 \simeq 1.095.$$

1. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx$ com 4 casas decimais.
2. Se $|x| < 0.01$, qual o erro cometido ao substituir $\sqrt{1+x}$ por $1 + x/2$?
3. Usando a série binomial para $\sqrt[3]{1+x}$, calcule o valor de $\sqrt[3]{25}$ com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido em uma calculadora.
4. Usando a série binomial para $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mostre que:

$$\operatorname{arcsen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\, x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)\, 2^n}, \quad |x| < 1.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1

1. Associe as afirmações verdadeiras aos fatos teóricos e as falsas a um contraexemplo.

   (a) **(V)** **(b)** **(F)** **(c)** **(V)** **(d)** **(V)** **(e)** **(V)** **(f)** **(V)** **(g)** **(F)** **(h)** **(V)** **(i)** **(V)**

2. (a) $\{3\}$ (b) $(-2,2)$ (c) $(-1,1)$ (d) $(-1,1)$ (e) $(-2,4)$ (f) $(-1,1)$ (g) $(-1,1]$ (h) $[-6,-4]$ (i) $(-\infty,\infty)$ (j) $\{0\}$ (k) $(-\infty,\infty)$ (l) $(-\infty,\infty)$ (m) $(2,4]$ (n) $(-2,4]$ (o) $(2,4)$ (p) $(-1,1)$ (q) $\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (r) $|x+1| \le 1/\sqrt[3]{5}$.

3. Em alguns casos use o processo de Derivação ou Integração termo a termo. Por exemplo, a série (i) é obtida por derivação da série (c).

   (a) $\dfrac{1}{2+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.$

   (b) $\dfrac{1}{1-x^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}, \quad |x| < 1.$

   (c) $\dfrac{x}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$

(d) $\dfrac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n, \quad |x| < 1/4.$

(e) $\dfrac{x}{2-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2/3.$

(f) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, x^{2n-1}, \quad |x| < 1.$

(g) $\ln(1-x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$

(h) $\dfrac{x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{4n-1}, \quad |x| < 1.$

(i) $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^{2n}, \quad |x| < 1.$

(j) $\dfrac{x^2-3}{x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3x^n - x^{n+2}}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.$

(k) $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)\, x^n}{2}, \quad |x| < 1.$

(l) $\dfrac{1}{6-x^2-x} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{3(1+x/3)} + \dfrac{1}{2(1-x/2)}\right] = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] x^n, \quad |x| < 2.$

4. $\exp(-1/2)$.

5. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; $|x| < 1$. Agora, considere $x = 1/2$.

6. $\dfrac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{(k-1)\, x^{k-2}}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^{n-1}}{(n+1)!}$. Agora faça $x = 1$.

7. Fazer.

8. O ponto de partida é a série geométrica

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < x < 4,$$

que, após integração termo a termo, nos dá:

$$\ln x - \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+1)\, 2^{n+1}} = (\text{reindexar: } n+1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (x-2)^k}{k 2^k}.$$

9. Fazer.

10. Basta observar que $\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right)$ e considerar $x = 1/\sqrt{3}$ na série de $\operatorname{arctg} x$.

11. **(a)** 0.3299 **(b)** 0.4849.

12. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.2

1. Algumas séries podem ser obtidas a partir de representações conhecidas. Por exemplo, se na série de e^x substituirmos x por $-x^2$ obtemos uma série para $\exp(-x^2)$.

(a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; \; x \in \mathbb{R}$

(b) $x \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(c) $3^{x+1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln 3)^n x^n}{n!}; \; x \in \mathbb{R}$

(d) $\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}; \; |x| < 1$

(e) $x^2 \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(f) $\cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(g) $e^{4-x} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}; \; x \in \mathbb{R}$

(h) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(i) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \; x \in \mathbb{R}.$

(j) $\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(k) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}; \; x \in \mathbb{R}$

(l) $\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}; \; x \in \mathbb{R}$

2. Integrando a série obtida no Exercício 3.2(1a) de 0 até x, obtemos $E(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$.

3. $a_0 = 6$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -5$ e $a_4 = 3$.

4. A série de Taylor em torno de $x = a$ de uma função $f(x)$, infinitamente derivável no intervalo $|x-a| < R$, vem dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{n!}.$$

No caso em que $a = 0$, a série correspondente é conhecida pelo nome de *Série de Maclaurin* de f.

(a) $\sqrt{x} = 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \sum (-1)^{n+1} \dfrac{1.3.5.\ldots.(2n-3)}{n!2^n 3^{2n-1}} (x-9)^n.$

(b) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots, \; -\pi/2 < x < \pi/2.$

(c) $\cos x = \dfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/3)^3.$

(d) $e^x = e^4.e^{x-4} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{n!}.$

(e) $\sqrt[3]{x} = 1 + (x-1)/3 - (x-1)^2/3^2 + 5(x-1)^3/3^4 - \cdots$.

(f) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \cdots$.

(g) $\dfrac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$; $0 < x < 2$.

(h) $\dfrac{1}{3x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$.

(i) $\dfrac{1}{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{7^{n+1}}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$.

5. $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, sendo $a_k = 0$ para $k \geq n+1$.

6. Temos que:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{x}\Big(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = -x + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^7}{8!} - \cdots$$

e daí segue que $\lim\limits_{x \to 0}\Big(\dfrac{1-\cos x}{x}\Big) = 0$.

7. $e^{2x} = e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n (x+1)^n}{n!}; \quad x \in \mathbb{R}$ e $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < x < 2$.

8. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9. $f^{(15)}(0) = 0$; $f^{(28)}(0) = -28$; $g^{(16)}(0) = \frac{16!}{8!}$; $h^{(20)}(0) = -\frac{20!}{10}$; $p^{(17)}(0) = \frac{16!}{8!}$.

10. $|E| \leq 1.6 \times 10^{-4}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.3

1. Aproxime $\left(1 - x^3\right)^{1/2}$por S_3, integre de 0 até 1 e obtenha $\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}dx \simeq 0.8572$.

2. $E < 1.25 \times 10^{-5}$.

3. Escreva $\sqrt[3]{25} = 3\sqrt[3]{25/27} = 3\sqrt[3]{1 - 2/27}$ e usando a série binomial para obter $\sqrt[3]{25} \simeq 2.9262$.